J. L. MERIAM | L. G. KRAIGE

MECÂNICA PARA ENGENHARIA

ESTÁTICA

SEXTA EDIÇÃO

gen | LTC

Fatores de Conversão

Unidades do Sistema Americano para Unidades SI

Para converter de	Para	Multiplique por
(Aceleração)		
pé/segundo^2 (ft/s^2)	metro/segundo^2 (m/s^2)	$3{,}048 \times 10^{-1}$*
polegada/segundo^2 (in/s^2)	metro/segundo^2 (m/s^2)	$2{,}54 \times 10^{-2}$*
(Área)		
pé^2 (ft^2)	metro^2 (m^2)	$9{,}2903 \times 10^{-2}$
polegada^2 (in^2)	metro^2 (m^2)	$6{,}4516 \times 10^{-4}$*
(Comprimento)		
pé (ft)	metro (m)	$3{,}048 \times 10^{-1}$*
polegada (in)	metro (m)	$2{,}54 \times 10^{-2}$*
milha (mi), (americana)	metro (m)	$1{,}6093 \times 10^{3}$
milha (mi), (náutica)	metro (m)	$1{,}852 \times 10^{3}$*
(Constante de mola)		
libra/polegada (lb/in)	newton/metro (N/m)	$1{,}7513 \times 10^{2}$
(Força)		
kip (1000 lb)	newton (N)	$4{,}4482 \times 10^{3}$
libra-força (lb)	newton (N)	4,4482
(Massa)		
libra-massa (lbm)	quilograma (kg)	$4{,}5359 \times 10^{-1}$
slug (lb-s^2/ft)	quilograma (kg)	$1{,}4594 \times 10$
t (2000 lbm)	quilograma (kg)	$9{,}0718 \times 10^{2}$
(Massa específica)		
libra-massa/polegada^3 (lbm/in^3)	quilograma/metro^3 (kg/m^3)	$2{,}7680 \times 10^{4}$
libra-massa/pé^3 (lbm/ft^3)	quilograma/metro^3 (kg/m^3)	$1{,}6018 \times 10$
(Momento)		
libra-pé (lb-ft)	newton-metro (N · m)	1,3558
libra-polegada (lb-in)	newton-metro (N · m)	0,1129 8
(Momento de inércia, área)		
polegada^4	metro^4 (m^4)	$41{,}623 \times 10^{-8}$
(Momento de inércia, massa)		
libra-pé-segundo^2 (lb-ft-s^2)	quilograma-metro^2 (kg · m^2)	1,3558
(Potência)		
pé-libra/minuto (ft-lb/min)	watt (W)	$2{,}2597 \times 10^{-2}$
cavalos-vapor, HP (550 ft-lb/s)	watt (W)	$7{,}4570 \times 10^{2}$
(Pressão, tensão)		
atmosfera (padrão)(14,7 lb/in^2)	newton/metro^2 (N/m^2 ou Pa)	$1{,}0133 \times 10^{5}$
libra/pé^2 (lb/ft^2)	newton/metro^2 (N/m^2 ou Pa)	$4{,}7880 \times 10$
libra/polegada^2 (lb/in^2 ou psi)	newton/metro^2 (N/m^2 ou Pa)	$6{,}8948 \times 10^{3}$
(Quantidade de movimento, angular)		
libra-pé-segundo (lb-ft-s)	newton-metro-segundo (kg · m^2/s)	1,3558
(Quantidade de movimento, linear)		
libra-segundo (lb-s)	quilograma-metro/segundo (kg · m/s)	4,4482
(Trabalho, Energia)		
unidade térmica britânica (BTU)	joule (J)	$1{,}0551 \times 10^{3}$
pé-libra força (ft-lb)	joule (J)	1,3558
quilowatt-hora (kW-h)	joule (J)	$3{,}60 \times 10^{6}$*
(Velocidade)		
pé/segundo (ft/s)	metro/segundo (m/s)	$3{,}048 \times 10^{-1}$*
nó (milhas náuticas/h)	metro/segundo (m/s)	$5{,}1444 \times 10^{-1}$
milhas/hora (mi/h)	metro/segundo (m/s)	$4{,}4704 \times 10^{-1}$*
milhas/hora (mi/h)	quilômetro/hora (km/h)	1,6093
(Volume)		
pé^3 (ft^3)	metro^3 (m^3)	$2{,}8317 \times 10^{-2}$
polegada^3 (in^3)	metro^3 (m^3)	$1{,}6387 \times 10^{-5}$

*Valor exato

Unidades SI Utilizadas em Mecânica

Quantidade	Unidade	Símbolo SI
(Outras Unidades Suplementares e Aceitáveis)		
Ângulo plano	graus (decimal)	°
Ângulo plano	radiano	—
Distância (navegação)	milha náutica	(= 1,852 km)
Massa	tonelada (métrica)	t (= 1000 kg)
Tempo	dia	d
Tempo	hora	h
Tempo	minuto	min
Velocidade	nó	(1,852 km/h)
(Unidades Básicas)		
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
(Unidades Derivadas)		
Aceleração, angular	radiano/segundo^2	rad/s^2
Aceleração, linear	metro/segundo^2	m/s^2
Área	metro^2	m^2
Constante de mola	newton/metro	N/m
Força	newton	N (= kg · m/s^2)
Freqüência	hertz	Hz (= 1/s)
Impulso, angular	newton-metro-segundo	N · m · s
Impulso, linear	newton-segundo	N · s
Massa específica	quilograma/metro^3	kg/m^3
Momento	newton-metro	N · m
Momento de inércia, área	metro^4	m^4
Momento de inércia, massa	quilograma-metro^2	kg · m^2
Potência	watt	W (= J/s = N · m/s)
Pressão, tensão	pascal	Pa (= N/m^2)
Produto de inércia, área	metro^4	m^4
Produto de inércia, massa	quilograma-metro^2	kg · m^2
Quantidade de movimento, angular	quilograma-metro^2/segundo	kg · m^2/s (= N · m · s)
Quantidade de movimento, linear	quilograma-metro/segundo	kg · m/s (= N · s)
Trabalho, energia	joule	J (= N · m)
Velocidade, angular	radiano/segundo	rad/s
Velocidade, linear	metro/segundo	m/s
Volume	metro^3	m^3

Prefixos das Unidades SI

Fator de Multiplicação	Prefixo	Símbolo
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^9	giga	G
1 000 000 = 10^6	mega	M
1 000 = 10^3	quilo	k
100 = 10^2	hecto	h
10 = 10	deca	da
0,1 = 10^{-1}	deci	d
0,01 = 10^{-2}	centi	c
0,001 = 10^{-3}	mili	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p

Algumas Regras para Escrever Grandezas Métricas

1. (a) Utilize prefixos para manter os valores numéricos usualmente entre 0,1 e 1000.
   (b) O uso dos prefixos hecto, deca, deci e centi deve, geralmente, ser evitado, exceto para certas áreas ou volumes para os quais, de outro modo, seria difícil lidar com números.
   (c) Utilize prefixos apenas no numerador de unidades combinadas. A única exceção é a unidade básica quilograma. (*Exemplo*: escreva kN/m e não N/mm; J/kg e não mJ/g)
   (d) Evite prefixos duplos. (*Exemplo*: escreva GN e não kMN)
2. Designação de unidades
   (a) Utilize um ponto para multiplicação de unidades (*Exemplo*: escreva N · m e não Nm)
   (b) Evite a ambigüidade de traços de fração repetidos. (*Exemplo*: escreva N/m^2 e não N/m/m)
   (c) Expoentes referem-se a toda a unidade. (*Exemplo*: mm^2 significa (mm)^2)
3. Agrupamento dos números
   Utilize um espaço em vez de um ponto para separar números em grupos de três, a partir da vírgula decimal, em ambas as direções. (*Exemplo*: 4 607 321,048 72) O espaço pode ser omitido para números de quatro dígitos. (*Exemplo*: 4296 ou 0,0476)

MECÂNICA PARA ENGENHARIA

ESTÁTICA

abdr
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE DIREITOS REPROGRÁFICOS
Respeite o direito autoral

MECÂNICA PARA ENGENHARIA

VOLUME 1

ESTÁTICA

SEXTA EDIÇÃO

J. L. MERIAM

L. G. KRAIGE

Virginia Polytechnic Institute and State University

Tradução e Revisão Técnica

José Roberto Moraes d'Almeida, D.Sc.

Professor da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro — PUC-Rio, Departamento de Engenharia de Materiais
Professor da Universidade do Estado do Rio de Janeiro — UERJ, Departamento de Engenharia Mecânica

Sidnei Paciornik, D.Sc.

Professor da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro — PUC-Rio, Departamento de Engenharia de Materiais

gen | LTC

Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem dos autores a ocorrência de eventuais perdas ou danos a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

ENGINEERING MECHANICS Volume 1 STATICS, Sixth Edition, SI Version
Copyright © 2008 John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved. This translation published under license.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa
Copyright © 2009 by
LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da editora.

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tels.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Capa:
Foto: © Medioimages/Media Bakery
Projeto: David Levy
Editoração Eletrônica: Performa

Sobre a capa: O Arco Gateway, em Saint Louis, foi inicialmente concebido pelo arquiteto Eero Saarinen no final dos anos 1940. Posteriormente, um grupo de engenheiros liderados por John Dinkeloo concebeu mais detalhes do projeto e a construção foi terminada em 1965. A forma do arco, de 192 m de altura, é a de uma *catenária em equilíbrio*. Essa configuração pôde ser obtida suspendendo-se um cabo flexível não-uniforme (simetricamente mais pesado próximo às suas extremidades) a partir de dois pontos em uma linha horizontal, "congelando" essa forma e invertendo-a.

Editoração Eletrônica: Focus

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.

M532m
v.1

Meriam, J. L. (James L.), 1917-2000
Mecânica para engenharia : estática, volume 1 / J. L. Meriam, L. G. Kraige ; tradução e revisão técnica José Roberto Moraes d'Almeida, Sidnei Paciornik. - [Reimpr.]. - Rio de Janeiro : LTC, 2011.
2v.

Tradução de: Engineering mechanics, volume 1 statics, 6th ed
ISBN 978-85-216-1718-1 (v.1)

1. Engenharia mecânica. I. Kraige, L. G. (L. Glenn). II. Título.

09-3850. CDD: 621
CDU: 621

INTRODUÇÃO

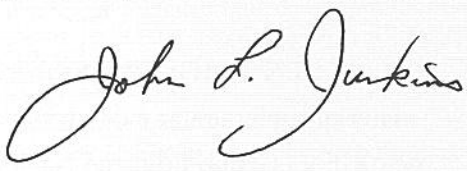
Esta série de livros-texto foi iniciada em 1951 pelo falecido Dr. James L. Meriam. Naquela época, estes livros representaram uma transformação revolucionária no ensino de mecânica para a graduação. Eles se tornaram os livros-texto definitivos pelas décadas seguintes, como também modelos para outros textos de engenharia mecânica, que surgiram posteriormente. Publicada com títulos ligeiramente diferentes anteriores às primeiras edições de 1978, esta série de livros-texto sempre se caracterizou pela organização lógica e pela apresentação clara e rigorosa da teoria, com exemplos instrutivos e uma rica exposição de problemas da vida real, todos com ilustrações de alto padrão. Além das versões em unidades do sistema americano, os livros foram publicados em versões com o Sistema Internacional — SI e foram traduzidos para muitos idiomas. Coletivamente, esses textos representam uma referência internacional para graduação em mecânica.

As inovações e contribuições do Dr. Meriam (1917-2000) no campo da engenharia mecânica não podem ser subestimadas. Foi um dos principais educadores de engenharia da segunda metade do século XX, obteve seu bacharelado em engenharia, seu mestrado em engenharia e seu doutorado na Yale University. Cedo, teve experiência industrial na Pratt and Whitney Aircraft e na General Electric Company. Durante a Segunda Guerra Mundial serviu na Guarda Costeira americana. Foi Professor da University of California, em Berkeley, Decano de engenharia na Duke University, Professor da California Polytechnic State University, em San Luis Obispo, e Professor visitante na University of California, em Santa Barbara. Aposentou-se, finalmente, em 1990. O Professor Meriam sempre se dedicou ao ensino e isso foi reconhecido por seus alunos em todos os lugares que ele lecionou. Em 1963, em Berkeley, foi o primeiro a receber o Outstanding Faculty Award da Tau Beta Pi, concedido principalmente devido à excelência no ensino. Em 1978, recebeu o Distinguished Educator Award for Outstanding Service to Engineering Mechanics Education da American Society for Engineering Education (ASEE) e, em 1992, recebeu o Benjamin Garver Lamme Award, que é o prêmio nacional anual mais importante da ASEE.

O Dr. L. Glenn Kraige, co-autor da série *Mecânica para Engenharia* desde o início dos anos 1980, também deu contribuições significativas para a educação em mecânica. O Dr. Kraige obteve seu bacharelado, seu mestrado e seu doutorado em ciências na University of Virginia, com ênfase em engenharia aeroespacial e, atualmente, é Professor de Mecânica e Ciência para Engenharia na Virginia Polytechnic Institute and State University. Em meados dos anos 1970, tive o prazer de presidir a banca de pós-graduação do Professor Kraige e tenho particular orgulho do fato de ele ter sido o primeiro dentre as minhas três dúzias de orientador de doutorado. O Professor Kraige foi convidado pelo Professor Meriam a se juntar a ele e, com isso, garantir que o legado de excelência na autoria de livros-texto de Meriam fosse levado adiante para futuras gerações. Nas duas últimas décadas e meia, essa equipe altamente bem-sucedida teve um impacto global e enorme na educação de várias gerações de engenheiros.

Além de sua pesquisa e publicações amplamente reconhecidas no campo de dinâmica aeroespacial, o Professor Kraige dedicou sua atenção ao ensino da mecânica tanto em níveis introdutórios quanto avançados. Sua excelência no ensino tem sido largamente reconhecida e o levou a receber prêmios de ensino em níveis de departamento, faculdade, universidade, estado, região e país. Esses prêmios incluem o Francis J. Maher Award por excelência em educação no Department of Engineering Science and Mechanics, o Wine Award por excelência em ensino universitário e o Outstanding Educator Award do State Council of Higher Education for the Commonwealth of Virginia. Em 1996, a Divisão de Mecânica da ASEE concedeu-lhe o Archie Higdon Distinguished Educator Award. A Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching e o Council for Advancement and Support of Education conferiram-lhe a distinção de Professor do Ano da Virginia em 1997. Em seus ensinamentos, o Professor Kraige valoriza o desenvolvimento da capacidade analítica, juntamente com o aprofundamento do discernimento físico e bom senso de engenharia. Desde o início dos anos 1980, trabalhou no projeto de softwares para computadores pessoais, para melhorar o processo de ensino/aprendizagem em estática, dinâmica, resistência dos materiais e áreas especializadas de dinâmica e vibrações.

A Sexta Edição de *Mecânica para Engenharia* continua com o mesmo alto padrão das edições anteriores e acrescenta novos recursos de ajuda e estímulo aos estudantes. Contém um vasto conjunto de problemas interessantes e instrutivos. Os professores e estudantes que tiverem o privilégio de ensinar ou estudar usando o livro *Mecânica para Engenharia*, dos Professores Meriam e Kraige, se beneficiarão de várias décadas de dedicação de dois educadores altamente competentes. Seguindo o padrão das edições anteriores, este livro-texto enfatiza a aplicação da teoria em situações reais de engenharia e, nessa importante tarefa, continua a ser o melhor.



John L. Junkins
Distinguished Professor de Engenharia Aeroespacial
Titular da Cátedra George J. Eppright de Ensino em Engenharia
Texas A&M University
College Station, Texas

Material Suplementar

Este livro conta com materiais suplementares.

O acesso é gratuito, bastando que o leitor se cadastre em http://gen-io.grupogen.com.br.

GEN | Informação Online

GEN-IO (GEN | Informação Online) é o repositório de material suplementar e de serviços relacionados com livros publicados pelo GEN | Grupo Editorial Nacional, o maior conglomerado brasileiro de editoras do ramo científico-técnico-profissional, composto por Guanabara Koogan, Santos, LTC, Forense, Método e Forense Universitária.

PREFÁCIO

A mecânica é tanto um fundamento quanto uma estrutura para a maior parte dos ramos da engenharia. Muitos dos temas em áreas como engenharia civil, mecânica, aeroespacial e agronômica e, obviamente, a mecânica em si se baseiam em tópicos de estática e dinâmica. Mesmo em uma área tal como engenharia elétrica, os profissionais, em uma situação prática, ao considerar os componentes elétricos de um dispositivo robótico ou um processo de fabricação, podem ter que lidar primeiramente com a mecânica envolvida.

Assim, a seqüência da mecânica é crucial em currículos de engenharia. Essa seqüência não é apenas necessária por si só, mas os cursos de mecânica para engenharia também servem para solidificar a compreensão do estudante em outros temas importantes, incluindo matemática aplicada, física e representação gráfica. Além disso, estes cursos servem como ambientes excelentes para reforçar a habilidade de solucionar problemas.

FILOSOFIA

O objetivo fundamental do estudo da mecânica na engenharia é desenvolver a capacidade de prever os efeitos de forças e movimentos ao desempenhar as funções criativas de projeto de engenharia. Esta capacidade requer mais do que o simples conhecimento dos princípios físicos e matemáticos da mecânica; também é requerida a habilidade de visualizar configurações físicas em termos de materiais reais, restrições verdadeiras e limitações práticas que norteiam o comportamento de máquinas e estruturas. Um dos principais objetivos em um curso de mecânica é ajudar o estudante a desenvolver esta habilidade para visualizar, o que é essencial para a formulação dos problemas. De fato, a construção de um modelo matemático significativo é freqüentemente uma experiência mais importante do que sua solução. O progresso máximo é alcançado quando os princípios e suas limitações são aprendidos em conjunto, dentro do contexto da aplicação em engenharia.

Na apresentação da mecânica existe uma tendência freqüente de usar principalmente problemas como um veículo para ilustrar a teoria, em vez de desenvolver a teoria com o objetivo de resolver problemas. Quando a primeira visão é predominante, os problemas tendem a ficar exageradamente idealizados e sem relação com a engenharia, fazendo com que os exercícios se tornem maçantes, acadêmicos e desinteressantes. Este enfoque priva o estudante da valiosa experiência na formulação de problemas e, portanto, de descobrir a necessidade e o significado da teoria. O segundo tipo de visão oferece, sem dúvida, o motivo mais forte para o aprendizado da teoria, e leva a um melhor equilíbrio entre teoria e aplicação. Não se pode enfatizar em excesso o papel crucial representado pelo interesse e objetivo como a motivação mais forte possível para o aprendizado.

Além disso, como educadores em mecânica, deveríamos reforçar a compreensão de que, na melhor das hipóteses, a teoria só pode se aproximar do mundo real da mecânica ao invés da visão de que o mundo real se aproxima da teoria. Esta diferença em filosofia é, na verdade, básica e distingue a *engenharia* da mecânica da *ciência* da mecânica.

Ao longo das últimas décadas ocorreram diversas tendências inadequadas no ensino de engenharia. Primeiramente, a ênfase nos significados geométrico e físico dos pré-requisitos matemáticos parece haver diminuído. Em segundo lugar, houve uma redução significativa e mesmo a eliminação do ensino de gráficos que, no passado, realçavam a visualização e a representação de problemas em mecânica. Em terceiro lugar, com a evolução do nível matemático de nosso tratamento da mecânica, ocorreu uma tendência de permitir que a manipulação da notação em operações vetoriais mascarasse ou substituísse a visualização geométrica. A mecânica é, inerentemente, um assunto que depende da percepção geométrica e física e deveríamos aumentar nossos esforços para desenvolver esta habilidade.

Uma nota especial sobre o uso de computadores se faz necessária. A experiência na formulação de problemas, em que o raciocínio e o julgamento são desenvolvidos, é muitíssimo mais importante para o estudante do que o exercício de manipulação para chegar à solução. Por esta razão, o uso do computador deve ser cuidadosamente controlado. Atualmente, é melhor usar lápis e papel para construir diagramas de corpo livre e formular as equações que regem o problema. Por outro lado, existem situações nas quais a *solução* das equações que regem o problema pode ser mais bem obtida e apresentada com o uso do computador. Problemas para resolução com auxílio do computador devem ser genuínos no sentido de que existe uma condição de projeto ou de criticalidade a ser encontrada, em vez de problemas "braçais" nos quais algum parâmetro é variado sem outra razão aparente do que forçar o uso artificial do computador. Esses pensamentos foram mantidos em mente durante o desenvolvimento dos problemas a serem resolvidos com o auxílio do computador na Sexta Edição. Para reservar tempo adequado para a formulação de problemas, sugere-se passar ao estudante apenas um número limitado de problemas para resolução com auxílio de computador.

Como em edições anteriores, esta Sexta Edição de *Mecânica para Engenharia* está escrita com a filosofia anterior em mente. Ela é direcionada prioritariamente para o primeiro curso de engenharia em mecânica, normalmente ensinado no segundo ano de estudo. *Mecânica para Engenharia* está escrito em um estilo ao mesmo tempo conciso e amigável. A ênfase principal é em princípios e métodos básicos no lugar de um sem-número de casos especiais. Um grande esforço foi

feito para mostrar tanto a coesão das relativamente poucas idéias fundamentais como a grande variedade de problemas que estas poucas idéias irão resolver.

Características Pedagógicas

A estrutura básica deste livro-texto consiste em uma seção que trata rigorosamente do assunto específico em questão, com um ou mais Exemplos, que são seguidos por um grupo de Problemas. Há uma Revisão do Capítulo, ao final dele, que resume os principais pontos, seguida de um conjunto de Problemas de Revisão.

Problemas

Os 86 Exemplos aparecem sobre um fundo sombreado. As soluções de problemas típicos de estática são apresentadas em detalhe. Além disso, notas explicativas e de alerta (Sugestões Úteis) são numeradas e relacionadas à apresentação principal.

Existem 1.020 exercícios, dos quais aproximadamente 50% são novos na Sexta Edição. Os conjuntos de problemas são divididos em *Problemas Introdutórios* e *Problemas Representativos*. A primeira seção consiste em problemas simples e sem dificuldades, destinados a ajudar o estudante a ganhar confiança com o novo assunto, enquanto a maioria dos problemas da segunda seção é de dificuldade e extensão médias. Os problemas estão geralmente organizados em ordem de dificuldade crescente. Exercícios mais difíceis aparecem próximos ao final dos *Problemas Representativos* e são marcados com o símbolo ▶. *Problemas para Resolução com o Auxílio do Computador*, marcados com um asterisco, aparecem em uma seção especial na conclusão dos *Problemas de Revisão* ao final de cada capítulo. São dadas as respostas para todos os problemas de número ímpar e para todos os problemas difíceis.

As unidades SI são usadas em todo o livro, exceto em um número limitado de áreas introdutórias nas quais as unidades do sistema americano são mencionadas com o propósito de generalização e de comparação com as unidades SI.

Uma característica notável da Sexta Edição, como de todas as edições anteriores, é a riqueza de problemas interessantes e importantes que são aplicáveis a projetos de engenharia. Independente de serem ou não diretamente identificados como tal, virtualmente todos os problemas lidam com princípios e procedimentos inerentes ao projeto e análise de estruturas de engenharia e de sistemas mecânicos.

Ilustrações

Todos os elementos fundamentais de ilustrações técnicas, que têm sido uma parte essencial desta série de livros-texto em *Mecânica para Engenharia*, foram mantidos. O autor deseja reafirmar a convicção de que um alto padrão de ilustração é fundamental para qualquer trabalho escrito no campo da mecânica.

Novas Características desta Edição

Embora mantendo as características especiais de todas as edições anteriores, incorporamos estas melhorias:

- Todas as seções teóricas foram reexaminadas para maximizar o rigor, a clareza, a legibilidade e o nível de simplicidade.
- Áreas com Conceitos-chave foram especialmente marcadas e destacadas na apresentação da teoria.
- As Revisões dos Capítulos foram destacadas e contêm resumos dispostos em itens.
- Aproximadamente 50% dos problemas são novos nessa Sexta Edição. Todos os problemas novos foram resolvidos independentemente para assegurar um alto grau de precisão.
- Novos Exemplos foram adicionados, incluindo aqueles com soluções a serem obtidas com auxílio do computador.
- Todos os Exemplos são destacados com um fundo sombreado para rápida identificação.
- Fotografias foram adicionadas aos capítulos com o objetivo de fornecer uma conexão complementar com situações reais, nas quais a estática desempenha um papel principal.

Organização

No Capítulo 1, são estabelecidos os conceitos fundamentais necessários para o estudo de mecânica.

No Capítulo 2, as propriedades de forças, momentos, binários e resultantes são desenvolvidas de forma que o estudante possa seguir diretamente para o equilíbrio de sistemas de forças não concorrentes no Capítulo 3, sem sobrecarregar desnecessariamente o problema relativamente trivial do equilíbrio de forças concorrentes atuando em uma partícula.

Tanto no Capítulo 2 como no 3, a análise de problemas bidimensionais é apresentada na Seção A antes que problemas tridimensionais sejam tratados na Seção B. Com este arranjo, o professor pode cobrir todo o Capítulo 2 antes de começar o Capítulo 3 sobre equilíbrio, ou pode cobrir os dois capítulos na ordem 2A, 3A, 2B, 3B. Essa última ordem trata os sistemas de forças e o equilíbrio em duas dimensões e depois trata esses tópicos em três dimensões.

A aplicação dos princípios do equilíbrio a treliças simples e a suportes e máquinas é apresentada no Capítulo 4, com atenção básica aos sistemas bidimensionais. Um número suficiente de exemplos tridimensionais é incluído para permitir que os estudantes exercitem ferramentas mais gerais da análise vetorial.

Os conceitos e categorias de forças distribuídas são introduzidos no começo do Capítulo 5, com o restante do capítulo dividido em duas seções principais. A Seção A trata de centróides e centros de massa; exemplos detalhados são apresentados para ajudar os estudantes a dominar desde logo aplicações de cálculo a problemas físicos e geométricos. A Seção B inclui os tópicos especiais de vigas, cabos flexíveis e forças em fluidos, que podem ser omitidos sem perda de continuidade dos conceitos básicos.

O Capítulo 6, que trata de atrito, é dividido na Seção A, sobre o fenômeno do atrito a seco, e na Seção B, sobre aplicações selecionadas em máquinas. Apesar de a Seção B poder ser omitida se o tempo for curto, este material dá ao estudante uma experiência valiosa, ao lidar com forças de atrito tanto concentradas quanto distribuídas.

O Capítulo 7 apresenta uma introdução compacta ao trabalho virtual, com aplicações limitadas a sistemas com um único grau de liberdade. Ênfase especial é dada à vantagem do método do trabalho virtual e da energia em sistemas interligados e na determinação da estabilidade. O trabalho virtual oferece uma excelente oportunidade para convencer o estudante do poder da análise matemática em mecânica.

Momentos e produtos de inércia de áreas são apresentados no Apêndice A. Este tópico ajuda a unir os assuntos de

estática e mecânica dos sólidos. O Apêndice C contém uma revisão resumida de tópicos selecionados em matemática elementar, assim como diversas técnicas numéricas que o estudante deve estar preparado para usar em problemas resolvidos com auxílio de computador. Tabelas úteis de constantes físicas, centróides e momentos de inércia aparecem no Apêndice D.

Agradecimentos

Um reconhecimento especial é devido ao Dr. A. L. Hale, que trabalhou anteriormente na Bell Telephone Laboratories, pela sua contínua contribuição na forma de sugestões valiosas e na revisão precisa do manuscrito. O Dr. Hale prestou serviços semelhantes em todas as versões anteriores desta série de livros de mecânica, desde os anos 1950. Ele revê todos os aspectos dos livros, incluindo todos os textos e figuras, novos e antigos. O Dr. Hale obtém uma solução independente em cada novo exercício e fornece ao autor sugestões e as correções necessárias às soluções que aparecem no *Manual do Professor*.* O Dr. Hale é reconhecido por ser muito acurado em seu trabalho e seu conhecimento refinado da língua inglesa é uma grande vantagem, que ajuda cada usuário deste livro-texto. Além de suas contribuições normais, o Dr. Hale foi o revisor principal desta Sexta Edição.

Eu gostaria de agradecer aos professores do Department of Engineering Science and Mechanics da VPI&SU, que oferecem regularmente sugestões construtivas. Esses professores incluem Scott L. Hendricks, Saad A. Ragab, Norman E. Dowling, Michael W. Hyer e J. Wallace Grant. As contribuições de William J. Palm, III, da University of Rhode Island para a Quinta Edição são novamente reconhecidas com gratidão. Além disso, reconhecemos a contribuição a esse projeto de livros-texto, ao longo de muitos anos, de minha assistente por 30 anos, Vanessa McCoy.

As pessoas a seguir (listadas em ordem alfabética do sobrenome) forneceram comentários sobre a Quinta Edição, revisaram partes da Sexta Edição ou contribuíram de outro modo para a Sexta Edição:

Michael Ales, *U.S. Merchant Marine Academy*
Joseph Arumala, *University of Maryland Eastern Shore*
Eric Austin, *Clemson University*
Stephen Bechtel, *Ohio State University*
Peter Birkemoe, *University of Toronto*
Achala Chatterjee, *San Bernardino Valley College*
Yi-chao Chen, *University of Houston*
Mary Cooper, *Cal Poly San Luis Obispo*
Mukaddes Darwish, *Texas Tech University*
Kurt DeGoede, *Elizabethtown College*
John DesJardins, *Clemson University*
Larry DeVries, *University of Utah*
Craig Downing, *Southeast Missouri State University*
William Drake, *Missouri State University*
Raghu Echempati, *Kettering University*
Amelito Enriquez, *Canada College*
Sven Esche, *Stevens Institute of Technology*
Wallace Franklin, *U.S. Merchant Marine Academy*
Barry Goodno, *Georgia Institute of Technology*
Robert Harder, *George Fox University*
Javier Hasbun, *University of West Georgia*
Javad Hashemi, *Texas Tech University*
Scott Hendricks, *Virginia Tech*
Robert Hyers, *University of Massachusetts, Amherst*
Matthew Ikle, *Adams State College*
Duane Jardine, *University of New Orleans*
Qing Jiang, *University of California, Riverside*
Jennifer Kadlowec, *Rowan University*
Robert Kern, *Milwaukee School of Engineering*
John Krohn, *Arkansas Tech University*
Keith Lindler, *United States Naval Academy*
Francisco Manzo-Robledo, *Washington State University*
Geraldine Milano, *New Jersey Institute of Technology*
Saeed Niku, *Cal Poly San Luis Obispo*
Wilfrid Nixon, *University of Iowa*
Karim Nohra, *University of South Florida*
Vassilis Panoskaltsis, *Case Western Reserve University*
Chandra Putcha, *California State University, Fullerton*
Blayne Roeder, *Purdue University*
Eileen Rossman, *Cal Poly San Luis Obispo*
Nestor Sanchez, *University of Texas, San Antonio*
Scott Schiff, *Clemson University*
Sergey Smirnov, *Texas Tech University*
Ertugrul Taciroglu, *UCLA*
Constantine Tarawneh, *University of Texas*
John Turner, *University of Wyoming*
Mohammed Zikry, *North Carolina State University*

As contribuições da equipe da John Wiley & Sons, Inc., incluindo o Editor Joe Hayton, os Editores Seniores de Produção Lisa Wojcik e Sujin Hong, o Projetista Sênior Kevin Murphy, o Editor Sênior de Ilustrações Sigmund Malinowski e a Editora Sênior de Fotografia Lisa Gee, refletem um alto grau de competência profissional e são devidamente reconhecidas. Eu desejo reconhecer especialmente os esforços decisivos de produção de Christine Cervoni da Camelot Editorial Services, LLC. Os talentosos ilustradores da Precision Graphics continuam a manter um alto padrão de excelência em ilustração.

Finalmente, gostaria de explicitar a contribuição extremamente significativa de minha família. Além de demonstrar paciência e apoio a este projeto, minha mulher Dale gerenciou a preparação do manuscrito para a Sexta Edição e foi pessoa fundamental na verificação de todas as etapas das provas. Além disso, meu filho David contribuiu com idéias, ilustrações e soluções para diversos problemas.

Estou extremamente satisfeito em participar do prolongamento no tempo de vida desta série de livros-texto até bem além da marca dos 50 anos. Com o intuito de oferecer a você os melhores materiais educacionais possíveis ao longo dos próximos anos, eu encorajo e acolho todos os comentários e sugestões. Por favor, envie seus comentários para kraige@vt.edu.

L. Glenn Kraige

Blacksburg, Virginia

*Material de uso exclusivo de professores. (N.E.)

Comentários e Sugestões

Apesar dos melhores esforços dos autores, dos tradutores, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Os comentários dos leitores podem ser encaminhados à LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, no endereço: Travessa do Ouvidor, 11 — Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040 ou ao endereço eletrônico ltc@grupogen.com.br.

Sumário

Capítulo 1

Introdução à Estática 3

1/1 Mecânica 3
1/2 Conceitos Básicos 3
1/3 Escalares e Vetores 4
1/4 Leis de Newton 5
1/5 Unidades 6
1/6 Lei da Gravitação 8
1/7 Precisão, Limites e Aproximações 9
1/8 Resolução de Problemas em Estática 9
1/9 Revisão do Capítulo 12

Capítulo 2

Sistemas de Forças 17

2/1 Introdução 17
2/2 Força 17

SEÇÃO A SISTEMAS DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS 20

2/3 Componentes Retangulares 20
2/4 Momento 29
2/5 Binário 37
2/6 Resultantes 43

SEÇÃO B SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS 49

2/7 Componentes Retangulares 49
2/8 Momento e Binário 56
2/9 Resultantes 66
2/10 Revisão do Capítulo 74

Capítulo 3

Equilíbrio 81

3/1 Introdução 81

SEÇÃO A EQUILÍBRIO EM DUAS DIMENSÕES 81

3/2 Isolamento de um Sistema e o Diagrama de Corpo Livre 81
3/3 Condições de Equilíbrio 89

SEÇÃO B EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES 106

3/4 Condições de Equilíbrio 106
3/5 Revisão do Capítulo 119

Capítulo 4

Estruturas 127

4/1 Introdução 127
4/2 Treliças Planas 127
4/3 Método dos Nós 130
4/4 Método das Seções 139
4/5 Treliças Espaciais 145
4/6 Suportes e Máquinas 150
4/7 Revisão do Capítulo 166

Capítulo 5

Forças Distribuídas 173

5/1 Introdução 173

SEÇÃO A CENTROS DE MASSA E CENTRÓIDES 174

5/2 Centro de Massa 174
5/3 Centróides de Linhas, Áreas e Volumes 176
5/4 Corpos Compostos e Figuras; Aproximações 190
5/5 Teoremas de Pappus 197

SEÇÃO B TÓPICOS ESPECIAIS 202

5/6 Vigas – Efeitos Externos 202
5/7 Vigas – Efeitos Internos 207
5/8 Cabos Flexíveis 216
5/9 Fluido-Estática 225
5/10 Revisão do Capítulo 238

Capítulo 6

Atrito 245

6/1 Introdução 245

SEÇÃO A FENÔMENOS ENVOLVENDO ATRITO 245

6/2 Tipos de Atrito 245
6/3 Atrito a Seco 246

SEÇÃO B APLICAÇÕES DE ATRITO EM MÁQUINAS 260

6/4 Cunhas 260
6/5 Parafusos 262
6/6 Mancais Radiais 268
6/7 Mancais de Escora; Atrito em Discos 268
6/8 Correias Flexíveis 273
6/9 Resistência ao Rolamento 274
6/10 Revisão do Capítulo 279

Capítulo 7

Trabalho Virtual 287

7/1 Introdução 287
7/2 Trabalho 287
7/3 Equilíbrio 289
7/4 Energia Potencial e Estabilidade 302
7/5 Revisão do Capítulo 313

Apêndices

APÊNDICE A
MOMENTOS DE INÉRCIA DE ÁREA 319
A/1 Introdução 319
A/2 Definições 320
A/3 Áreas Compostas 329
A/4 Produtos de Inércia e Rotação de Eixos 334

APÊNDICE B
MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA 344

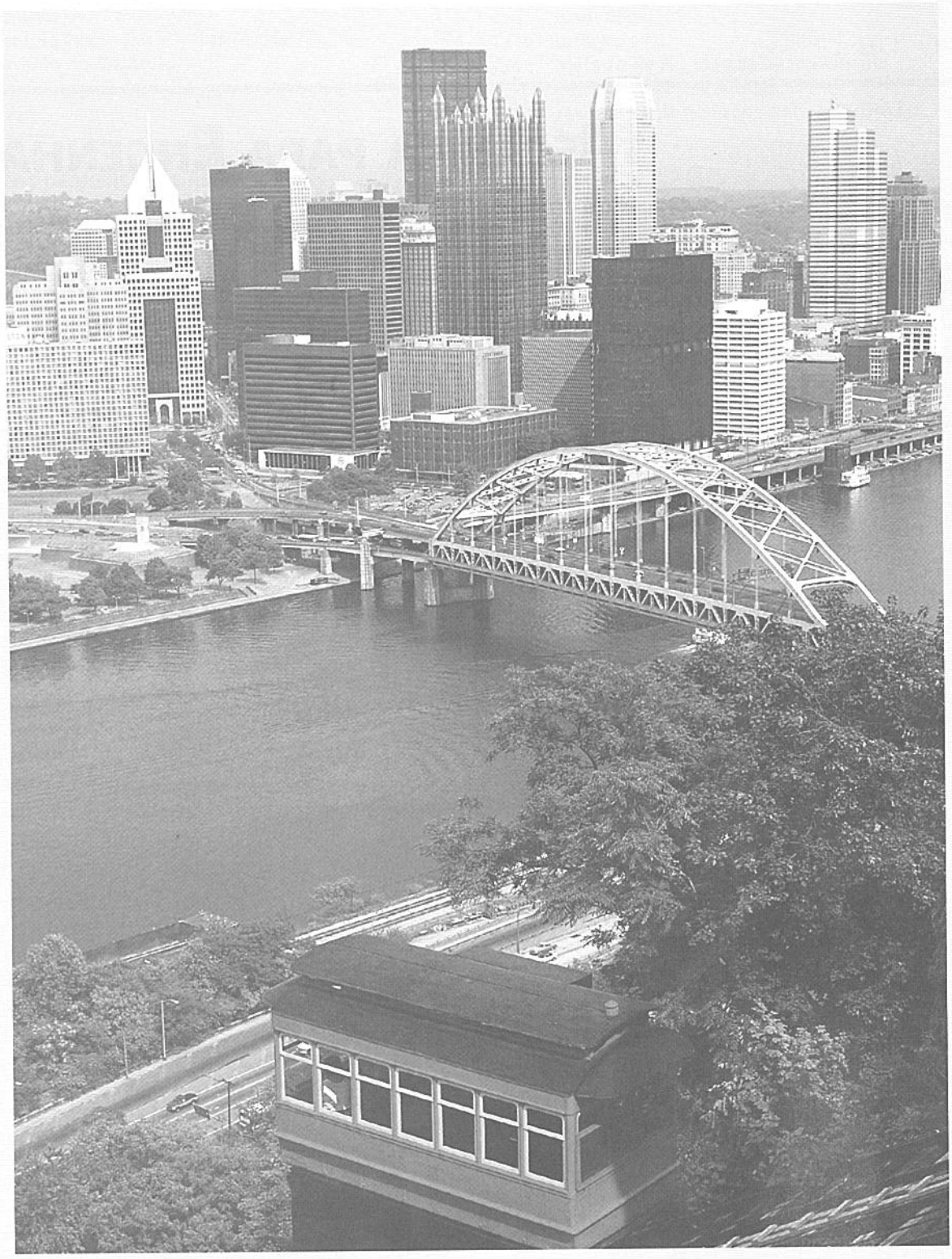
APÊNDICE C
TÓPICOS SELECIONADOS EM MATEMÁTICA 345
C/1 Introdução 345
C/2 Geometria Plana 345
C/3 Geometria Sólida 345
C/4 Álgebra 345
C/5 Geometria Analítica 346
C/6 Trigonometria 347
C/7 Operações Vetoriais 347
C/8 Séries 349
C/9 Derivadas 349
C/10 Integrais 349
C/11 Método de Newton para Resolução de Equações Intratáveis 350
C/12 Técnicas Selecionadas para Integração Numérica 351

APÊNDICE D
TABELAS ÚTEIS 354
Tabela D/1 Propriedades Físicas 354
Tabela D/2 Constantes do Sistema Solar 355
Tabela D/3 Propriedades de Figuras Planas 356
Tabela D/4 Propriedades de Sólidos Homogêneos 358

ÍNDICE 362

MECÂNICA PARA ENGENHARIA

ESTÁTICA



©Digital Stock/Corbis Images

Estruturas que suportam grandes forças devem ser projetadas com os princípios da mecânica em mente. Nesta vista de Pittsburgh, podem-se ver diversos exemplos de tais estruturas.

1 Introdução à Estática

DESCRIÇÃO DO CAPÍTULO

1/1 Mecânica
1/2 Conceitos Básicos
1/3 Escalares e Vetores
1/4 Leis de Newton
1/5 Unidades
1/6 Lei da Gravitação
1/7 Precisão, Limites e Aproximações
1/8 Resolução de Problemas em Estática
1/9 Revisão do Capítulo

1/1 Mecânica

A mecânica é a ciência física que lida com os efeitos de forças sobre objetos. Nenhum outro tema tem um papel maior nas análises de engenharia que a mecânica. Embora os princípios da mecânica sejam poucos, eles têm ampla aplicação na engenharia, por serem centrais na pesquisa e no desenvolvimento nos campos de vibrações, estabilidade e resistência de estruturas e máquinas, robótica, projeto de foguetes e naves espaciais, controle automático, desempenho de motores, escoamento de fluidos, máquinas e equipamentos elétricos, e comportamento molecular, atômico e subatômico. Um entendimento completo deste tópico é um pré-requisito essencial para trabalhar nestes e em muitos outros campos.

A mecânica é a mais antiga das ciências físicas. A história inicial deste tema é sinônimo dos primórdios da engenharia. Os primeiros escritos conhecidos em mecânica são os de Arquimedes (287-212 a.C.) sobre o princípio da alavanca e o princípio da flutuação. Um progresso substancial ocorreu posteriormente com a formulação das leis de combinação vetorial de forças por Stevinus (1548-1620), que também formulou a maioria dos princípios da estática. A primeira investigação de um problema de dinâmica é atribuída a Galileu (1564-1642), com seus experimentos sobre quedas de pedras. A formulação exata das leis do movimento, como também a lei da gravitação, foi desenvolvida por Newton (1642-1727), que também concebeu a idéia do infinitesimal na análise matemática. Contribuições substanciais ao desenvolvimento da mecânica também foram feitas por da Vinci, Varignon, Euler, D'Alembert, Lagrange, Laplace e outros.

Neste livro trataremos tanto do desenvolvimento dos princípios da mecânica quanto de suas aplicações. Os princípios da mecânica, enquanto uma ciência, são rigorosamente expressos em termos matemáticos, e, assim, a matemática tem um papel importante na aplicação destes princípios para a solução de problemas práticos.

O conteúdo da mecânica é dividido de um modo lógico em duas partes: ***estática***, que trata do equilíbrio de corpos sob a ação de forças, e ***dinâmica***, que trata do movimento de corpos. A série *Mecânica para Engenharia* é dividida nestas duas partes, *Vol.1 Estática* e *Vol.2 Dinâmica*.

© S. terry/ Photo Researchers, Inc.

Sir Isaac Newton

1/2 Conceitos Básicos

Os conceitos e definições a seguir são básicos para o estudo de mecânica e devem ser entendidos desde o início.

Espaço é a região geométrica ocupada por corpos cujas posições são descritas por medidas lineares e angulares relativamente a um sistema de coordenadas. Para problemas tridimensionais são necessárias três coordenadas independentes. Para problemas bidimensionais, apenas duas coordenadas são necessárias.

Tempo é a medida de uma sucessão de eventos e é uma grandeza básica em dinâmica. O tempo não está diretamente envolvido na análise dos problemas de estática.

Massa é uma medida da inércia de um corpo, que é a sua resistência a uma variação de velocidade. A massa pode também ser entendida como a quantidade de matéria em um corpo. A massa de um corpo afeta a força de atração gravitacional entre ele e outros corpos. Esta força surge em muitas aplicações em estática.

Força é a ação de um corpo sobre outro. Uma força tende a mover um corpo na direção de sua ação. A ação de uma força é caracterizada por seu *valor*, pela *direção* de sua ação e pelo seu *ponto de aplicação*. Assim, força é uma grandeza vetorial, e suas propriedades estão discutidas em detalhe no Capítulo 2.

Uma ***partícula*** é um corpo de dimensões desprezíveis. No sentido matemático, uma partícula é um corpo cujas dimensões são consideradas como sendo aproximadamente nulas, de modo que podemos analisá-la como uma massa concentrada em um ponto. Freqüentemente escolhemos uma partícula como um elemento infinitesimal de um corpo. Podemos tratar um corpo como uma partícula, quando suas dimensões forem irrelevantes para a descrição de sua posição ou para a ação das forças aplicadas a ele.

Corpo rígido. Um corpo é considerado rígido quando a variação da distância entre dois quaisquer de seus pontos é desprezível para os propósitos em questão. Por exemplo, o cálculo da tensão trativa no cabo que suporta a caçamba de um guindaste móvel sob carga é essencialmente independente das pequenas deformações internas nos elementos estruturais do guindaste. Assim, para o propósito de determinação das forças externas que atuam no guindaste, podemos tratá-lo como um corpo rígido. A estática lida primariamente com cálculos de forças externas que atuam em corpos rígidos em equilíbrio. A determinação das deformações internas faz parte do estudo da mecânica dos corpos deformáveis, que normalmente segue a estática no currículo.

1/3 Escalares e Vetores

Usamos grandezas de dois tipos em mecânica – escalares e vetores. *Grandezas escalares* são aquelas às quais é associado apenas um valor. Exemplos de grandezas escalares são tempo, volume, densidade, módulo da velocidade, energia e massa. *Grandezas vetoriais*, por outro lado, possuem direção além de valor, e devem obedecer à lei de adição do paralelogramo como será descrito posteriormente nesta Seção. Exemplos de grandezas vetoriais são deslocamento, velocidade, aceleração, força, momento e quantidade de movimento. O módulo da velocidade é um escalar, enquanto o valor da velocidade é um vetor. Assim, velocidade é especificada por uma direção e por um módulo.

Vetores representando grandezas físicas podem ser classificados como livres, móveis ou fixos.

Um ***vetor livre*** é aquele cuja ação não está confinada ou associada a uma única linha no espaço. Por exemplo, se um corpo se move sem rotação, então o movimento ou o deslocamento de qualquer ponto no corpo pode ser considerado como um vetor. Este vetor descreve igualmente bem a direção e o módulo do deslocamento de todos os pontos no corpo. Assim, podemos representar o deslocamento deste corpo por um vetor livre.

Um ***vetor móvel*** tem uma única linha de ação no espaço, mas não tem um único ponto de aplicação. Por exemplo, quando uma força externa atua em um corpo rígido, a força pode ser aplicada em qualquer ponto ao longo de sua linha de ação sem alterar seu efeito no corpo como um todo* e, assim, ela é um vetor móvel.

*Este é o *princípio da transmissibilidade*, que é discutido na Seção 2/2.

Um ***vetor fixo*** é aquele para o qual um único ponto de aplicação é especificado. A ação de uma força em um corpo deformável, ou não rígido, deve ser especificada por um vetor fixo no ponto de aplicação dessa força. Neste caso, as forças e deformações no corpo dependem do ponto de aplicação da força, bem como de seu módulo e de sua linha de ação.

Convenções para Equações e Diagramas

Uma grandeza vetorial $\mathbf{V}$ é representada por um segmento de linha, Fig. 1/1, que tem a direção do vetor e tem uma ponta de flecha para indicar o sentido. O comprimento do segmento de linha direcionado representa, em alguma escala conveniente, o módulo $|\mathbf{V}|$ do vetor e é indicado pelo símbolo em itálico, V. Por exemplo, podemos escolher uma escala tal que uma flecha de um centímetro de comprimento represente uma força de 20 newtons.

Em equações escalares, e freqüentemente em diagramas onde apenas o valor de um vetor é especificado, o símbolo aparecerá em tipo itálico simples. Um tipo em negrito é usado para grandezas vetoriais sempre que a direção do vetor é uma parte de sua representação matemática. Ao escreverem equações vetoriais, preservem *sempre* a distinção matemática entre vetores e escalares. Em trabalhos manuscritos, usem uma marca diferenciada para cada grandeza vetorial, tal como sublinhar, $\underline{V}$, ou colocar uma seta sobre o símbolo, $\vec{V}$, para substituir o tipo impresso em negrito.

Trabalhando com Vetores

A direção do vetor $\mathbf{V}$ pode ser medida por um ângulo θ a partir de alguma direção de referência conhecida, como mostrado na Fig. 1/1. O negativo de $\mathbf{V}$ é um vetor $-\mathbf{V}$, que tem o mesmo módulo que $\mathbf{V}$, mas está direcionado no sentido oposto a $\mathbf{V}$, como mostrado na Fig. 1/1.

Vetores devem obedecer à lei de combinação do paralelogramo. Esta lei diz que dois vetores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$, tratados como vetores livres, Fig. 1/2*a*, podem ser substituídos por seu vetor equivalente $\mathbf{V}$, que é a diagonal do paralelogramo formado, tendo $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ como lados, como mostrado na Fig. 1/2*b*. Esta combinação é chamada de *soma vetorial*, e é representada pela equação vetorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$$

onde o sinal de mais, quando usado com grandezas vetoriais (em negrito), significa uma adição *vetorial* e não uma adição *escalar*. A adição escalar dos módulos dos dois vetores é escrita da maneira usual como $V_1 + V_2$. A geometria do paralelogramo mostra que $V \neq V_1 + V_2$.

Os dois vetores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$, novamente tratados como vetores livres, também podem ser adicionados unindo a extremidade de um ao início do outro, pela lei dos triângulos, como mostrado na Fig. 1/2*c*, para se obter o mesmo vetor soma $\mathbf{V}$. Ve-

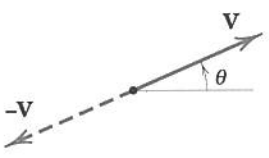


Figura 1/1

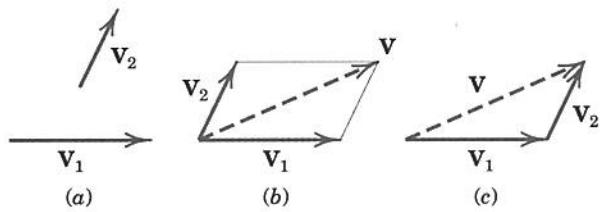


Figura 1/2

mos no diagrama que a ordem da adição dos vetores não afeta sua soma, de modo que $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1$.

A diferença $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ entre os dois vetores é facilmente obtida adicionando-se $-\mathbf{V}_2$ a $\mathbf{V}_1$, como mostrado na Fig. 1/3, onde os procedimentos com o triângulo ou com o paralelogramo podem ser usados. A diferença $\mathbf{V}'$ entre os dois vetores é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$$

onde o sinal de menos significa *subtração vetorial.*

Quaisquer dois ou mais vetores cuja soma seja igual a um determinado vetor $\mathbf{V}$ são chamados de *componentes* deste vetor. Assim, os vetores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ na Fig. 1/4*a* são as componentes de $\mathbf{V}$ nas direções 1 e 2, respectivamente. Normalmente é mais conveniente lidar com componentes vetoriais que sejam mutuamente perpendiculares; estas são chamadas de *componentes retangulares.* Os vetores $\mathbf{V}_x$ e $\mathbf{V}_y$ na Fig. 1/4*b* são, respectivamente, as componentes x e y de $\mathbf{V}$. Da mesma forma, na Fig. 1/4*c*, $\mathbf{V}_{x'}$ e $\mathbf{V}_{y'}$ são as componentes x' e y' de $\mathbf{V}$. Quando expressa em componentes retangulares, a direção do vetor em relação a, digamos, o eixo x, é, claramente, especificada pelo ângulo θ, onde

$$\theta = \tan^{-1}\frac{V_y}{V_x}$$

Um vetor $\mathbf{V}$ pode ser representado matematicamente pela multiplicação de seu módulo V por um vetor $\mathbf{n}$ cuja magnitude vale um e cuja direção coincide com aquela do vetor $\mathbf{V}$. O vetor $\mathbf{n}$ é chamado de *vetor unitário.* Assim,

$$\mathbf{V} = V\mathbf{n}$$

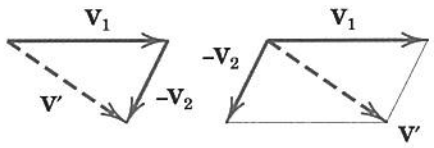


Figura 1/3

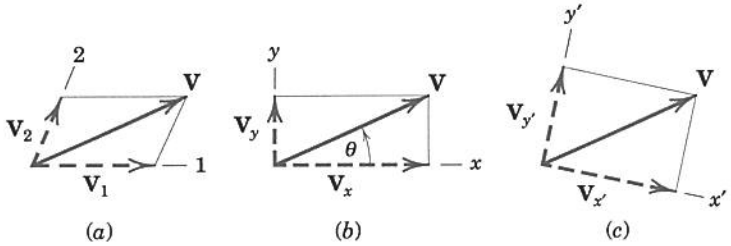


Figura 1/4

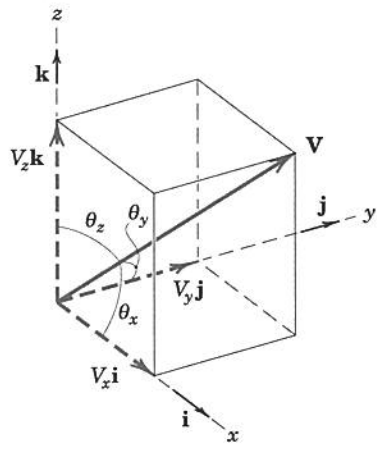


Figura 1/5

Deste modo, tanto a magnitude e a direção do vetor são convenientemente contidas em uma expressão matemática. Em muitos problemas, particularmente aqueles em três dimensões, é conveniente representar as componentes retangulares de $\mathbf{V}$, Fig. 1/5, em termos dos vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, que são vetores com valores unitários, respectivamente, nas direções x, y e z. Dado que o vetor $\mathbf{V}$ é a soma vetorial das componentes nas direções x, y e z, podemos representar $\mathbf{V}$ como se segue:

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$$

Agora usamos os *cossenos diretores* l, m e n de $\mathbf{V}$, que são definidos por

$$l = \cos\theta_x \qquad m = \cos\theta_y \qquad n = \cos\theta_z$$

Assim, podemos escrever os valores das componentes de $\mathbf{V}$ como

$$V_x = lV \qquad V_y = mV \qquad V_z = nV$$

onde, do teorema de Pitágoras,

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

Observe que esta relação implica $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

1/4 Leis de Newton

Sir Isaac Newton foi o primeiro a formular corretamente as leis básicas que governam o movimento de uma partícula e a demonstrar a validade delas.* Ligeiramente adaptadas, usando terminologia moderna, estas leis são:

Primeira Lei. Uma partícula permanece em repouso ou continua a se mover com *velocidade uniforme* (em uma linha

*As formulações originais de Newton podem ser encontradas na tradução de seu *Principia* (1687), revisada por F. Cajori, University of California Press, 1934.

reta com módulo da velocidade constante) se não existir qualquer força em desequilíbrio atuando nela.

Segunda Lei. A aceleração de uma partícula é proporcional à soma vetorial das forças atuando nela, e se dá na direção desta soma vetorial.

Terceira Lei. As forças de ação e reação entre corpos que interagem entre si são iguais em valor, opostas em direção, e *colineares* (elas atuam na mesma linha).

A exatidão destas leis tem sido verificada por incontáveis medidas físicas precisas. A segunda lei de Newton forma a base da maioria das análises em dinâmica. Aplicada a uma partícula de massa m, ela pode ser expressa como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1/1}$$

onde $\mathbf{F}$ é a soma vetorial das forças atuando na partícula e $\mathbf{a}$ é a aceleração resultante. Esta equação é uma equação *vetorial* porque a direção de $\mathbf{F}$ deve seguir a direção de $\mathbf{a}$, e os módulos de $\mathbf{F}$ e $m\mathbf{a}$ devem ser iguais.

A primeira lei de Newton contém o princípio do equilíbrio de forças, que é o principal tópico em estática. Esta lei é, na verdade, uma conseqüência da segunda lei, já que não existe aceleração quando a força é zero, e a partícula ou está em repouso ou está se movendo com velocidade uniforme. A primeira lei não adiciona nada de novo à descrição do movimento, mas está incluída aqui porque foi parte dos enunciados clássicos de Newton.

A terceira lei é básica para o nosso entendimento de força. Ela afirma que as forças sempre ocorrem em pares de forças iguais e opostas. Portanto, a força direcionada para baixo exercida sobre a mesa por um lápis é acompanhada por uma força direcionada para cima de valor igual, exercida pela mesa sobre o lápis. Este princípio é válido para todas as forças, variáveis ou constantes, independentemente de suas origens e para cada instante de tempo durante o qual as forças estão aplicadas. A falta de uma atenção cuidadosa a esta lei básica é causa de erros freqüentes pelos iniciantes.

Na análise de corpos sob a ação de forças é absolutamente necessário ter clareza sobre que força de cada par ação-reação está sendo considerada. É necessário inicialmente *isolar* o corpo em consideração e, então, levar em conta apenas a única força do par que atua *sobre* o corpo em questão.

1/5 Unidades

Em mecânica usamos quatro quantidades fundamentais chamadas *grandezas*. Estas são o comprimento, a massa, a força e o tempo. As unidades usadas para medir estas grandezas não podem ser escolhidas independentemente, porque elas devem ser consistentes com a segunda lei de Newton, Eq. 1/1. Embora existam diversos sistemas de unidades, apenas os dois sistemas mais comumente usados em ciência e tecnologia serão usados neste texto. As quatro grandezas fundamentais e suas unidades e símbolos, nos dois sistemas estão resumidas na tabela a seguir.

Unidades SI

O Sistema Internacional de Unidades, abreviado como SI (do francês, Système International d'Unités), é aceito nos Estados Unidos e em todo o mundo, e é a versão moderna do sistema métrico. Por acordo internacional, com o tempo, as unidades SI substituirão outros sistemas. Como mostrado na tabela, no SI, as unidades quilograma (kg) para massa, metro (m) para comprimento e segundo (s) para tempo são selecionadas como as unidades de base, e o newton (N), para força, é derivado das três anteriores a partir da Eq. 1/1. Assim, força (N) = massa (kg) × aceleração (m/s^2) ou

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg \cdot m/s^2}$$

Assim, 1 newton é a força necessária para acelerar de 1 m/s^2 uma massa de 1 kg.

Considere um corpo de massa m que caia livremente de uma posição próxima à superfície da terra. Com apenas a força da gravidade atuando no corpo, ele cai com uma aceleração g na direção do centro da terra. Esta força gravitacional é o *peso* W do corpo, e pode ser determinada na Eq. 1/1:

$$W\,(\mathrm{N}) = m\,(\mathrm{kg}) \times g\,(\mathrm{m/s^2})$$

Unidades do Sistema Americano

O sistema americano, ou inglês, de unidades, também chamado de sistema FPS (foot-pound-second)[1] tem sido o sistema comum no comércio e na indústria de países de língua inglesa. Embora este sistema vá ser substituído, com o tempo, pelas unidades SI, ainda por muitos anos os engenheiros devem ser capazes de trabalhar tanto com unidades SI quanto com unidades FPS.

Como mostrado na tabela, no sistema americano ou FPS, as unidades de pé (ft) para comprimento, segundo (s) para tempo e libras (lb) para força são selecionadas como as unidades de base, e o slug, para massa, é derivado a partir da Eq. 1/1. Assim, força (lb) = massa (slug) × aceleração (ft/s^2) ou

$$\mathrm{slug} = \frac{\mathrm{lb\text{-}s^2}}{\mathrm{ft}}$$

[1] Pé-libra massa-segundo (N.T.)

GRANDEZA	SÍMBOLO DIMENSIONAL	UNIDADES SI			UNIDADES DO SISTEMA AMERICANO		
			UNIDADE	SÍMBOLO		UNIDADE	SÍMBOLO
Massa	M	Unidades de base	quilograma	kg		*slug*	—
Comprimento	L		metro	m	Unidades de base	pé	ft
Tempo	T		segundo	s		segundo	s
Força	F		newton	N		libra	lb

Assim sendo, 1 slug é a massa que é acelerada de 1 ft/s² quando uma força de 1 lb é aplicada. Se W é a força gravitacional, ou o peso, e g é a aceleração devida à gravidade, a Eq. 1/1 dá

$$m(\text{slugs}) = \frac{W\,(\text{lb})}{g\,(\text{ft/s}^2)}$$

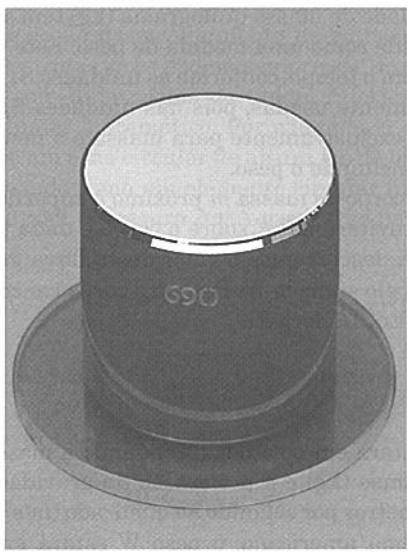
Nas unidades americanas a libra é usada, conforme o caso, como uma unidade de massa, especialmente para especificar propriedades térmicas de líquidos e gases. Quando uma diferenciação entre as duas unidades é necessária, a unidade de força é freqüentemente escrita como lbf e a unidade de massa como lbm. Neste livro usamos quase exclusivamente a unidade de força, que é escrita simplesmente como lb. Outras unidades de força comuns no sistema americano são a *quilolibra* (kip), que é igual a 1000 lb, e a *ton*, que é igual a 2000 lb.

O Sistema Internacional de Unidades (SI) é denominado um sistema *absoluto* porque a medida da quantidade básica de massa é independente do meio. Por outro lado, o sistema americano (FPS) é chamado de *gravitacional* porque sua quantidade básica de força é definida como a atração gravitacional (peso) atuando em uma massa-padrão sob condições especificadas (ao nível do mar e 45° de latitude). Uma libra-padrão é também a força necessária para acelerar uma massa de uma libra de 32,1740 ft/s².

Em unidades SI o quilograma é usado *exclusivamente* como uma unidade de massa – *nunca* de força. No sistema gravitacional MKS (metro, quilograma, segundo), que foi usado por muitos anos em países que não eram de língua inglesa, o quilograma, como a libra, foi usado tanto como unidade de força quanto como unidade de massa.

Padrões Primários

Padrões primários para as medidas de massa, comprimento e tempo foram estabelecidos por acordo internacional e são os seguintes:



Cortesia do Bureau International des Poids et Mesures, França

O padrão do quilo

Massa. O quilograma é definido como a massa de um determinado cilindro de platina-irídio, que é mantido no International Bureau of Weights and Measures próximo a Paris, França. Uma cópia precisa deste cilindro é mantida nos Estados Unidos, no National Institute of Standards and Technology (NIST), anteriormente denominado National Bureau of Standards, e serve como o padrão de massa para os Estados Unidos.

Comprimento. O metro, originalmente definido como a décima milionésima parte da distância do pólo ao equador ao longo do meridiano que passa por Paris, foi posteriormente definido como o comprimento de uma determinada barra de platina-irídio mantida no International Bureau of Weights and Measures. A dificuldade de acessar esta barra e de reproduzir medidas precisas levou à adoção de um padrão de comprimento mais exato e reprodutível para o metro, que é agora definido como valendo 1.650.763,73 comprimentos de onda de uma radiação específica do átomo de criptônio-86.

Tempo. O segundo foi originalmente definido como a fração 1/86400 do dia solar médio. Entretanto, irregularidades na rotação da Terra trouxeram dificuldades a esta definição e um padrão mais exato e reprodutível foi adotado. O segundo é definido agora como a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação de um estado específico do átomo do césio-133.

Para a maioria dos trabalhos de engenharia, e para nosso propósito ao estudar mecânica, a precisão destes padrões está consideravelmente além de nossas necessidades. O valor-padrão para a aceleração gravitacional g é o seu valor ao nível do mar e na latitude de 45°. Nos dois sistemas, estes valores são

$$\text{Unidades SI} \qquad g = 9{,}806\,65\ \text{m/s}^2$$

$$\text{Unidades do sistema americano} \qquad g = 32{,}1740\ \text{ft/s}^2$$

Os valores aproximados de 9,81 m/s² e 32,2 ft/s², respectivamente, são suficientemente precisos para a maioria dos cálculos de engenharia.

Conversão de Unidades

As características das unidades SI estão mostradas no verso da capa deste livro, juntamente com as conversões numéricas entre as unidades SI e do sistema americano. Além disso, escalas fornecendo as conversões aproximadas entre quantidades selecionadas nos dois sistemas aparecem no verso da contracapa para referência. Embora estas escalas sejam úteis para se obter uma noção dos valores relativos das unidades SI e do sistema americano, com o tempo os engenheiros acharão essencial pensar diretamente em termos das unidades SI, sem convertê-las das unidades do sistema americano. Em estática lidamos principalmente com as unidades de comprimento e força, precisando-se da massa apenas quando calculamos a força gravitacional, como explicado anteriormente.

A Fig. 1/6 mostra exemplos de força, massa e comprimento nos dois sistemas de unidades, para ajudar na visualização de seus valores relativos.

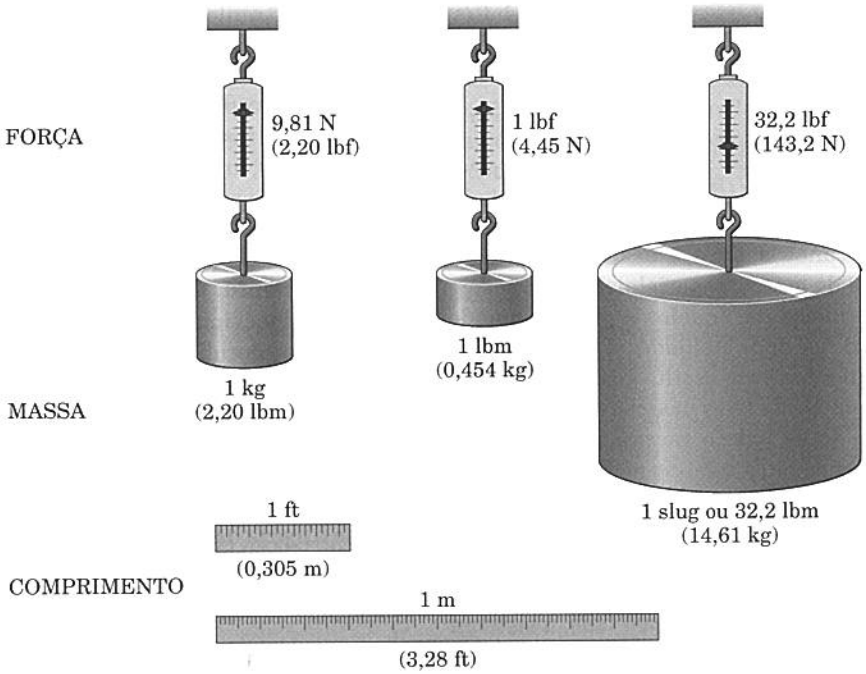


Figura 1/6

1/6 Lei da Gravitação

Em estática, como também em dinâmica, precisamos freqüentemente calcular o peso de um corpo, que é a força gravitacional que atua nele. Este cálculo depende da *lei da gravitação*, que também foi formulada por Newton. A lei da gravitação é dada pela equação

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (1/2)$$

onde F = força de atração mútua entre duas partículas
G = uma constante universal conhecida como a *constante de gravitação*
m_1, m_2 = as massas das duas partículas
r = a distância entre os centros das partículas

As forças mútuas F obedecem à lei de ação e reação, pois elas são iguais e opostas, e estão direcionadas ao longo da linha que une os centros das partículas, como mostrado na Fig. 1/7. A constante gravitacional foi determinada experimentalmente como valendo $G = 6{,}673(10^{-11})\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$.

Atração Gravitacional da Terra

Forças gravitacionais existem entre cada par de corpos. Na superfície da Terra, a única força gravitacional de valor apreciável é a força devida à atração da Terra. Por exemplo, cada uma das duas esferas de ferro com 100 mm de diâmetro é atraída para a terra com uma força gravitacional de 37,1 N, que é o seu peso. Por outro lado, a força de atração mútua entre as esferas, se elas estiverem quase se tocando vale 0,0000000951 N. Esta força é, evidentemente, desprezível em comparação com a atração de 37,1 N da Terra. Conseqüentemente, a atração gravitacional da Terra é a única força gravitacional que precisamos considerar para a maioria das aplicações de engenharia na sua superfície.

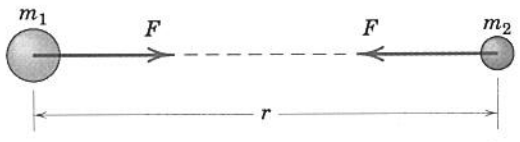


Figura 1/7

A atração gravitacional da Terra sobre um corpo (seu peso) existe quer o corpo esteja em repouso quer esteja em movimento. Devido a esta ser uma força, o peso de um corpo deve ser dado em newtons (N), nas unidades SI, ou em libras (lb), no sistema de unidades americano. Infelizmente, no dia-a-dia, a unidade de massa quilograma (kg) tem sido freqüentemente usada como uma medida de peso. Este uso deve desaparecer com o tempo, conforme as unidades SI se tornarem mais amplamente usadas, pois nas unidades SI o quilograma é usado exclusivamente para massa e o newton é usado para força, incluindo o peso.

Para um corpo de massa m próximo à superfície da Terra, a atração gravitacional F sobre o corpo é dada pela Eq. 1/2. Usualmente, descrevemos o valor desta força gravitacional, ou do peso, pelo símbolo W. Porque o corpo cai com uma aceleração g, a Eq. 1/1 fornece

$$W = mg \qquad (1/3)$$

O peso W estará em newtons (N) quando a massa m estiver em quilogramas (kg) e a aceleração da gravidade g quando estiver em metros por segundo ao quadrado (m/s²). Em unidades do sistema americano, o peso W estará em libras (lb) quando m estiver em slugs e g em pés por segundo ao quadra-

do. Os valores-padrão para g de 9,81 m/s² e 32,2 ft/s² serão suficientemente precisos para nossos cálculos em estática.

O peso verdadeiro (atração gravitacional) e o peso aparente (conforme medido em uma balança) são ligeiramente diferentes. A diferença, que se deve à rotação da Terra, é muito pequena e será desprezada. Este efeito será discutido no *Vol. 2 Dinâmica*.

1/7 Precisão, Limites e Aproximações

O número de algarismos significativos em uma resposta não deve ser maior do que o número de algarismos justificados pela precisão dos dados fornecidos. Por exemplo, suponha que a aresta de uma barra quadrada medindo 24 mm foi medida com precisão de milímetro, de modo que conhecemos o comprimento da aresta com dois algarismos significativos. Elevando o comprimento da aresta ao quadrado obtém-se uma área de 576 mm². Entretanto, de acordo com nossa regra, devemos escrever a área como 580 mm², usando apenas dois algarismos significativos.

Quando os cálculos envolvem diferenças pequenas em valores grandes, é necessária maior exatidão nos dados para obter também uma maior exatidão nos resultados. Assim, por exemplo, é preciso conhecer os números 4,2503 e 4,2391 com uma exatidão de cinco algarismos significativos para expressar sua diferença de 0,0112 com exatidão de três algarismos. Em cálculos longos é freqüentemente difícil saber, de início, quantos algarismos significativos são necessários nos dados originais para assegurar uma determinada exatidão na resposta. Uma exatidão de três algarismos significativos é considerada satisfatória para a maioria dos cálculos em engenharia.

Neste texto, as respostas serão geralmente mostradas com até três algarismos significativos, a menos que a resposta comece com o algarismo 1. Neste caso a resposta será mostrada com até quatro algarismos significativos. Para os propósitos dos cálculos, considere todos os dados neste livro como exatos.

Diferenciais

A *ordem* de quantidades diferenciais causa, freqüentemente, confusão no desenvolvimento de equações. Diferenciais de ordens superiores podem sempre ser desprezadas se comparadas com diferenciais de ordem inferior quando se aproxima o limite matemático. Por exemplo, o elemento de volume ΔV de um cone circular de altura h e de base com raio r pode ser tomado como um elemento circular fino, distando x do vértice e com espessura Δx. A expressão para o volume do elemento é

$$\Delta V = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[x^2\,\Delta x + x(\Delta x)^2 + \tfrac{1}{3}(\Delta x)^3\right]$$

Observe que, ao se fazer o limite, passando-se de ΔV para dV e de Δx para dx, os termos contendo $(\Delta x)^2$ e $(\Delta x)^3$ são desprezados, deixando somente

$$dV = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2\,dx$$

que dá uma expressão exata quando integrada.

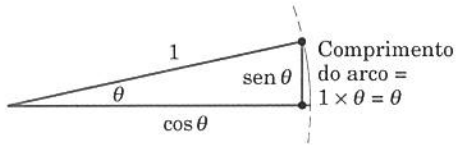


Figura 1/8

Aproximações para Ângulos Pequenos

Quando se lida com ângulos pequenos, podemos normalmente fazer uso de aproximações simplificadoras. Considere o triângulo retângulo da Fig. 1/8, onde o ângulo θ, expresso em radianos, é relativamente pequeno. Se a hipotenusa é unitária, vemos, a partir da geometria da figura, que o comprimento do arco $1 \times \theta$ e o sen θ são aproximadamente iguais. Da mesma forma, o cos θ é próximo à unidade. Além disso, o sen θ e o cos θ têm praticamente os mesmos valores. Assim sendo, para ângulos pequenos podemos escrever

$$\operatorname{sen}\theta \cong \tan\theta \cong \theta \qquad \cos\theta \cong 1$$

desde que os ângulos estejam expressos em radianos. Estas aproximações podem ser obtidas mantendo-se apenas os primeiros termos no desenvolvimento das séries para estas três funções. Como exemplo destas aproximações, para um ângulo de 1°

$$1^\circ = 0{,}017\,453 \text{ rad} \qquad \tan 1^\circ = 0{,}017\,455$$

$$\operatorname{sen} 1^\circ = 0{,}017\,452 \qquad \cos 1^\circ = 0{,}999\,848$$

Se uma aproximação mais exata for desejada, os dois primeiros termos podem ser mantidos, e eles são

$$\operatorname{sen}\theta \cong \theta - \theta^3/6 \qquad \tan\theta \cong \theta + \theta^3/3 \qquad \cos\theta \cong 1 - \theta^2/2$$

onde os ângulos devem ser expressos em radianos. (Para converter graus em radianos, multiplique o ângulo em graus por $\pi/180°$.) O erro ao se substituir o seno pelo ângulo para 1° (0,0175 rad) é de apenas 0,005 %. Para 5° (0,0873 rad) o erro é de 0,13 % e para 10° (0,1745 rad) o erro é ainda de apenas 0,51%. À medida que o ângulo θ se aproxima de zero, as seguintes relações são verdadeiras no limite matemático:

$$\operatorname{sen} d\theta = \tan d\theta = d\theta \qquad \cos d\theta = 1$$

onde o ângulo diferencial $d\theta$ deve ser expresso em radianos.

1/8 Resolução de Problemas em Estática

Estudamos estática para obter uma descrição quantitativa das forças que atuam em estruturas de engenharia em equilíbrio. A matemática estabelece as relações entre as diversas grandezas envolvidas e nos capacita a predizer os efeitos, a partir destas relações. Usamos um procedimento dual de raciocínio na resolução de problemas de estática: pensamos tanto na situação física quanto na descrição matemática correspondente. Na análise de cada problema, fazemos uma transição entre a situação física e a matemática. Um dos objetivos mais importantes para o estudante é desenvolver a habilidade para fazer livremente esta transição.

Formulando as Hipóteses Apropriadas

Devemos reconhecer que a formulação matemática de um problema físico representa uma descrição ideal, ou *modelo*, que aproxima, mas nunca corresponde exatamente à situação física real. Quando construímos um modelo matemático idealizado para um dado problema de engenharia, sempre existirão certas aproximações. Algumas destas aproximações podem ser matemáticas, enquanto outras serão físicas.

Por exemplo, freqüentemente é necessário desprezar distâncias, ângulos ou forças pequenas quando comparadas a distâncias, ângulos ou forças grandes. Suponha uma força distribuída sobre uma pequena área do corpo no qual ela atua. Podemos considerá-la como sendo uma força concentrada se as dimensões da área envolvida forem pequenas em relação às outras dimensões pertinentes.

Podemos desprezar o peso de um cabo de aço se a tensão no cabo for muitas vezes maior do que seu peso total. Entretanto, se precisarmos calcular a deflexão ou a flecha de um cabo suspenso sob a ação de seu próprio peso, não podemos ignorar o peso do cabo.

Assim, aquilo que podemos considerar depende de qual informação se deseja e da exatidão necessária. Devemos estar sempre atentos às várias suposições feitas na formulação dos problemas reais. A habilidade de entender e fazer uso das suposições apropriadas na formulação e na solução de problemas de engenharia é certamente uma das características mais importantes de um engenheiro de sucesso. Um dos maiores objetivos deste livro é fornecer muitas oportunidades para desenvolver esta habilidade, por meio da formulação e análise de muitos problemas práticos envolvendo os princípios da estática.

Usando Gráficos

Os gráficos são uma ferramenta analítica importante por três razões:

1. Usamos gráficos para representar um sistema físico no papel com um esboço ou diagrama. Representar um problema geometricamente nos ajuda a interpretá-lo fisicamente, especialmente quando devemos visualizar problemas tridimensionais.
2. Freqüentemente podemos obter uma solução gráfica para os problemas mais facilmente do que uma solução matemática direta. Soluções gráficas são tanto um modo prático de obter resultados quanto uma ajuda aos nossos processos de compreensão. Como os gráficos representam simultaneamente a situação física e sua expressão matemática, eles nos ajudam a fazer a transição entre as duas situações.
3. Gráficos são uma ajuda valiosa para a representação de resultados de uma maneira fácil de entender.

Formulando Problemas e Obtendo Soluções

Em estática, como em todos os problemas de engenharia, precisamos usar um método preciso e lógico para formular problemas e obter as suas soluções. Formulamos cada problema e desenvolvemos sua solução por meio da seguinte seqüência de passos.

1. Formule o problema:
   (*a*) Liste os dados fornecidos.
   (*b*) Formule o resultado desejado.
   (*c*) Liste suas hipóteses e aproximações.
2. Desenvolva a solução:
   (*a*) Construa qualquer diagrama que seja necessário para entender as relações.
   (*b*) Formule os princípios básicos a serem aplicados a sua solução.
   (*c*) Faça seus cálculos.
   (*d*) Assegure-se que seus cálculos sejam consistentes com a precisão justificada pelos dados.
   (*e*) Esteja certo que você usou unidades consistentes em todos os seus cálculos.
   (*f*) Assegure-se que suas respostas são razoáveis em termos de valores, direções, senso comum etc.
   (*g*) Tire conclusões.

Manter seu trabalho claro e ordenado ajudará seu processo de raciocínio e possibilitará que outros o entendam. A disciplina de fazer um trabalho ordenado ajudará você a desenvolver habilidade na formulação e análise. Problemas que parecem complicados em um primeiro momento, freqüentemente tornam-se claros quando você os enfoca com lógica e disciplina.

O Diagrama de Corpo Livre

O conteúdo da estática está baseado em surpreendentemente poucos conceitos fundamentais e envolve principalmente a aplicação destas relações básicas a inúmeras situações. Ao se aplicar essas relações, o *método* de análise é muito importante. Ao se resolver um problema é essencial que as leis que são aplicáveis sejam cuidadosamente entendidas e que utilizemos literal e exatamente estes princípios. Ao se usar os princípios da mecânica para analisar as forças atuando em um corpo, é essencial que *isolemos* o corpo em questão de todos os outros corpos, de modo que a contribuição completa e precisa de todas as forças que atuam neste corpo possa ser considerada. Este *isolamento* deve ser concebido mentalmente e deve ser representado no papel. O diagrama deste corpo isolado com a representação de *todas* as forças externas atuando *nele* é chamado de *diagrama de corpo livre.*

O método do diagrama de corpo livre é a chave para o entendimento da mecânica. Isto ocorre porque o *isolamento* de um corpo é a ferramenta pela qual *causa* e *efeito* são claramente separados, e pela qual nossa atenção é claramente focalizada na aplicação literal de um princípio da mecânica. A técnica de construção de diagramas de corpo livre é enfocada no Capítulo 3, onde eles são usados pela primeira vez.

Valores Numéricos *versus* Literais

Ao aplicar as leis da estática podemos usar valores numéricos para representar as grandezas, ou podemos usar símbolos algébricos e deixar a resposta como uma equação. Quando valores numéricos são usados, o valor de cada grandeza, dada em suas unidades específicas, fica evidente em cada etapa dos cálculos. Isto é útil quando precisamos conhecer o valor de cada termo.

A solução literal, entretanto, tem diversas vantagens sobre a solução numérica. Primeiro, o uso de símbolos ajuda a focar nossa atenção na ligação entre a situação física e a descrição matemática a ela associada. Segundo, podemos usar uma solução literal repetidamente para a obtenção de respostas para problemas do mesmo tipo, mas com diferentes unidades ou valores numéricos. Terceiro, a solução literal nos permite fazer uma verificação dimensional em cada passo, o que é mais difícil de fazer quando valores numéricos são usados. Em qualquer equação representando uma situação física, as unidades de cada termo nos dois lados da equação devem ser as mesmas. Esta propriedade é chamada de *homogeneidade dimensional.*

Assim, é essencial ter facilidade de lidar com as soluções tanto na forma numérica como na literal.

Métodos de Solução

Soluções dos problemas de estática podem ser obtidas em um ou mais dos seguintes modos.

1. Obtendo manualmente soluções matemáticas, usando ou símbolos algébricos ou valores numéricos. Podemos resolver a maioria dos problemas deste modo.
2. Obtendo soluções gráficas para determinados problemas.
3. Resolvendo problemas com computador. Isto é útil quando um grande número de equações deve ser resolvido, quando a variação de um parâmetro deve ser estudada ou quando uma equação que não tem solução analítica deve ser resolvida.

Muitos problemas podem ser resolvidos com dois ou mais destes métodos. O método utilizado depende parcialmente da preferência do engenheiro e do tipo de problema a ser resolvido. A escolha do método de solução mais ágil é um aspecto importante da experiência a ser obtida a partir de problemas práticos. Existem diversos problemas no *Vol. 1 Estática* que são projetados como *Exercícios Dirigidos para Computador.* Estes problemas aparecem no final do conjunto de *Exercícios de Revisão* e são selecionados para ilustrar o tipo de problema para o qual a solução por computador oferece uma clara vantagem.

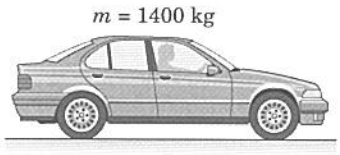
1/9 Revisão do Capítulo

Este capítulo introduziu os conceitos, as definições e as unidades usados em estática, e fez uma revisão do procedimento utilizado para formular e resolver problemas em estática. Agora que terminou este capítulo, você deve ser capaz de:

1. Expressar vetores em termos de vetores unitários e de componentes perpendiculares e fazer a adição e subtração de vetores.
2. Postular as leis de Newton de movimento.
3. Fazer cálculos usando unidades SI e do sistema americano, usando a exatidão adequada.
4. Escrever a lei da gravitação e calcular o peso de um objeto.
5. Aplicar simplificações baseadas em aproximações diferenciais e de ângulos pequenos.
6. Descrever a metodologia usada para formular e resolver problemas de estática.

Exemplo 1/1

Determine o peso, em newtons, de um carro cuja massa vale 1400 kg. Converta a massa do carro para slugs e então determine seu peso em libras.



Solução. Da Eq. 1/3, temos

① $$W = mg = 1400(9{,}81) = 13\,730 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Da tabela de fatores de conversão no início do livro, vemos que 1 slug é igual a 14,594 kg. Assim, a massa do carro em slugs vale

② $$m = 1400 \text{ kg}\left[\frac{1 \text{ slug}}{14{,}594 \text{ kg}}\right] = 95{,}9 \text{ slugs} \qquad \textit{Resp.}$$

Finalmente, seu peso em libras é

③ $$W = mg = (95{,}9)(32{,}2) = 3090 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Como outra opção para obter o último resultado, podemos converter kg para lbm. Usando novamente a tabela no verso da capa do livro, obtemos

$$m = 1400 \text{ kg}\left[\frac{1 \text{ lbm}}{0{,}45359 \text{ kg}}\right] = 3090 \text{ lbm}$$

O peso em libras associado com a massa de 3090 lbm é 3090 lb, como calculado anteriormente. Lembramos que 1 lbm é a quantidade de massa que, sob condições-padrão, tem um peso de 1 lb de força. Raramente nos referimos à unidade de massa do sistema americano, lbm, nesta série de livros-texto. Usamos, na verdade, o slug para massa. O uso apenas do *slug*, no lugar do emprego desnecessário de duas unidades para massa, provará ser simples e robusto – especialmente em dinâmica.

Sugestões Úteis

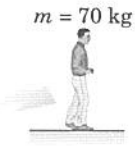
① Nossa calculadora indica um resultado de 13734 N. Usando as regras de algarismos significativos utilizadas neste livro, arredondamos o resultado para quatro algarismos significativos, ou 13730 N. Se o número tivesse começado com qualquer algarismo diferente de 1, teríamos feito a aproximação para três algarismos significativos.

② Uma boa prática com a conversão de unidades é a de se multiplicar por um fator tal como $\left[\frac{1 \text{ slug}}{14{,}594 \text{ kg}}\right]$, que vale 1, porque o numerador e o denominador são equivalentes. Certifique-se de que o cancelamento das unidades fornece as unidades desejadas; aqui as unidades de kg se cancelam, deixando a unidade desejada, em slug.

③ Observe que estamos usando um resultado calculado anteriormente (95,9 slugs). Devemos estar certos de que quando um número anteriormente calculado é necessário nos cálculos subseqüentes, ele é mantido na calculadora com todas as suas casas decimais (95,929834...) até que seja reutilizado. Isto pode requerer armazená-lo em uma memória após seu cálculo inicial e recuperá-lo posteriormente. Não devemos simplesmente teclar 95,9 em nossa calculadora e fazer a multiplicação por 32,2 – esta prática resultará em perda da precisão numérica. Algumas pessoas gostam de colocar uma pequena indicação do registro de armazenagem usado na margem direita da folha de cálculo, diretamente ao lado do número armazenado.

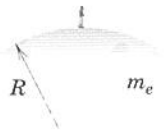
Exemplo 1/2

Use a lei da gravitação universal de Newton para calcular o peso de uma pessoa de 70 kg, de pé na superfície da Terra. Repita então os cálculos usando $W = mg$ e compare seus dois resultados. Use a Tabela D/2 quando necessário.



Solução. Os dois resultados são

① $$W = \frac{Gm_e m}{R^2} = \frac{(6{,}673 \cdot 10^{-11})(5{,}976 \cdot 10^{24})(70)}{[6371 \cdot 10^3]^2} = 688 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$



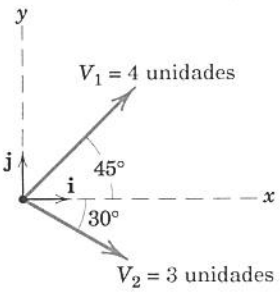
$$W = mg = 70(9{,}81) = 687 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

A diferença é devida ao fato de que a lei da gravitação universal de Newton não leva em consideração a rotação da Terra. Por outro lado, o valor de $g = 9{,}81$ m/s² usado na segunda equação considera a rotação da Terra. Observe que se tivéssemos usado o valor mais preciso de $g = 9{,}80665$ m/s² (que, da mesma maneira, considera a rotação da Terra) na segunda equação, a diferença teria sido maior (o resultado teria sido 686 N).

Sugestão Útil

① A distância efetiva entre os centros de massa dos dois corpos envolvidos é o raio da Terra.

Exemplo 1/3



Para os vetores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ mostrados na figura,

(*a*) determine o valor S de sua soma vetorial $\mathbf{S} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$

(*b*) determine o ângulo α entre $\mathbf{S}$ e o eixo positivo x

(*c*) escreva $\mathbf{S}$ como um vetor em termos dos vetores unitários $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ e então escreva um vetor unitário $\mathbf{n}$ ao longo do vetor soma $\mathbf{S}$

(*d*) determine a diferença vetorial $\mathbf{D} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$

Solução. (*a*) Construímos em escala o paralelogramo mostrado na Fig. *a*, para somar $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$. Usando a lei dos cossenos, temos

$$S^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos 105°$$

$$S = 5{,}59 \text{ unidades} \qquad \textit{Resp.}$$

① (*b*) Usando a lei dos senos para o triângulo inferior, temos

$$\frac{\operatorname{sen} 105°}{5{,}59} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + 30°)}{4}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + 30°) = 0{,}692$$

$$(\alpha + 30°) = 43{,}8° \qquad \alpha = 13{,}76° \qquad \textit{Resp.}$$

(*c*) Conhecendo-se tanto S como α, podemos escrever o vetor $\mathbf{S}$ como

$$\mathbf{S} = S[\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\operatorname{sen}\alpha]$$

$$= S[\mathbf{i}\cos 13{,}76° + \mathbf{j}\operatorname{sen} 13{,}76°] = 5{,}43\mathbf{i} + 1{,}328\mathbf{j} \text{ unidades} \qquad \textit{Resp.}$$

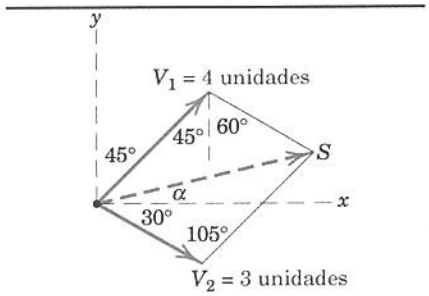
② Assim $$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{S}}{S} = \frac{5{,}43\mathbf{i} + 1{,}328\mathbf{j}}{5{,}59} = 0{,}971\mathbf{i} + 0{,}238\mathbf{j} \qquad \textit{Resp.}$$

(*d*) A diferença vetorial $\mathbf{D}$ é

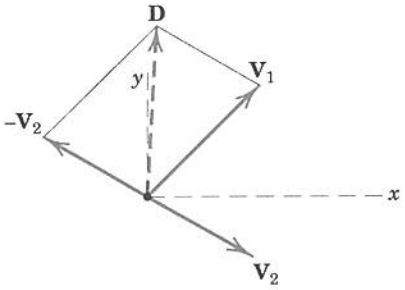
$$\mathbf{D} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 4(\mathbf{i}\cos 45° + \mathbf{j}\operatorname{sen} 45°) - 3(\mathbf{i}\cos 30° - \mathbf{j}\operatorname{sen} 30°)$$

$$= 0{,}230\mathbf{i} + 4{,}33\mathbf{j} \text{ unidades} \qquad \textit{Resp.}$$

O vetor $\mathbf{D}$ é mostrado na Fig. *b* como $\mathbf{D} = \mathbf{V}_1 + (-\mathbf{V}_2)$.



(*a*)



(*b*)

Sugestões Úteis

① Você usará freqüentemente a lei dos cossenos e dos senos em mecânica. Veja a Seção C/6 do Apêndice C para uma revisão destes importantes princípios geométricos.

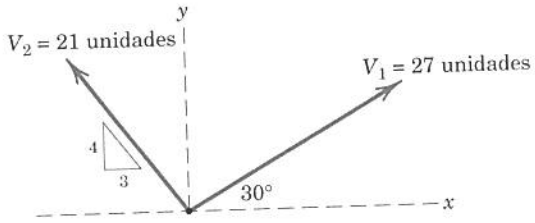
② Um vetor unitário sempre pode ser obtido dividindo-se um vetor por seu módulo. Note que um vetor unitário é adimensional.

PROBLEMAS

1/1 Determine os ângulos feitos pelo vetor $\mathbf{V} = -36\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$ com o eixo positivo dos x e dos y. Escreva o vetor unitário $\mathbf{n}$ na direção de $\mathbf{V}$.

Resp. $\theta_x = 157{,}4°$, $\theta_y = 67{,}4°$
$\mathbf{n} = -0{,}923\mathbf{i} + 0{,}385\mathbf{j}$

1/2 Determine o valor da soma vetorial $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ e do ângulo θ_x que $\mathbf{V}$ faz com o eixo positivo x. Complete tanto a solução gráfica quanto a algébrica.



Problema 1/2

1/3 Para os vetores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ do Prob. 1/2, determine o módulo da diferença vetorial $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ e o ângulo θ_x que $\mathbf{V}'$ faz com o eixo positivo x. Complete tanto a solução gráfica quanto a algébrica.

Resp. $\mathbf{V}' = 36{,}1$ unidades, $\theta_x = 174{,}8°$

1/4 Uma força é especificada pelo vetor $\mathbf{F} = 160\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 120\mathbf{k}$ N. Calcule os ângulos entre $\mathbf{F}$ e os eixos positivos x, y e z.

1/5 Qual é a massa, tanto em slugs quanto em quilogramas, de uma viga com 1000 lb?

Resp. $m = 31{,}1$ slugs, $m = 454$ kg

1/6 A partir da lei gravitacional calcule o peso W (força gravitacional em relação à Terra) de um homem de 80 kg, em uma espaçonave percorrendo uma órbita circular 250 km acima da superfície da Terra. Expresse W tanto em newtons como em libras.

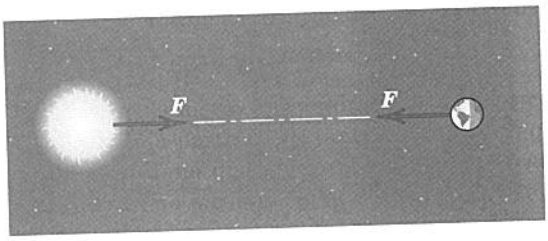
1/7 Determine o peso, em newtons, de uma mulher cujo peso é de 125 libras. Ache, também, sua massa em slugs e em quilogramas. Determine teu próprio peso em newtons.

Resp. $W = 556$ N, $m = 3{,}88$ slugs, $m = 56{,}7$ kg

1/8 Suponha que dois valores adimensionais valem exatamente $A = 8{,}67$ e $B = 1{,}429$. Usando as regras para algarismos significativos, apresentadas neste capítulo, calcule os valores de $(A+B)$, $(A-B)$, (AB) e (A/B).

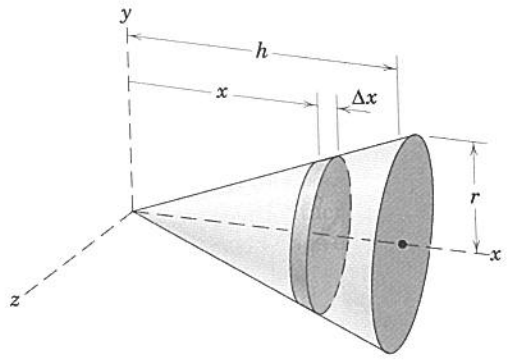
1/9 Calcule o módulo F da força exercida pelo Sol sobre a Terra. Faça os cálculos primeiramente em newtons e, então, converta o resultado para libras. Refira-se a Tabela D/2 para as grandezas físicas necessárias.

Resp. $F = 3{,}55(10^{22})$N, $F = 7{,}97(10^{21})$lb



Problema 1/9

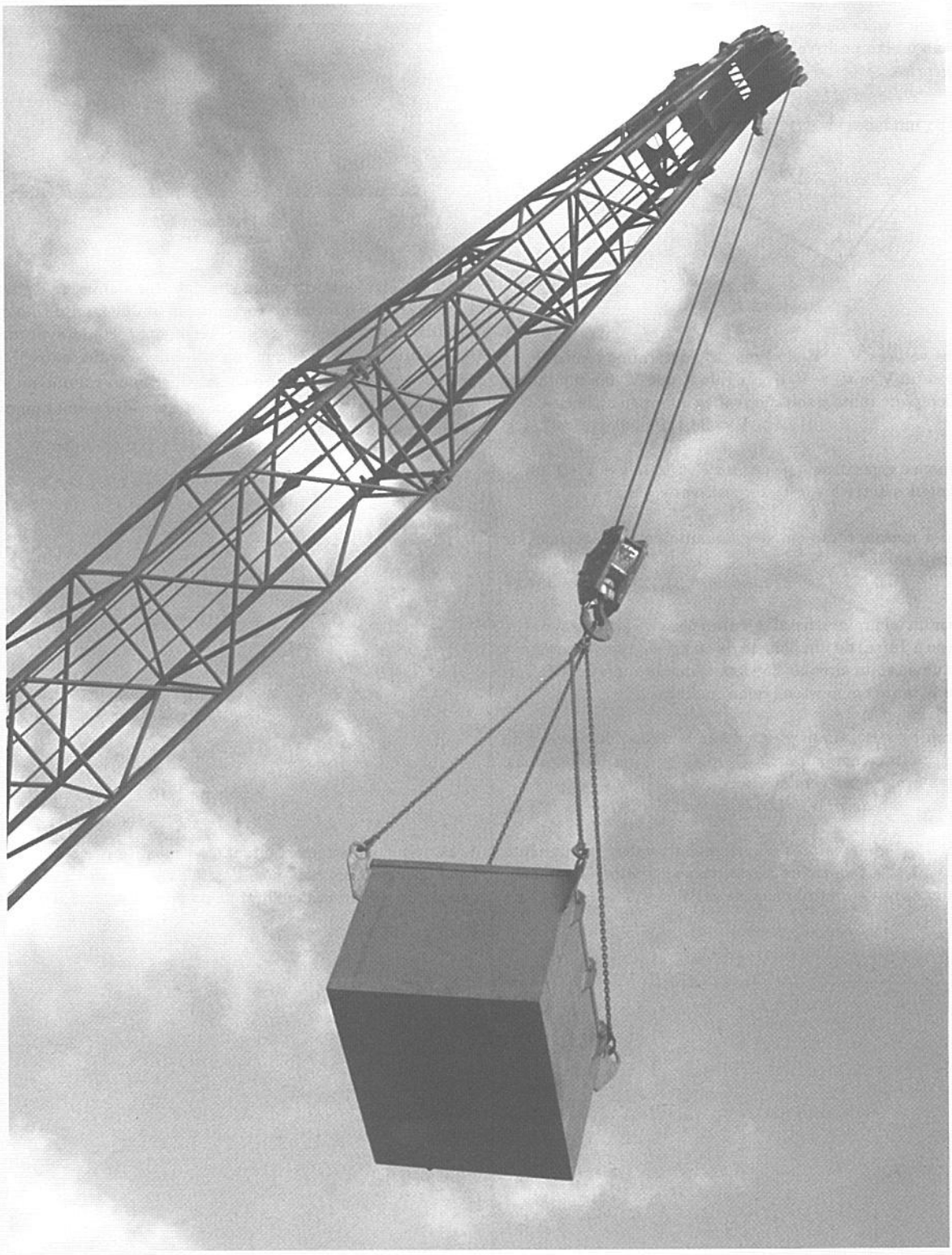
1/10 O elemento de volume ΔV do cone circular de altura h e base de raio r é formado cortando-se um elemento fino do cone a uma distância x do vértice. Se o elemento cortado tiver uma espessura finita Δx, mostre que seu volume ΔV vale $[\pi r^2/h^2]$ $[x^2\,\Delta x + x(\Delta x)^2 + \frac{1}{3}(\Delta x)^3]$. (Lembre-se da equação do volume de um cone.) Explique o que acontece ao segundo e terceiro termos quando Δx se torna o infinitesimal dx.



Problema 1/10

1/11 Qual é o erro percentual n ao substituir-se o seno de 20° pelo valor do ângulo em radianos? Repita o cálculo para a tangente de 20° e explique a diferença qualitativa na porcentagem dos dois erros.

Resp. $n = 2{,}06\%$, $n = 4{,}09\%$



©Dynamic Graphics/Media Bakery

As propriedades dos sistemas de forças devem ser completamente entendidas pelos engenheiros que projetam sistemas tais como este guindaste de construção. Tente visualizar as forças presentes nas várias partes desse sistema.

2 SISTEMAS DE FORÇAS

DESCRIÇÃO DO CAPÍTULO

2/1 Introdução
2/2 Força

SEÇÃO A SISTEMAS DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS
2/3 Componentes Retangulares
2/4 Momento
2/5 Binário
2/6 Resultantes

SEÇÃO B SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS
2/7 Componentes Retangulares
2/8 Momento e Binário
2/9 Resultantes
2/10 Revisão do Capítulo

2/1 Introdução

Neste capítulo, e nos seguintes, analisaremos os efeitos de forças que atuam em estruturas e em equipamentos de engenharia. A experiência adquirida aqui ajudará você no estudo da mecânica e em outros tópicos tais como análise de tensões, projeto de estruturas e máquinas e escoamento de fluidos. Este capítulo estabelece os fundamentos para o entendimento básico não apenas de estática, mas, também, de toda a mecânica, e você deve conhecer este material profundamente.

2/2 Força

Antes de lidar com um conjunto ou *sistema* de forças é necessário examinar as propriedades de uma única força com algum detalhe. Uma força foi definida no Capítulo 1 como uma ação de um corpo sobre outro. Em dinâmica veremos que uma força é definida como uma ação que tende a causar aceleração de um corpo. Uma força é uma *grandeza vetorial*, porque seu efeito depende da direção e também do módulo da ação. Assim, forças podem ser combinadas de acordo com a lei do paralelogramo para adição vetorial.

A ação da tração no cabo sobre o suporte na Fig. 2/1*a* está representada na vista lateral, Fig. 2/1*b*, pelo vetor força $\mathbf{P}$, de módulo P. O efeito desta ação sobre o suporte depende de P, do ângulo θ e da posição do ponto de aplicação A. A variação de qualquer um destes três parâmetros alterará o efeito sobre o suporte, tal como a força em um dos parafusos que prendem o suporte à base, ou a força interna e a deformação em qualquer ponto do material do suporte. Assim, a completa especificação da ação de uma força deve incluir seu *módulo, direção* e *ponto de aplicação* e, deste modo, devemos tratá-la como um vetor fixo.

Efeitos Externos e Internos

Podemos separar a ação de uma força em um corpo em dois efeitos, *externo* e *interno*. Para o suporte da Fig. 2/1 os efeitos de $\mathbf{P}$ externos ao suporte são as forças reativas (não mostradas) exercidas no suporte pela base e pelos parafusos, devido à ação de $\mathbf{P}$. Forças externas a um corpo podem ser forças *aplicadas* ou forças *reativas*. Os efeitos de $\mathbf{P}$ internos ao suporte são as forças e deformações internas resultantes distribuídas por todo o material do suporte. A relação entre forças internas e deformações internas depende das propriedades do material do corpo e é estudada em resistência dos materiais, elasticidade e plasticidade.

Princípio da Transmissibilidade

Ao lidar com a mecânica de um corpo rígido, ignoramos as deformações no corpo e nos preocupamos apenas com os efeitos externos resultantes das forças externas. Em tais casos, a experiência nos mostra que não é necessário restringir a um determinado ponto a ação de uma força aplicada. Por exemplo, a força $\mathbf{P}$ atuando na placa rígida na Fig. 2/2 pode ser aplicada em A ou em B, ou em qualquer outro ponto em sua linha de ação, e os efeitos externos de $\mathbf{P}$ sobre o suporte não se alterarão. Os efeitos externos são a força exercida na placa pelo mancal de suporte em O e a força exercida na placa pelo suporte com rolamento em C.

Esta conclusão é resumida pelo *princípio da transmissibilidade*, que diz que a força pode ser aplicada em qualquer ponto sobre sua linha de ação sem alterar os efeitos resultantes da força *externa* ao corpo *rígido* no qual ela atua. Assim, sempre que estivermos interessados apenas nos efeitos externos resultantes de uma força, a força pode ser tratada como um vetor *móvel*, e precisamos especificar apenas o *módulo, direção* e *linha de ação* da força e não o seu *ponto de aplicação*. Como este livro lida essencialmente com a mecânica de corpos rígidos, trataremos quase todas as forças como vetores móveis em relação ao corpo rígido no qual elas atuam.

Classificação das Forças

As forças são classificadas como forças de *contato* ou de *corpo*. Uma força de contato é produzida por contato físico direto; um exemplo é a força exercida em um corpo por uma

superfície de apoio. Por outro lado, uma força de corpo é gerada em virtude da posição de um corpo dentro de um campo de forças, tal como os campos gravitacional, elétrico ou magnético. Um exemplo de uma força de corpo é o seu peso.

As forças podem ainda ser classificadas como *concentradas* ou *distribuídas*. Toda força de contato é na verdade aplicada sobre uma área finita e, deste modo, é realmente uma força distribuída. Entretanto, quando as dimensões da área são muito pequenas em comparação com as outras dimensões do corpo, podemos considerar a força como sendo concentrada em um ponto, com perda desprezível de exatidão. Uma força pode ser distribuída sobre uma *área*, como no caso do contato mecânico, sobre um *volume*, quando for uma força de corpo, tal como o peso está atuando, ou sobre uma *linha*, como no caso do peso de um cabo suspenso.

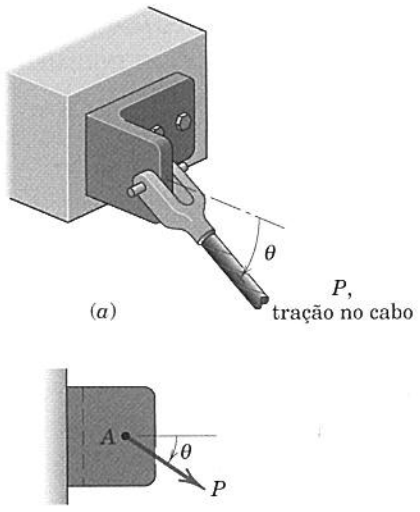


Figura 2/1

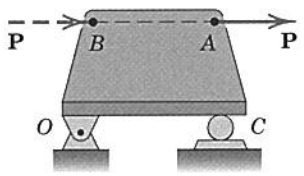


Figura 2/2

©Photodisc/Media Bakery

As forças associadas com esse dispositivo de levantamento de cargas devem ser cuidadosamente identificadas, classificadas e analisadas para ter-se um ambiente de trabalho eficaz e seguro.

O *peso* de um corpo é a força de atração gravitacional distribuída sobre o seu volume e pode ser considerada como uma força concentrada atuando por meio do centro de gravidade. A posição do centro de gravidade é freqüentemente óbvia se o corpo for simétrico. Se a posição não for óbvia, então um cálculo separado, explicado no Capítulo 5, será necessário para localizar o centro de gravidade.

Podemos medir uma força por comparação com outras forças conhecidas, usando uma balança mecânica, ou pelo movimento calibrado de um elemento elástico. Todas estas comparações ou calibrações têm como base um padrão primário. Como definida na Seção 1/5, a unidade-padrão de força em unidades SI é o newton (N) no sistema inercial (LMT) e o quilograma-força (kgf) no sistema gravitacional (LFT).

Ação e Reação

De acordo com a terceira lei de Newton, a *ação* de uma força é sempre acompanhada por uma *reação igual* e *oposta*. É essencial distinguir entre a ação e a reação em um par de forças. Para fazer isto, primeiramente *isolamos* o corpo em questão e então identificamos a força exercida *sobre* o corpo (não a força exercida *pelo* corpo). É muito fácil se enganar e usar a força errada do par, a menos que sejamos capazes de distinguir cuidadosamente entre ação e reação.

Forças Concorrentes

Duas ou mais forças são ditas *concorrentes em um ponto* se suas linhas de ação se interceptam neste ponto. As forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ mostradas na Fig. 2/3*a* têm um ponto comum de aplicação e são concorrentes no ponto *A*. Assim, elas podem ser adicionadas usando a lei do paralelogramo em seu plano comum, para obter sua soma ou *resultante* $\mathbf{R}$, como mostrado na Fig. 2/3*a*. A resultante se situa no mesmo plano que $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$.

Suponha que duas forças concorrentes estão situadas no mesmo plano, mas são aplicadas em dois pontos diferentes como na Fig. 2/3*b*. Pelo princípio da transmissibilidade, podemos movê-las ao longo de suas linhas de ação e completar sua soma vetorial $\mathbf{R}$ no ponto de concorrência *A*, como mostrado na Fig. 2/3*b*. Podemos substituir $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ pela resultante $\mathbf{R}$ sem alterar os efeitos externos sobre o corpo no qual elas atuam.

Podemos usar também a lei do triângulo para obter $\mathbf{R}$, mas precisamos mover a linha de ação de uma das forças, como mostrado na Fig. 2/3*c*. Se adicionarmos essas mesmas duas forças, como mostrado na Fig. 2/3*d*, preservamos corretamente o módulo e a direção de $\mathbf{R}$, mas perdemos a linha de ação correta, porque $\mathbf{R}$ obtido desta maneira não passa por *A*. Deste modo, este tipo de combinação deve ser evitado.

Podemos expressar matematicamente a soma de duas forças pela equação vetorial

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Componentes Vetoriais

Além de combinar forças para obter sua resultante, freqüentemente precisamos substituir uma força por seus *componentes vetoriais* nas direções que sejam convenientes para uma dada aplicação. A soma vetorial dos componentes deve ser igual ao vetor original. Assim, a força **R** na Fig. 2/3*a* pode ser substituída por, ou *decomposta* em, dois vetores componentes $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ com as direções especificadas, completando-se o paralelogramo para obter os módulos de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, como mostrado.

A relação entre uma força e seus componentes vetoriais ao longo de eixos dados não deve ser confundida com a relação entre uma força e suas projeções perpendiculares* sobre os mesmos eixos. A Fig. 2/3*e* mostra as projeções perpendiculares $\mathbf{F}_a$ e $\mathbf{F}_b$ da força **R** sobre os eixos *a* e *b*, que são paralelas aos componentes vetoriais $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ da Fig. 2/3*a*. A Fig. 2/3*e* mostra que os componentes de um vetor não são necessariamente iguais às projeções do vetor nos mesmos eixos. Além disso, a soma vetorial das projeções $\mathbf{F}_a$ e $\mathbf{F}_b$ não é o vetor **R**, porque a lei do paralelogramo da adição vetorial deve ser usada para obter a soma. Os componentes e projeções de **R** são iguais apenas quando os eixos *a* e *b* são perpendiculares.

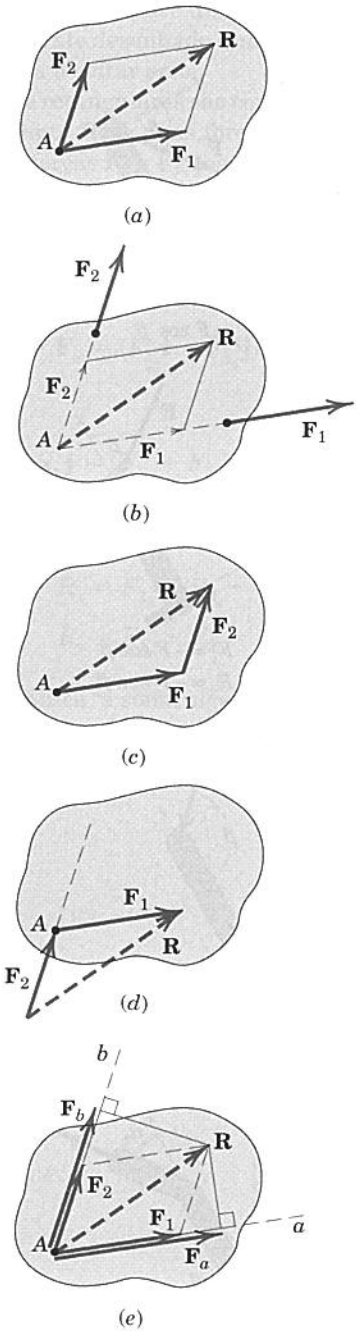


Figura 2/3

Um Caso Especial de Adição Vetorial

Para obter a resultante quando as duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são paralelas, como na Fig. 2/4, usamos um caso especial da adição. Os dois vetores são combinados adicionando-se primeiramente duas forças opostas, iguais e colineares **F** e **−F**, com um módulo conveniente, que, consideradas em conjunto, não produzem efeito externo no corpo. Somando $\mathbf{F}_1$ e **F** para gerar $\mathbf{R}_1$, e combinando com a soma $\mathbf{R}_2$ de $\mathbf{F}_2$ e **−F** obtém-se a resultante **R**, que está correta em módulo, direção e linha de ação. Este procedimento é útil também para combinar graficamente duas forças que têm um ponto de concorrência remoto e inadequado porque são quase paralelas.

Normalmente é útil dominar a análise de sistemas de forças em duas dimensões antes de passar à análise em três dimensões. Assim, o restante do Capítulo 2 é subdividido nestas duas categorias.

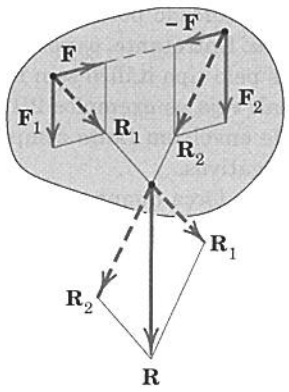


Figura 2/4

*Projeções perpendiculares são chamadas também de projeções *ortogonais*.

SEÇÃO A SISTEMAS DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS

2/3 Componentes Retangulares

A decomposição bidimensional mais comum de um vetor de força é nos seus componentes retangulares. Segue, da regra do paralelogramo, que o vetor **F** da Fig. 2/5 pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y \tag{2/1}$$

onde $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$ são os *componentes vetoriais* de **F** nas direções x e y. Cada um dos dois componentes vetoriais pode ser escrito como um escalar multiplicado pelo vetor unitário apropriado. Em termos dos vetores unitários **i** e **j** da Fig. 2/5, $\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i}$ e $\mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j}$, e assim podemos escrever

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \tag{2/2}$$

onde os escalares F_x e F_y são os *componentes escalares* x e y do vetor **F**.

Os componentes escalares podem ser positivos ou negativos, dependendo do quadrante para o qual **F** aponta. Para o vetor força da Fig. 2/5, os componentes escalares x e y são ambos positivos e estão relacionados ao módulo e à direção de **F** por

$$\begin{aligned} F_x &= F\cos\theta & F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ F_y &= F\,\text{sen}\,\theta & \theta &= \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} \end{aligned} \tag{2/3}$$

Convenções para Descrever os Componentes de um Vetor

Denotamos, em um texto, o módulo de um vetor com tipo itálico; ou seja, $|\mathbf{F}|$ é indicado por F, uma quantidade que é sempre *não negativa*. Entretanto, os componentes escalares, também denotados pelo tipo itálico sem negrito, incluirão a informação do sinal. Veja os exemplos 2/1 e 2/3 para exemplos numéricos que envolvem tanto componentes escalares positivos quanto negativos.

Quando tanto uma força quanto seus componentes vetoriais aparecem em um diagrama, é desejável mostrar os componentes vetoriais da força em linhas tracejadas, como na Fig. 2/5, e mostrar a força como uma linha cheia, ou vice-versa. Com qualquer uma destas convenções sempre ficará claro que uma força e seus componentes estão sendo representados, e não três forças separadas como implicaria o uso de três vetores representados por linhas cheias.

Problemas reais não vêm com eixos de referência, de modo que sua atribuição é escolhida por conveniência, e a escolha é freqüentemente do estudante. A escolha lógica é normalmente indicada no modo pelo qual a geometria do problema está especificada. Quando as dimensões principais de um corpo são dadas nas direções horizontal e vertical, por exemplo, os eixos de referência serão, tipicamente, alocados nestas direções.

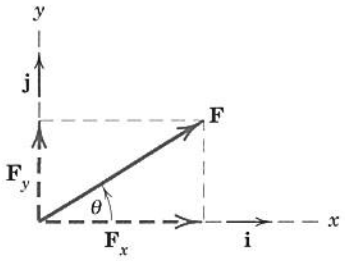
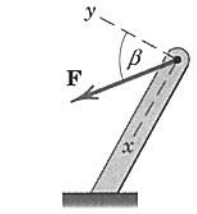
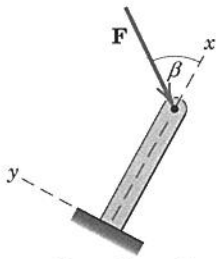


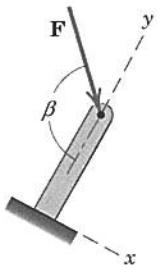
Figura 2/5



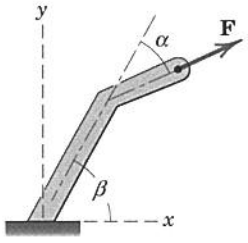
$F_x = F\,\text{sen}\,\beta$
$F_y = F\cos\beta$



$F_x = -F\cos\beta$
$F_y = -F\,\text{sen}\,\beta$



$F_x = F\,\text{sen}(\pi - \beta)$
$F_y = -F\cos(\pi - \beta)$



$F_x = F\cos(\beta - \alpha)$
$F_y = F\,\text{sen}(\beta - \alpha)$

Figura 2/6

Determinando os Componentes de uma Força

As dimensões nem sempre são dadas nas direções horizontal e vertical, os ângulos não precisam ser medidos no sentido anti-horário a partir do eixo x, e a origem das coordenadas não precisa estar na linha de ação de uma força. Assim sendo, é essencial que sejamos capazes de determinar os componentes corretos de uma força, independentemente de como os eixos estão orientados ou de como os ângulos são medidos. A Fig. 2/6 mostra alguns exemplos típicos de decomposição vetorial em duas dimensões.

A memorização das Eqs. 2/3 não é um substituto para a compreensão da lei do paralelogramo nem para a decomposição correta de um vetor sobre um eixo de referência. Um esboço cuidadosamente desenhado sempre ajuda a tornar mais clara a geometria e evitar erro.

Componentes retangulares são convenientes para achar a soma ou resultante $\mathbf{R}$ de duas forças que são concorrentes. Considere duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ que são originalmente concorrentes em um ponto O. A Fig. 2/7 mostra a linha de ação de $\mathbf{F}_2$ deslocada de O para a extremidade de $\mathbf{F}_1$, de acordo com a regra do triângulo da Fig. 2/3. Ao somar os vetores força $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, podemos escrever

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_{1_x}\mathbf{i} + F_{1_y}\mathbf{j}) + (F_{2_x}\mathbf{i} + F_{2_y}\mathbf{j})$$

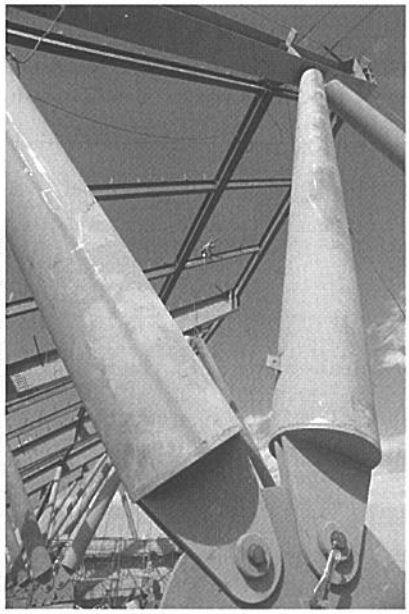
ou

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = (F_{1_x} + F_{2_x})\mathbf{i} + (F_{1_y} + F_{2_y})\,\mathbf{j}$$

a partir da qual concluímos que

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1_x} + F_{2_x} = \Sigma F_x \\ R_y &= F_{1_y} + F_{2_y} = \Sigma F_y \end{aligned} \qquad \textbf{(2/4)}$$

O termo ΣF_x significa "a soma algébrica dos componentes escalares em x". Para o exemplo mostrado na Fig. 2/7, observe que o componente escalar F_{2y} seria negativo.



© Vince Streano/Photographer's Choice/Getty Images

Os elementos estruturais em primeiro plano na figura transmitem forças concentradas aos suportes em ambas as extremidades.

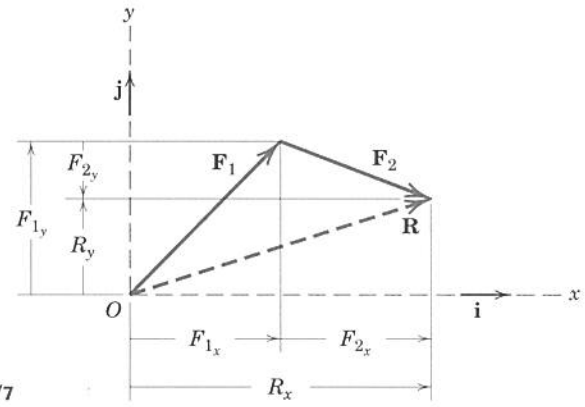
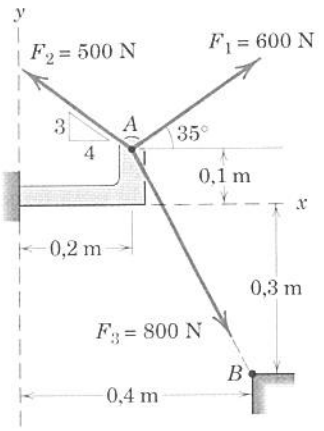


Figura 2/7

Exemplo 2/1

As forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$, todas atuando no ponto A do suporte, são especificadas de três modos diferentes. Determine os componentes escalares em x e em y de cada uma destas três forças.



Solução. Os componentes escalares de $\mathbf{F}_1$, a partir da Fig. *a*, são

$$F_{1_x} = 600 \cos 35° = 491 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_{1_y} = 600 \operatorname{sen} 35° = 344 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Os componentes escalares de $\mathbf{F}_2$, a partir da Fig. *b*, são

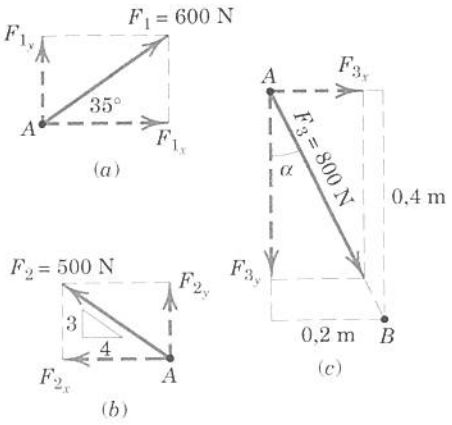
$$F_{2_x} = -500\left(\frac{4}{5}\right) = -400 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_{2_y} = 500\left(\frac{3}{5}\right) = 300 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Observe que o ângulo que orienta $\mathbf{F}_2$ em relação ao eixo x não é calculado. O cosseno e o seno do ângulo são disponíveis pela inspeção do triângulo 3-4-5. Note também, por inspeção, que o componente escalar x de $\mathbf{F}_2$ é negativo.

Os componentes escalares de $\mathbf{F}_3$ podem ser obtidos calculando-se primeiramente o ângulo α da Fig. *c*.

$$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{0,2}{0,4}\right] = 26,6°$$



① Assim, $F_{3_x} = F_3 \operatorname{sen} \alpha = 800 \operatorname{sen} 26,6° = 358 \text{ N}$ *Resp.*

$$F_{3_y} = -F_3 \cos \alpha = -800 \cos 26,6° = -716 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Alternativamente, os componentes escalares de $\mathbf{F}_3$ podem ser obtidos escrevendo-se $\mathbf{F}_3$ como um módulo multiplicado por um vetor unitário $\mathbf{n}_{AB}$ na direção do segmento de reta AB. Assim,

② $$\mathbf{F}_3 = F_3\mathbf{n}_{AB} = F_3 = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = 800\left[\frac{0,2\mathbf{i} - 0,4\mathbf{j}}{\sqrt{(0,2)^2 + (-0,4)^2}}\right]$$

$$= 800\,[0,447\mathbf{i} - 0,894\mathbf{j}]$$

$$= 358\mathbf{i} - 716\mathbf{j} \text{ N}$$

Os componentes escalares desejados são, então,

$$F_{3_x} = 358 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_{3_y} = -716 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

que coincidem com nossos resultados anteriores.

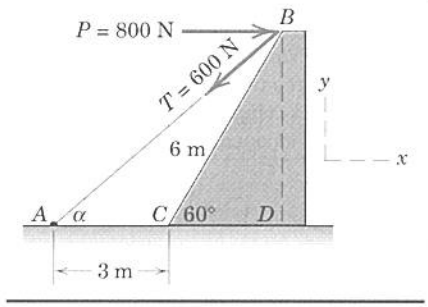
Sugestões Úteis

① Você deve examinar cuidadosamente a geometria de cada problema de determinação de componentes e não se basear no uso cego de equações tais como $F_x = F \cos \theta$ e $F_y = F \operatorname{sen} \theta$.

② Um vetor unitário pode ser obtido dividindo-se *qualquer* vetor, tal como o vetor geométrico de posição $\overrightarrow{AB}$, pelo seu comprimento ou módulo. Aqui usamos a seta superescrita para indicar o vetor que vai de A até B e uma barra superescrita para denotar a distância entre A e B.

Exemplo 2/2

Combine em uma única força equivalente **R** as duas forças **P** e **T**, que atuam no ponto B da estrutura fixa.

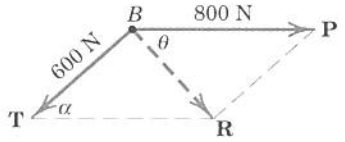


Solução gráfica. O paralelogramo para a adição vetorial das forças **T** e **P** é construído como mostrado na Fig. a. A escala usada foi de 1 cm = 400 N. Uma escala de 1 cm = 100 N seria mais apropriada para um papel de tamanho regular e daria maior precisão. Observe que o ângulo α deve ser determinado antes da construção do paralelogramo. A partir da figura dada ①

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{6\ \text{sen}\ 60°}{3 + 6\cos 60°} = 0{,}866 \qquad \alpha = 40{,}9°$$

As medidas do comprimento R e da direção θ da força resultante **R** levam aos resultados aproximados de

$$R = 525\ \text{N} \qquad \theta = 49° \qquad \textit{Resp.}$$



(a)

Solução geométrica. O triângulo para a adição vetorial de **T** e **P** é mostrado na Fig. b. O ângulo α é calculado como demonstrado anteriormente. A lei dos cossenos dá ②

$$R^2 = (600)^2 + (800)^2 - 2(600)(800)\cos 40{,}9° = 274.300$$

$$R = 524\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

Da lei dos senos podemos determinar o ângulo θ que orienta **R**. Assim,

$$\frac{600}{\text{sen}\ \theta} = \frac{524}{\text{sen}\ 40{,}9°} \qquad \text{sen}\ \theta = 0{,}750 \qquad \theta = 48{,}6° \qquad \textit{Resp.}$$

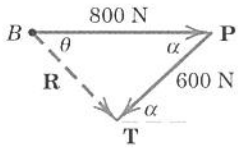
Sugestões Úteis

① Note o reposicionamento de **P** para permitir a adição pelo paralelogramo em B.

Solução algébrica. Usando o sistema de coordenadas x-y na figura dada, podemos escrever

$$R_x = \Sigma F_x = 800 - 600\cos 40{,}9° = 346\ \text{N}$$

$$R_y = \Sigma F_y = -600\ \text{sen}\ 40{,}9° = -393\ \text{N}$$



(b)

O módulo e a direção da força resultante **R** são, então, como mostrados na Fig. c

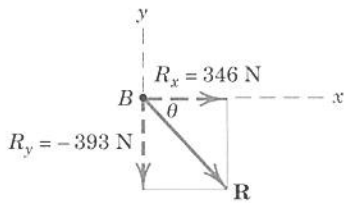
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(346)^2 + (-393)^2} = 524\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{|R_y|}{|R_x|} = \tan^{-1}\frac{393}{346} = 48{,}6° \qquad \textit{Resp.}$$

② Note o reposicionamento de **T** de modo a preservar a linha de ação correta da resultante **R**.

A resultante **R** pode ser também escrita em notação vetorial como

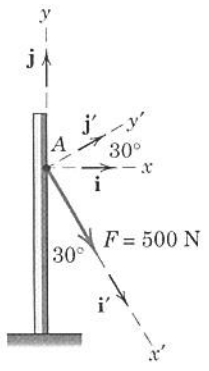
$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = 346\mathbf{i} - 393\mathbf{j}\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

Exemplo 2/3

Uma força **F** de 500 N é aplicada à haste vertical, como mostrado. (1) Escreva **F** em função dos vetores unitários **i** e **j** e identifique seus componentes vetoriais e escalares. (2) Determine os componentes escalares do vetor força **F** ao longo dos eixos x' e y'. (3) Determine os componentes escalares de **F** ao longo dos eixos x e y'.



Solução: Item (1). Da Fig. *a* podemos escrever **F** como

$$\mathbf{F} = (F\cos\theta)\mathbf{i} - (F\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$$

$$= (500\cos 60°)\mathbf{i} - (500\operatorname{sen}60°)\mathbf{j}$$

$$= (250\mathbf{i} - 433\mathbf{j})\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

Os componentes escalares são $F_x = 250$ N e $F_y = -433$ N. Os componentes vetoriais são $\mathbf{F}_x = 250\mathbf{i}$ N e $\mathbf{F}_y = -433\mathbf{j}$ N.

Item (2). Da Fig. *b* podemos escrever **F** como $\mathbf{F} = 500\mathbf{i}'$N, de modo que os componentes escalares desejados são

$$F_{x'} = 500\ \text{N} \qquad F_{y'} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

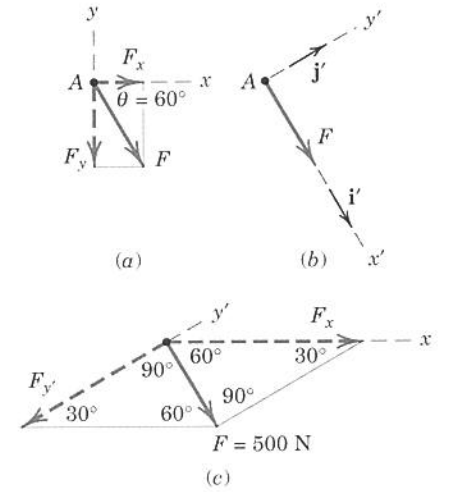
Item (3). Os componentes de **F** nas direções x e y' não são retangulares e são obtidos completando-se o paralelogramo, como mostrado na Fig. *c*. Os módulos dos componentes podem ser calculados pela lei dos senos. Assim,

① $$\frac{|F_x|}{\operatorname{sen}90°} = \frac{500}{\operatorname{sen}30°} \qquad |F_x| = 1000\ \text{N}$$

$$\frac{|F_{y'}|}{\operatorname{sen}60°} = \frac{500}{\operatorname{sen}30°} \qquad |F_{y'}| = 866\ \text{N}$$

Os componentes escalares pedidos são então

$$F_x = 1000\ \text{N} \qquad F_{y'} = -866\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

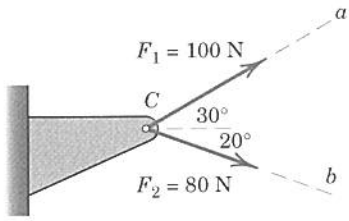


Sugestão Útil

① Obtenha F_x e $F_{y'}$ graficamente e compare seus resultados com os valores calculados.

Exemplo 2/4

As forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ atuam no suporte, como mostrado. Determine a projeção F_b da resultante **R** sobre o eixo b.



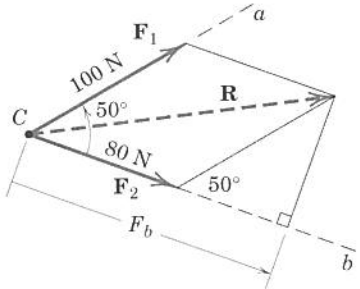
Solução. A adição de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ pelo paralelogramo é mostrada na figura. Usando a lei dos cossenos obtemos

$$R^2 = (80)^2 + (100)^2 - 2(80)(100)\cos 130° \qquad R = 163{,}4\ \text{N}$$

A figura mostra também a projeção ortogonal $\mathbf{F}_b$ de **R** sobre o eixo b. Seu comprimento é

$$F_b = 80 + 100\cos 50° = 144{,}3\ \text{N} \qquad \textit{Resp.}$$

Observe que os componentes de um vetor não são, geralmente, iguais às projeções do vetor nos mesmos eixos. Se o eixo a fosse perpendicular ao eixo b, então as projeções e componentes de **R** seriam iguais.

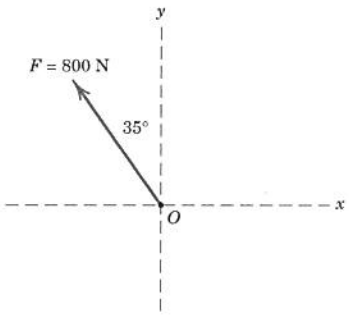


PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

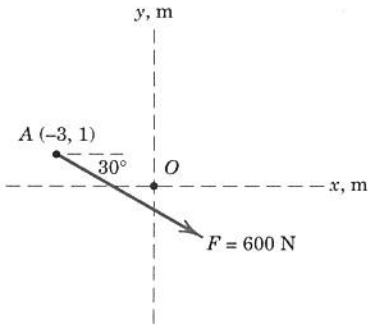
2/1 A força **F** tem um módulo de 800 N. Expresse **F** como um vetor, em termos dos vetores unitários **i** e **j**. Identifique os componentes escalares de **F** em x e y.

Resp. $\mathbf{F} = -459\mathbf{i} + 655\mathbf{j}$ N
$F_x = -459$ N, $F_y = 655$ N



Problema 2/1

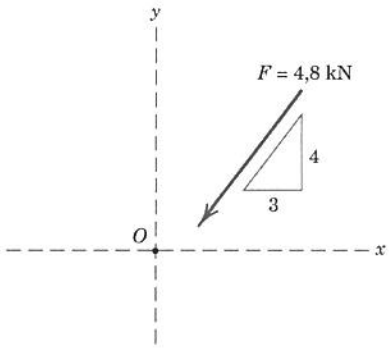
2/2 O módulo da força **F** é 600 N. Expresse **F** como um vetor, em termos dos vetores unitários **i** e **j**. Identifique os componentes escalares e vetoriais de **F**.



Problema 2/2

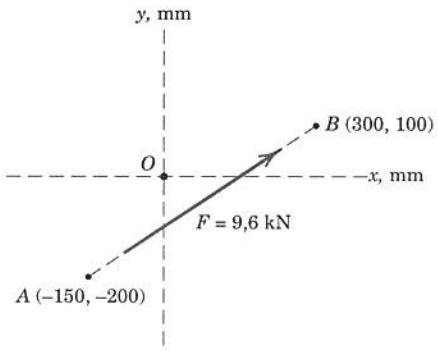
2/3 A inclinação da força **F** de 4,8 kN está especificada como mostrado na figura. Expresse **F** como um vetor, em termos dos vetores unitários **i** e **j**.

Resp. $\mathbf{F} = -2{,}88\mathbf{i} - 3{,}84\mathbf{j}$ kN



Problema 2/3

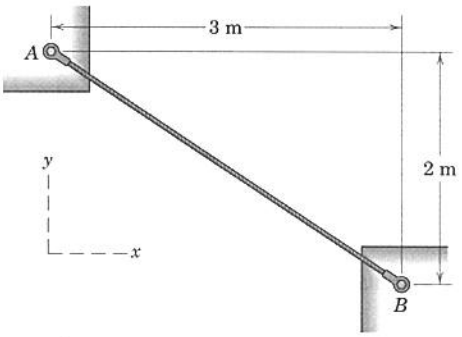
2/4 A linha de ação da força **F** de 9,6 kN passa pelos pontos A e B, como mostrado na figura. Determine os componentes escalares x e y de **F**.



Problema 2/4

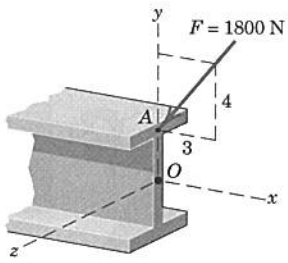
2/5 Um cabo esticado entre os suportes fixos A e B está sob uma tração T de 900 N. Usando os vetores unitários **i** e **j** expresse a tração como um vetor; primeiramente como uma força $\mathbf{T}_A$ atuando em A e, em segundo lugar, como uma força $\mathbf{T}_B$ atuando em B.

Resp. $\mathbf{T}_A = 749\mathbf{i} - 499\mathbf{j}$ N, $\mathbf{T}_B = -749\mathbf{i} + 499\mathbf{j}$ N



Problema 2/5

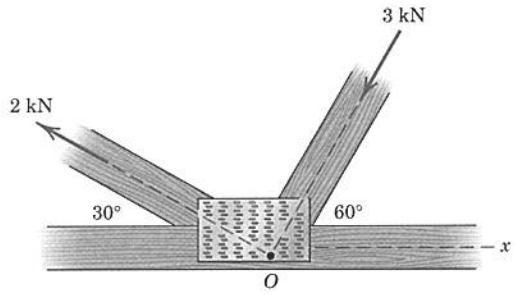
2/6 A força **F** de 1800 N é aplicada à extremidade da viga em I. Expresse **F** como um vetor, usando os vetores unitários **i** e **j**.



Problema 2/6

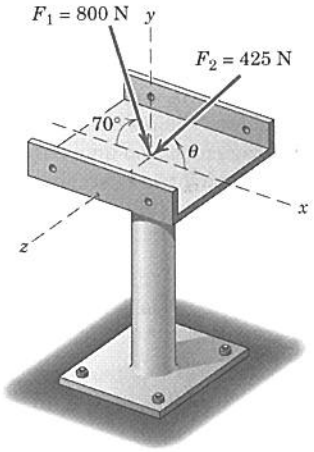
2/7 Os dois elementos estruturais, um sob tração e o outro sob compressão, exercem as forças indicadas no nó O. Determine o módulo da resultante **R** das duas forças e o ângulo θ que **R** faz com o eixo x positivo.

Resp. $R = 3{,}61$ kN, $\theta = 206°$



Problema 2/7

2/8 Duas forças são aplicadas ao suporte de construção, como mostrado. Determine o ângulo θ que faz com que a resultante das duas forças seja vertical. Determine o módulo R da resultante.

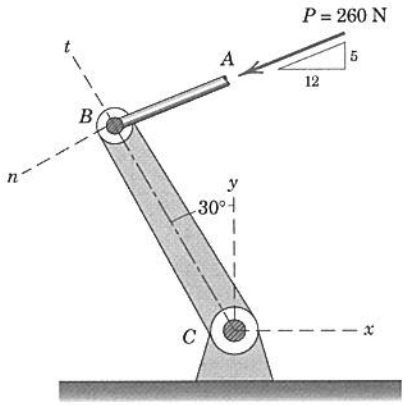


Problema 2/8

Problemas Representativos

2/9 No projeto de um mecanismo de controle é determinado que a barra AB transmite uma força $\mathbf{P}$ de 260 N à manivela BC. Determine os componentes escalares x e y de $\mathbf{P}$.

Resp. $P_x = -240$ N
$P_y = -100$ N

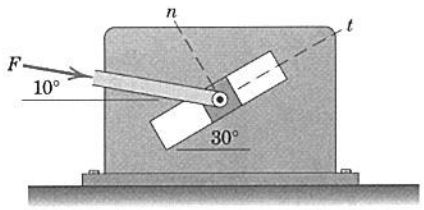


Problema 2/9

2/10 Para o mecanismo do Prob. 2/9, determine os componentes escalares P_t e P_n de $\mathbf{P}$, que são tangente e normal, respectivamente, à manivela BC.

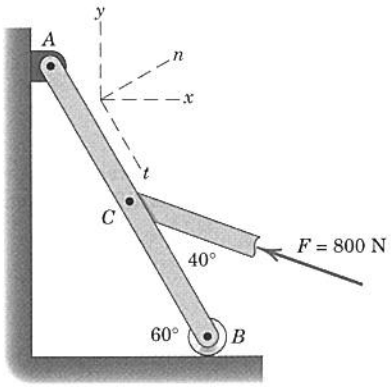
2/11 O componente t da força $\mathbf{F}$ vale 75 N. Determine o componente n e o módulo de $\mathbf{F}$.

Resp. $F_n = -62{,}9$ N, $F = 97{,}9$ N



Problema 2/11

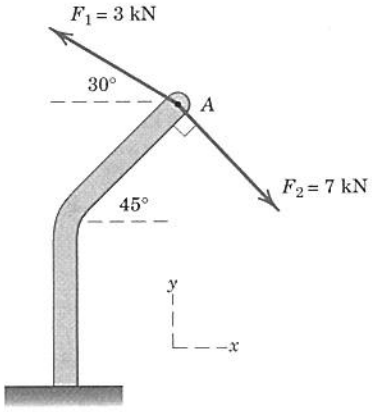
2/12 Uma força $\mathbf{F}$ de módulo 800 N é aplicada ao ponto C da barra AB, como mostrado. Determine os componentes x-y e n-t de $\mathbf{F}$.



Problema 2/12

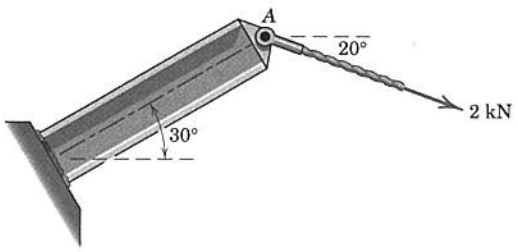
2/13 As duas forças mostradas atuam no ponto A da barra dobrada. Determine a resultante $\mathbf{R}$ das duas forças.

Resp. $\mathbf{R} = 2{,}35\mathbf{i} - 3{,}45\mathbf{j}$ kN



Problema 2/13

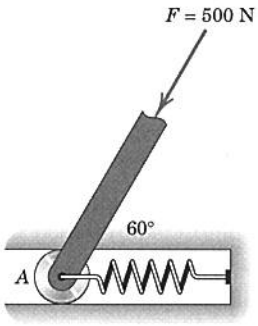
2/14 Para satisfazer limitações de projeto é necessário determinar o efeito da força trativa de 2 kN atuando no cabo, sobre o cisalhamento, a tração e a flexão da viga em I engastada. Com este propósito, substitua esta força por outra equivalente em A, formada por duas forças F_t, paralela, e F_n, perpendicular, à viga. Determine F_t e F_n.



Problema 2/14

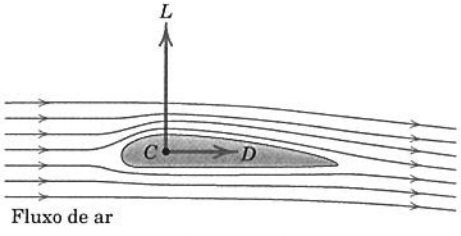
2/15 Determine o módulo F_s da força trativa atuando na mola, para que a resultante de $\mathbf{F}_s$ e de $\mathbf{F}$ seja uma força vertical. Determine o módulo R desta força resultante vertical.

Resp. $F_s = 250$ N, $R = 433$ N



Problema 2/15

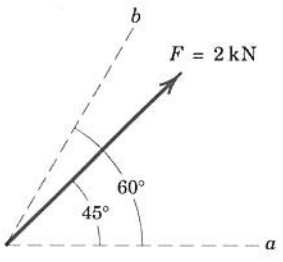
2/16 A razão entre a força de sustentação L e a força de arraste D, para um aerofólio simples, é $L/D = 10$. Se a força de sustentação em uma seção curta do aerofólio vale 200 N, calcule o módulo da força resultante $\mathbf{R}$ e do ângulo θ que ela faz com a horizontal.



Problema 2/16

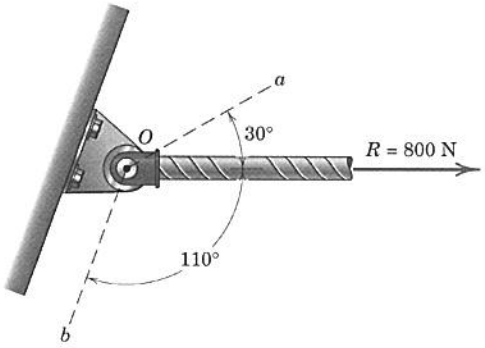
2/17 Determine os componentes da força de 2 kN ao longo dos eixos oblíquos a e b. Determine as projeções de $\mathbf{F}$ sobre os eixos a e b.

Resp. $F_a = 0{,}598$ kN, $F_b = 1{,}633$ kN
$P_a = 1{,}414$ kN, $P_b = 1{,}932$ kN



Problema 2/17

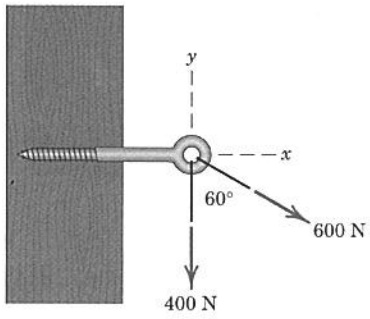
2/18 Determine os componentes escalares R_a e R_b da força $\mathbf{R}$ ao longo dos eixos não retangulares a e b. Determine também a projeção ortogonal P_a de $\mathbf{R}$ sobre o eixo a.



Problema 2/18

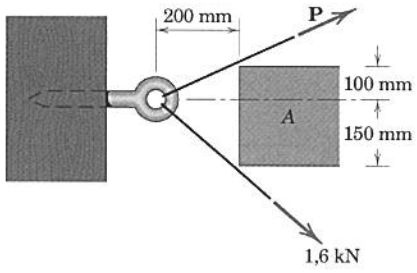
2/19 Determine a resultante $\mathbf{R}$ das duas forças mostradas (*a*) aplicando a regra do paralelogramo para a adição vetorial e (*b*) somando os componentes escalares.

Resp. $\mathbf{R} = 520\mathbf{i} - 700\mathbf{j}$ N



Problema 2/19

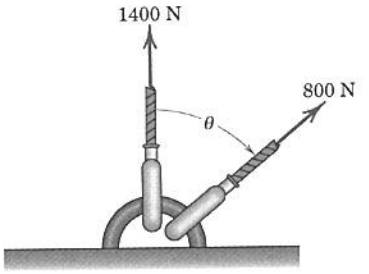
2/20 Deseja-se remover o pino da madeira pela aplicação de uma força ao longo de seu eixo horizontal. Um obstáculo A impede um acesso direto, de modo que duas forças, uma de 1,6 kN e a outra $\mathbf{P}$, são aplicadas por cabos, como mostrado. Calcule o módulo de $\mathbf{P}$ necessário para assegurar uma resultante $\mathbf{T}$ direcionada ao longo do pino. Determine também o valor de T.



Problema 2/20

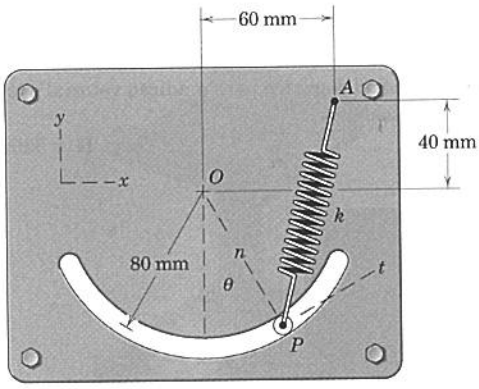
2/21 Em que ângulo θ uma força de 800 N deve ser aplicada para que a resultante $\mathbf{R}$ das duas forças tenha um módulo de 2000 N? Para esta condição, determine o ângulo β entre $\mathbf{R}$ e a vertical.

Resp. $\theta = 51{,}3°$, $\beta = 18{,}19°$



Problema 2/21

2/22 O comprimento original da mola de módulo $k = 1{,}2$ kN/m é 100 mm. Determine os componentes x e y da força que a mola exerce no pino P, quando ele está na posição $\theta = 30°$. (A força em uma mola é dada por $F = kx$, onde x é o alongamento da mola em relação ao seu comprimento original.)

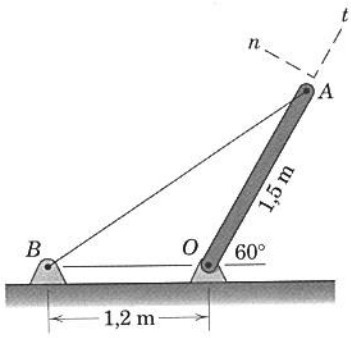


Problema 2/22

2/23 Faça referência ao enunciado e à figura do Prob. 2/22. Quando o pino P está na posição $\theta = 20°$, determine os componentes n e t da força F que a mola de módulo $k = 1{,}2$ kN/m exerce sobre o pino.

Resp. $F_n = 19{,}18$ N, $F_t = 13{,}84$ N

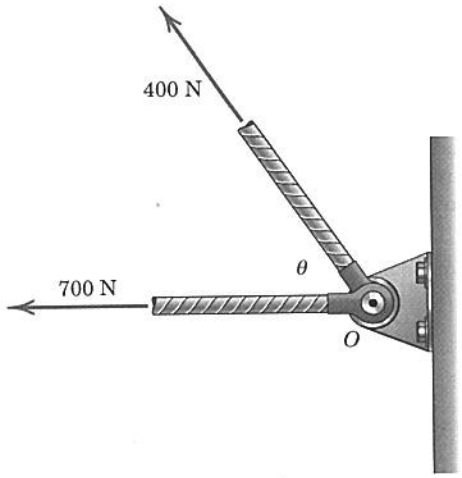
2/24 O cabo AB evita que a barra OA gire no sentido horário em torno do pivô O. Se a força trativa no cabo vale 750 N, determine os componentes n e t desta força, atuando no ponto A da barra.



Problema 2/24

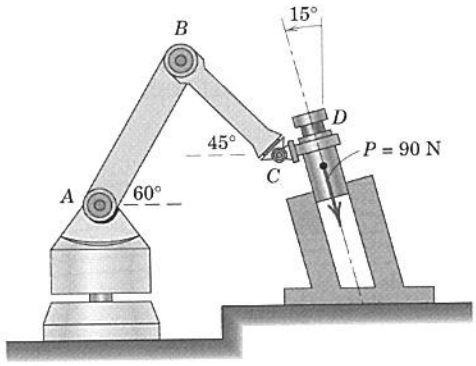
2/25 Em que ângulo θ deve ser aplicada uma força de 400 N, para que a resultante $\mathbf{R}$ das duas forças tenha um módulo de 1000 N? Para essa condição, qual será o ângulo β entre $\mathbf{R}$ e a horizontal?

Resp. $\theta = 51{,}3°$, $\beta = 18{,}19°$



Problema 2/25

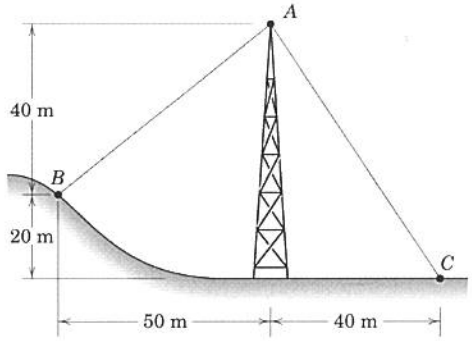
2/26 No projeto de um robô para colocar, sem folga, a pequena parte cilíndrica em um furo circular, o braço do robô deve exercer uma força P de 90 N na peça, paralelamente ao eixo do furo, como mostrado. Determine os componentes da força que a peça exerce *sobre* o robô ao longo dos eixos (*a*) paralelo e perpendicular ao braço AB e (*b*) paralelo e perpendicular ao braço BC.



Problema 2/26

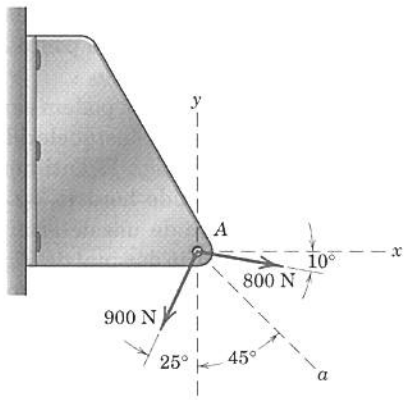
2/27 Os cabos de sustentação AB e AC estão presos no topo da torre de transmissão. A força trativa no cabo AC vale 8 kN. Determine a força trativa T necessária no cabo AB, tal que o efeito resultante das duas forças trativas nos cabos seja uma força direcionada para baixo no ponto A. Determine o módulo R desta força.

Resp. $T = 5{,}68$ kN, $R = 10{,}21$ kN



Problema 2/27

2/28 A placa de união está submetida às duas forças mostradas. Substitua-as por duas forças equivalentes, F_x na direção x e F_a na direção a. Determine os módulos de F_x e F_a. Resolva geometricamente e graficamente.



Problema 2/28

2/4 Momento

Além da tendência de mover um corpo na direção de sua aplicação, uma força pode também tender a girar um corpo em relação a um eixo. O eixo pode ser qualquer linha, que não intercepte ou não seja paralela à linha de ação da força. Esta tendência à rotação é conhecida como o *momento* **M** da força. O momento é também denominado *torque*.

Como um exemplo familiar do conceito de momento, considere a chave de grifo da Fig. 2/8*a*. Um efeito da força aplicada perpendicular ao cabo da chave é a tendência de girar o tubo em torno do seu eixo vertical. De quanto o tubo é girado depende tanto do módulo F da força quanto do comprimento efetivo d do cabo da chave. O senso comum mostra que puxar em direção que não é perpendicular ao cabo da chave é menos efetivo que puxar a 90°, como mostrado.

Momento em torno de um Ponto

A Fig. 2/8*b* mostra um corpo bidimensional submetido a uma força **F**, atuando em seu plano. O módulo do momento, ou a tendência da força de girar o corpo em torno do eixo *O*-*O* perpendicular ao plano do corpo, é proporcional tanto ao módulo da força quanto ao *braço de alavanca* d, que é a distância perpendicular do eixo até a linha de ação da força. Assim sendo, o módulo do momento é definido como

$$M = Fd \qquad (2/5)$$

O momento é um vetor **M** perpendicular ao plano do corpo. O sentido de **M** depende da direção na qual **F** tende a girar o corpo. A regra da mão direita, Fig. 2/8*c*, é usada para identificar este sentido. Representamos o momento de **F** em torno de *O*-*O* como um vetor apontando na direção do polegar, com os dedos curvados na direção da tendência da rotação.

O momento **M** obedece todas as regras de combinação vetorial e pode ser considerado um vetor móvel, com uma linha de ação coincidente com o eixo do momento. Em unidades SI, a unidade básica de momento no sistema inercial (LMT) é newton-metro (N · m) e no sistema gravitacional (LFT) é quilograma-força.metro (kgf.m).

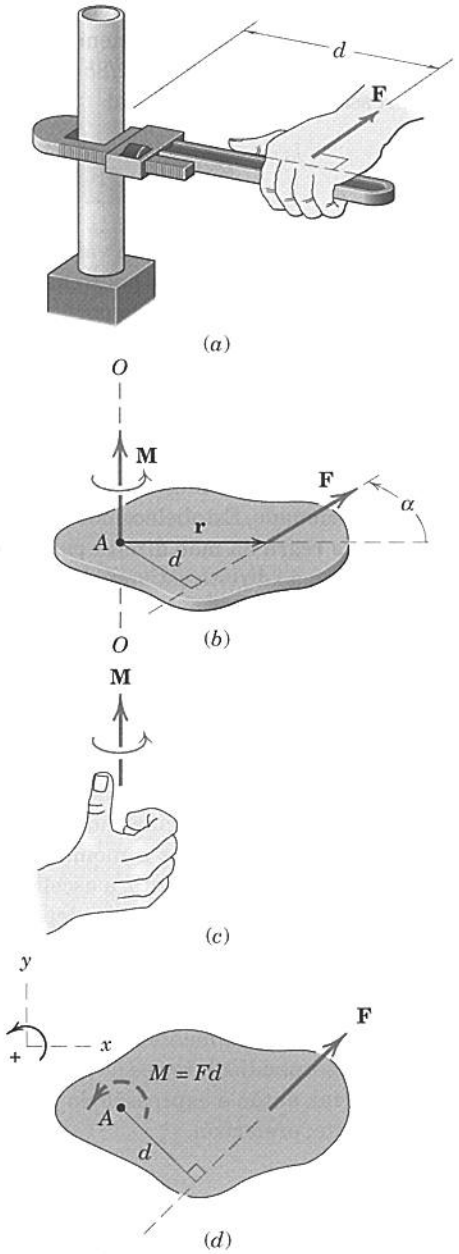


Figura 2/8

Quando se lida com forças que atuam todas em um dado plano, falamos costumeiramente do momento *em relação a um ponto*. Com isto queremos dizer: o momento em relação a um eixo normal ao plano e passando pelo ponto. Assim, o momento da força **F** em relação ao ponto *A* na Fig. 2/8*d* tem o módulo $M = Fd$ e é anti-horário.

As direções dos momentos podem ser consideradas usando uma convenção de sinais estabelecida, tal como um sinal (+) para momentos no sentido anti-horário e um sinal (−) para momentos no sentido horário, ou vice-versa. A consistência de sinais dentro de um determinado problema é essencial. Para a convenção de sinal da Fig. 2/8*d*, o momento de **F** em torno do ponto *A* (ou em relação ao eixo *z* passando pelo ponto *A*) é positivo. A flecha curva da figura é uma maneira conveniente de representar momentos em uma análise bidimensional.

O Produto Vetorial

Em alguns dos problemas bidimensionais e muitos dos tridimensionais que se seguirão, é conveniente usar um enfoque vetorial para o cálculo de momentos. O momento de **F** em relação ao ponto *A* da Fig. 2/8*b* pode ser representado pela expressão do produto vetorial

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{2/6}$$

onde **r** é um vetor de posição que vai do ponto de referência do momento, *A*, para *qualquer* ponto na linha de ação de **F**. O módulo desta expressão é dado por*

$$M = Fr \operatorname{sen} \alpha = Fd \tag{2/7}$$

que concorda com o módulo do momento dado pela Eq. 2/5. Observe que o braço de alavanca $d = r \operatorname{sen} \alpha$ não depende do ponto particular sobre a linha de ação de **F**, para o qual o vetor **r** está direcionado. Estabelecemos a direção e o sentido de **M** aplicando a regra da mão direita para a seqüência **r** × **F**. Se os dedos da mão direita estiverem curvados na direção da rotação, do sentido positivo de **r** para o sentido positivo de **F**, então o polegar aponta no sentido positivo de **M**.

Devemos manter a seqüência **r** × **F**, porque a seqüência **F** × **r** produziria um vetor com o sentido oposto ao do momento correto. De modo similar ao enfoque com escalares, o momento **M** pode ser entendido como o momento em torno do ponto *A* ou como o momento em relação à linha *O*-*O* que passa pelo ponto *A* e é perpendicular ao plano contendo os vetores **r** e **F**. Quando avaliamos o momento de uma força em relação a um determinado ponto, a escolha entre usar o produto vetorial ou a expressão escalar depende de como a geometria do problema está especificada. Se conhecemos, ou podemos facilmente determinar, a distância perpendicular entre a linha de ação da força e o centro do momento, então o enfoque escalar é geralmente mais simples. Se, entretanto, **F** e **r** não são perpendiculares e são facilmente expressos em notação vetorial, então a expressão do produto vetorial será, freqüentemente, preferível.

*Veja o item 7 no Módulo C/7 do Apêndice C para informação adicional sobre o produto vetorial.

Na Seção B deste capítulo veremos como a formulação vetorial do momento de uma força é especialmente útil para a determinação do momento de uma força em relação a um ponto em situações tridimensionais.

Teorema de Varignon

Um dos princípios mais úteis da mecânica é o *teorema de Varignon*, que enuncia que o momento de uma força em relação a qualquer ponto é igual à soma dos momentos dos componentes desta força em relação ao mesmo ponto.

Para provar este teorema, considere a força **R** atuando em um plano do corpo mostrado na Fig. 2/9*a*. As forças **P** e **Q** representam quaisquer dois componentes não retangulares de **R**. O momento de **R** em relação ao ponto *O* é

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

Como $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$, podemos escrever

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$$

Usando a propriedade distributiva para o produto vetorial, temos

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \mathbf{Q} \tag{2/8}$$

que mostra que o momento de **R** em relação a *O* é igual à soma dos momentos de seus componentes **P** e **Q** em relação a *O*, provando o teorema.

O teorema de Varignon não precisa ser limitado ao caso de dois componentes, sendo aplicável igualmente bem a três ou mais componentes. Assim, poderíamos ter usado qualquer número de componentes concorrentes de **R** na prova anterior.*

A Fig. 2/9*b* ilustra a utilidade do teorema de Varignon. O momento de **R** em relação ao ponto *O* é Rd. Entretanto, se *d* for mais difícil de determinar do que *p* e *q*, podemos projetar **R** nos seus componentes **P** e **Q** e calcular o momento como

$$M_O = Rd = -pP + qQ$$

onde tomamos o sentido horário do momento como sendo positivo.

O Exemplo 2/5 mostra como o teorema de Varignon pode nos ajudar a calcular momentos.

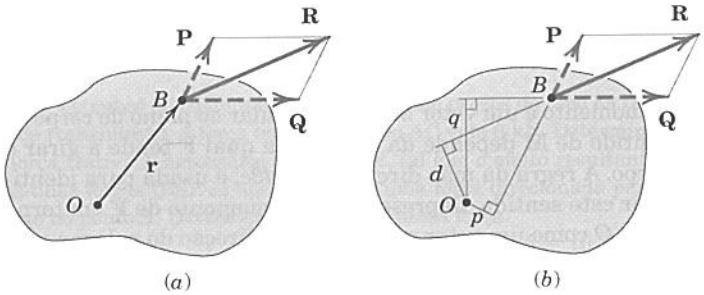
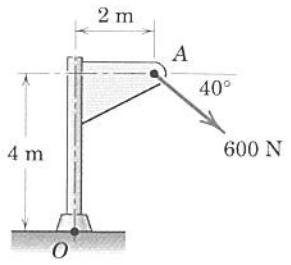


Figura 2/9

*Como postulado originalmente, o teorema de Varignon estava limitado ao caso de dois componentes concorrentes de uma determinada força. Veja *The Science of Mechanics*, por Ernst Mach, publicado originalmente em 1883.

Exemplo 2/5

Calcule, de cinco maneiras diferentes, o módulo do momento da força de 600 N em relação ao ponto O da base.

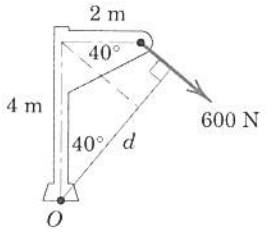


Solução. *(I)* O braço de alavanca da força de 600 N é

$$d = 4 \cos 40° + 2 \operatorname{sen} 40° = 4{,}35 \text{ m}$$

① Usando $M = Fd$, o momento é no sentido horário e tem o módulo

$$M_O = 600(4{,}35) = 2610 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

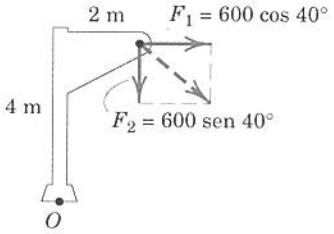


(II) Substitua a força por seus componentes retangulares em A

$$F_1 = 600 \cos 40° = 460 \text{ N}, \qquad F_2 = 600 \operatorname{sen} 40° = 386 \text{ N}$$

Pelo teorema de Varignon, o momento se torna

② $$M_O = 460(4) + 386(2) = 2610 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



(III) Pelo princípio da transmissibilidade, mova a força de 600 N ao longo de sua linha de ação até o ponto B, o que elimina o momento do componente F_2. O braço de alavanca de F_1 fica sendo

$$d_1 = 4 + 2 \tan 40° = 5{,}68 \text{ m}$$

e o momento é

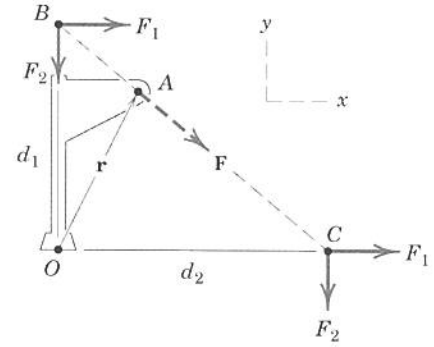
$$M_O = 460(5{,}68) = 2610 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

③ *(IV)* Movendo a força até o ponto C, elimina-se o momento do componente F_1. O braço de alavanca de F_2 fica sendo

$$d_2 = 2 + 4 \cot 40° = 6{,}77 \text{ m}$$

e o momento é

$$M_O = 386(6{,}77) = 2610 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



(V) Pela expressão vetorial para um momento, e usando o sistema de coordenadas indicado na figura juntamente com os procedimentos para calcular produtos vetoriais, temos

④ $$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \times 600(\mathbf{i} \cos 40° - \mathbf{j} \operatorname{sen} 40°)$$

$$= -2610\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

O sinal de menos indica que o vetor está na direção negativa de z. O módulo da expressão vetorial é

$$M_O = 2610 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestões Úteis

① A geometria necessária aqui e em outros problemas semelhantes não deve causar dificuldades se o esboço for cuidadosamente desenhado.

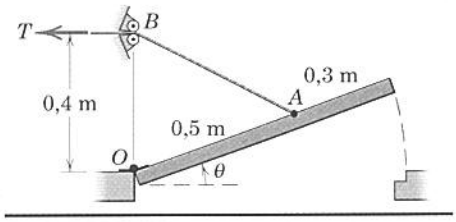
② Este procedimento é freqüentemente o enfoque mais curto.

③ O fato dos pontos B e C não estarem no próprio corpo não deve causar preocupação, pois o cálculo matemático do momento de uma força não requer que a força esteja no corpo.

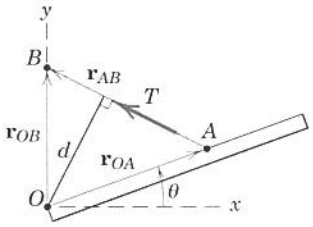
④ Escolhas alternativas para a posição do vetor $\mathbf{r}$ são $\mathbf{r} = d_1\mathbf{j} = 5{,}68\mathbf{j}$ m e $\mathbf{r} = d_2\mathbf{i} = 6{,}77\mathbf{i}$ m.

Exemplo 2/6

O alçapão AO é levantado pelo cabo AB, o qual passa pelas pequenas polias guia, sem atrito, em B. A força trativa em qualquer ponto do cabo vale T e essa força, ao ser aplicada em A, provoca um momento M_o em torno da dobradiça em O. Plote a quantidade M_o/T em função do ângulo θ de elevação do alçapão para a faixa $0 \leq \theta \leq 90°$ e indique os valores mínimo e máximo. Qual é o significado físico dessa razão?



Solução. Começaremos construindo uma figura que mostre a força trativa **T** atuando diretamente no alçapão, a qual está mostrada em uma posição angular θ arbitrária. Deve ficar claro que a direção de **T** varia conforme θ varia. Para se lidar com essa variação, escrevemos um vetor unitário $\mathbf{n}_{AB}$ que "representa" **T**:



① $$\mathbf{n}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{\mathbf{r}_{OB} - \mathbf{r}_{OA}}{r_{AB}}$$

Usando as coordenadas x-y da nossa figura, podemos escrever

② $$\mathbf{r}_{OB} = 0{,}4\mathbf{j} \text{ m} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_{OA} = 0{,}5(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \text{ m}$$

Assim

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AB} &= \mathbf{r}_{OB} - \mathbf{r}_{OA} = 0{,}4\mathbf{j} - (0{,}5)(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \\ &= -0{,}5\cos\theta\mathbf{i} + (0{,}4 - 0{,}5\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} \text{ m}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}r_{AB} &= \sqrt{(0{,}5\cos\theta)^2 + (0{,}4 - 0{,}5\operatorname{sen}\theta)^2} \\ &= \sqrt{0{,}41 - 0{,}4\operatorname{sen}\theta} \text{ m}\end{aligned}$$

O vetor unitário desejado é

$$\mathbf{n}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-0{,}5\cos\theta\mathbf{i} + (0{,}4 - 0{,}5\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}}{\sqrt{0{,}41 - 0{,}4\operatorname{sen}\theta}}$$

Nosso vetor de tração pode agora ser escrito como

$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{AB} = T\left[\frac{-0{,}5\cos\theta\mathbf{i} + (0{,}4 - 0{,}5\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}}{\sqrt{0{,}41 - 0{,}4\operatorname{sen}\theta}}\right]$$

③ O momento de **T** em torno do ponto O, em termos vetoriais, é $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{T}$, onde $\mathbf{r}_{OB} = 0{,}4\mathbf{j}$ m, ou

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= 0{,}4\mathbf{j} \times T\left[\frac{-0{,}5\cos\theta\mathbf{i} + (0{,}4 - 0{,}5\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}}{\sqrt{0{,}41 - 0{,}4\operatorname{sen}\theta}}\right] \\ &= \frac{0{,}2T\cos\theta}{\sqrt{0{,}41 - 0{,}4\operatorname{sen}\theta}}\mathbf{k}\end{aligned}$$

O módulo de $\mathbf{M}_O$ é

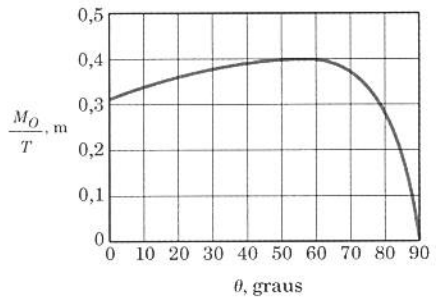
$$M_O = \frac{0{,}2T\cos\theta}{\sqrt{0{,}41 - 0{,}4\operatorname{sen}\theta}}$$

e a razão pedida é

$$\frac{M_O}{T} = \frac{0{,}2\cos\theta}{\sqrt{0{,}41 - 0{,}4\operatorname{sen}\theta}} \qquad \textit{Resp.}$$

que está representada no gráfico ao lado. A expressão M_o/T é o braço de alavanca d (em metros) que vai de O até a linha de ação de **T**. Ele tem um valor máximo de 0,4 m em $\theta = 53{,}1°$ (onde **T** é horizontal) e um valor mínimo de 0 em $\theta = 90°$ (onde **T** é vertical). A expressão é válida mesmo se T variar.

Esse exemplo trata dos momentos em sistemas de força bidimensionais e também realça as vantagens de desenvolver uma solução para uma posição arbitrária, de modo que o comportamento em relação a uma faixa de posições possa ser examinado.



Sugestões Úteis

① Lembre que qualquer vetor unitário pode ser escrito como um vetor dividido pelo seu módulo. Nesse caso, o vetor no numerador é um vetor de posição.

② Lembre que qualquer vetor pode ser escrito como o módulo vezes um vetor unitário "representativo".

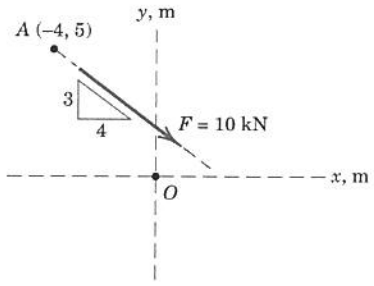
③ Na expressão $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, o vetor de posição **r** vai *desde* o centro de momento *até* qualquer ponto sobre a linha de ação de **F**. Aqui, $\mathbf{r}_{OB}$ é mais conveniente do que $\mathbf{r}_{OA}$.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

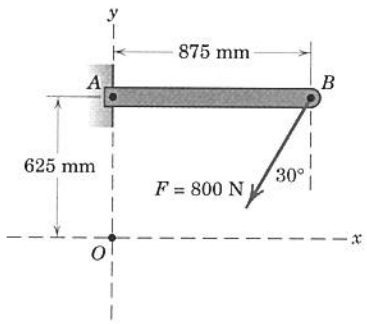
2/29 A força **F** de 10 kN é aplicada no ponto *A*. Calcule o momento de **F** em relação ao ponto *O*. Determine os pontos nos eixos *x* e *y* em relação aos quais o momento de **F** vale zero.

Resp. $M_O = 16$ kN · m no sentido horário
$(x, y) = (2{,}67; 0)$ m e $(0; 2)$ m



Problema 2/29

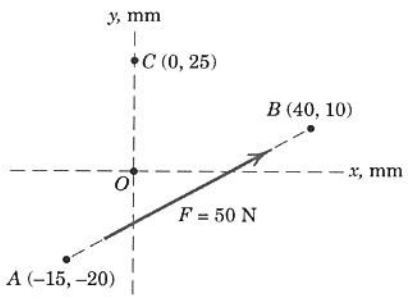
2/30 Determine o momento da força de 800 N em relação ao ponto *A* e em relação ao ponto *O*.



Problema 2/30

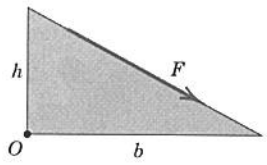
2/31 Determine o momento da força de 50 N (*a*) em relação ao ponto *O*, usando o teorema de Varignon e (*b*) em relação ao ponto *C*, por um enfoque vetorial.

Resp. $M_O = 519$ N · mm no sentido anti-horário, $\mathbf{M}_C = 1616\mathbf{k}$ N · mm



Problema 2/31

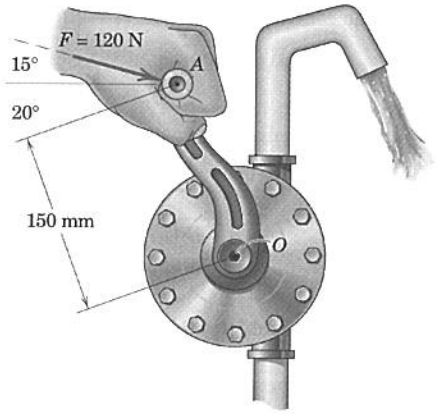
2/32 A força de módulo *F* atua ao longo da aresta da placa triangular. Determine o momento de **F** em relação ao ponto *O*.



Problema 2/32

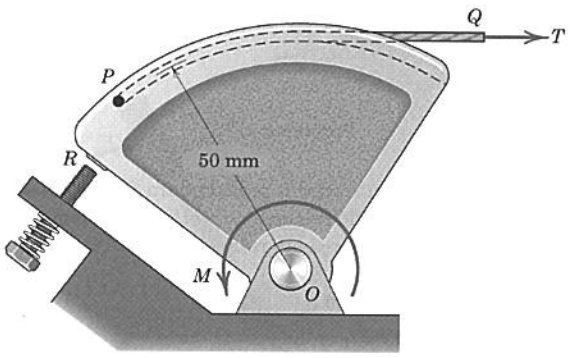
2/33 Uma pessoa exerce uma força de 120 N sobre a manopla, ao girar continuamente a bomba de água, como mostrado. Determine o momento dessa força em relação ao ponto *O*.

Resp. $M_O = 14{,}74$ N · m no sentido horário



Problema 2/33

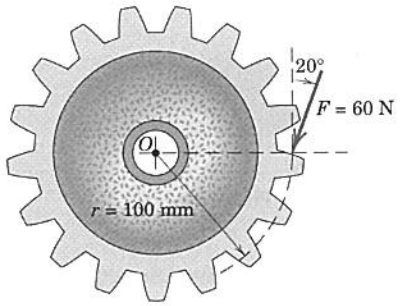
2/34 O componente de controle do acelerador pivota livremente em *O*. Se uma mola de torção interna exerce um momento de retorno $M = 1{,}8$ N · m sobre o componente, quando ele está na posição mostrada, determine, para a finalidade do projeto, a força trativa *T* necessária no cabo do acelerador para que o momento resultante em torno de *O* seja zero. Observe que quando *T* é zero, o componente se apóia no parafuso de ajuste da marcha lenta em *R*.



Problema 2/34

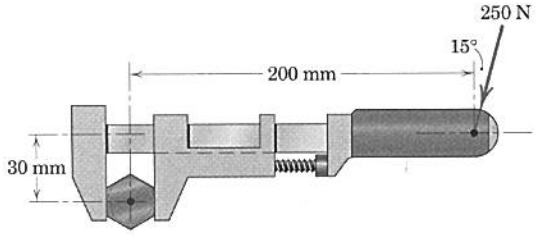
2/35 A força **F** de módulo 60 N é aplicada à roda dentada. Determine o momento de **F** em relação ao ponto *O*.

Resp. $M_O = 5{,}64$ N · m no sentido horário



Problema 2/35

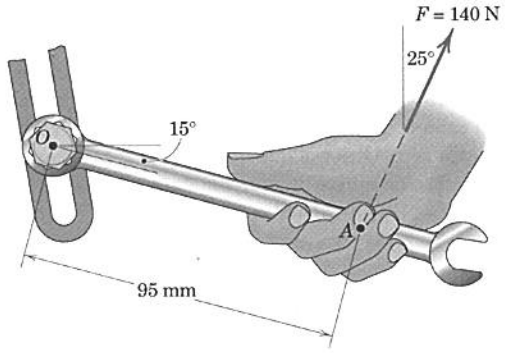
2/36 Calcule o momento da força de 250 N na manopla da chave inglesa em relação ao centro do parafuso.



Problema 2/36

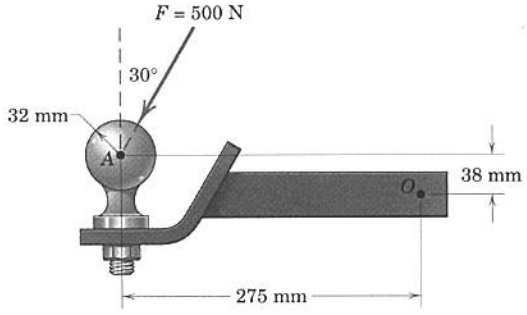
2/37 Um mecânico puxa a chave de boca de 13 mm com a força de 140 N mostrada. Determine o momento dessa força em relação ao centro O do parafuso.

Resp. $M_O = 13{,}10$ N · m no sentido anti-horário



Problema 2/37

2/38 À medida que um *trailer* é puxado para frente, a força F = 500 N é aplicada à esfera do reboque do *trailer*, como mostrado. Determine o momento dessa força em relação ao ponto O.

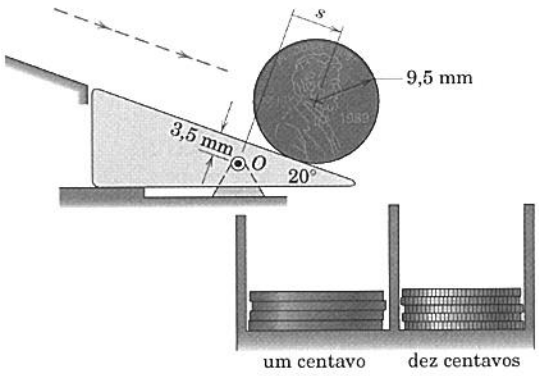


Problema 2/38

Problemas Representativos

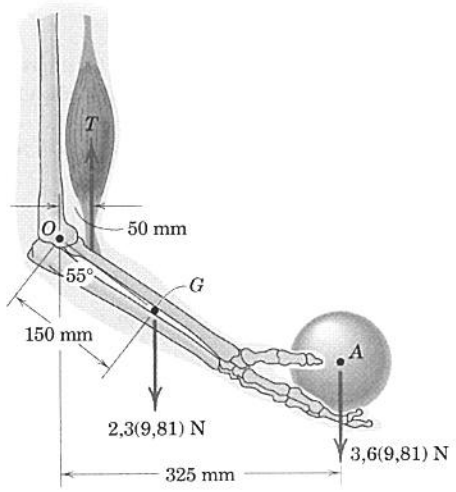
2/39 Parte de um separador mecânico de moedas funciona como se segue: Moedas de um e dez centavos rolam por um plano inclinado de 20°, sendo que a parte triangular final do separador gira livremente em relação a um eixo horizontal passando por O. As moedas de 10 centavos são suficientemente leves (2,28 gramas cada), de modo que a peça triangular permanece parada e as moedas rolam para a caixa de coleta à direita. As moedas de 1 centavo, por outro lado, são suficientemente pesadas (3,06 gramas cada), de forma que a peça triangular gira no sentido horário e as moedas caem na caixa de coleta à esquerda. Determine o momento em torno de O, causado pelo peso de uma moeda de 1 centavo em função da distância s em milímetros.

Resp. $M_O = 0{,}1335 + 0{,}0282s$ N · mm (para s em mm)



Problema 2/39

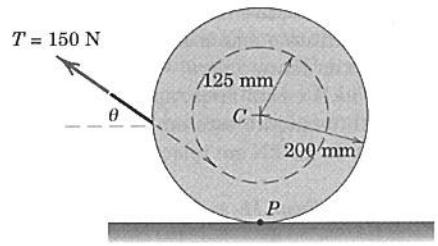
2/40 Elementos do braço são mostrados na figura. A massa do antebraço é de 2,3 kg, com centro de massa em G. Determine o momento combinado em relação ao cotovelo em O dos pesos do antebraço e da esfera homogênea de 3,6 kg. Qual deve ser a força trativa no bíceps, de modo que o momento total em relação a O seja zero?



Problema 2/40

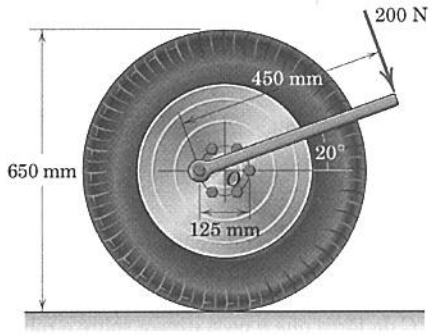
2/41 Um puxão T de 150 N é dado em uma corda, que está firmemente enrolada na parte interna do tambor. Determine o momento de T em relação ao centro do tambor em C. Em que ângulo θ, T deve ser aplicado de modo que o momento em torno do ponto de contato P seja zero?

Resp. $M_C = 18{,}75$ N · m no sentido horário, $\theta = 51{,}3°$



Problema 2/41

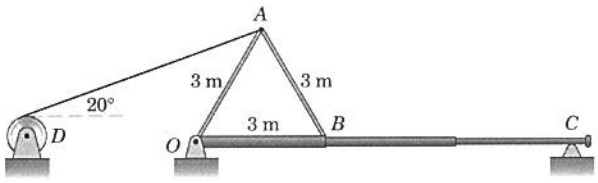
2/42 Uma força de 200 N é aplicada na extremidade da chave de boca para apertar um parafuso que fixa a roda ao eixo. Para a posição mostrada da chave, determine o momento M produzido por esta força em relação ao centro O da roda.



Problema 2/42

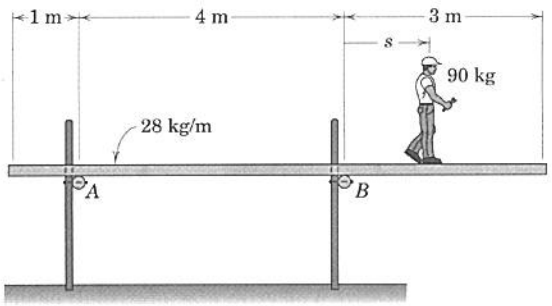
2/43 Para levantar o mastro OC, uma armação leve OAB é presa ao mastro e uma força trativa de 3,2 kN é aplicada ao cabo de sustentação pelo guincho em D. Calcule o momento M_O desta força trativa em relação à dobradiça no ponto O.

Resp. $M_O = 6{,}17$ kN · m no sentido anti-horário



Problema 2/43

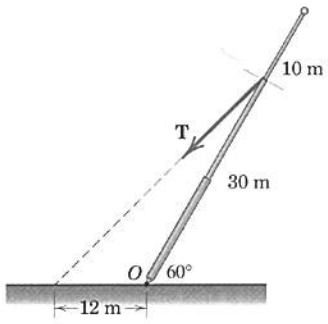
2/44 A plataforma uniforme, que tem uma massa por unidade de comprimento de 28 kg/m, está simplesmente apoiada sobre barras de apoio em A e em B. Um trabalhador de construção civil com 90 kg sai do ponto B e anda para a direita. Em que posição s o momento combinado do peso do homem e da plataforma será zero em relação a B?



Problema 2/44

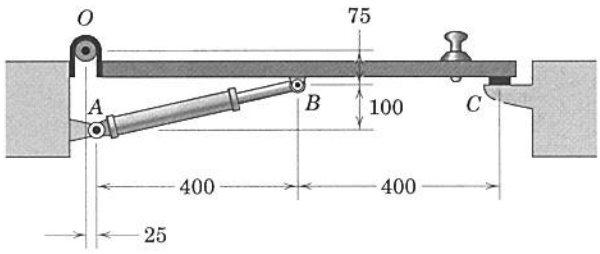
2/45 Ao se levantar o poste a partir da posição mostrada, a força trativa T no cabo deve gerar um momento de 72 kN · m em torno de O. Determine T.

Resp. $T = 8{,}65$ kN



Problema 2/45

2/46 A força exercida pelo amortecedor AB sobre a porta vale 40 N e está direcionada ao longo da linha AB. Esta força tende a manter a porta fechada. Calcule o momento desta força em relação à dobradiça O. Que força F_C, normal ao plano da porta, deve ser exercida sobre a porta pelo batente em C, de modo que o momento combinado das duas forças em relação a O seja zero?

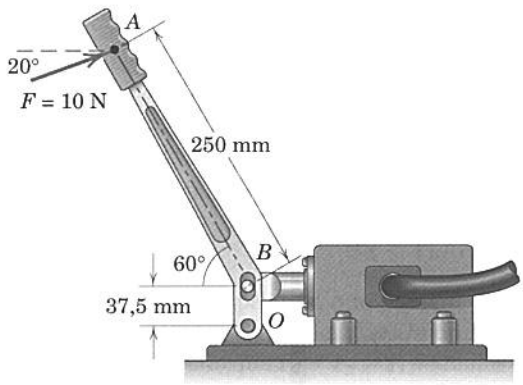


Dimensões em milímetros

Problema 2/46

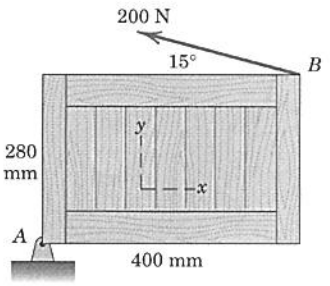
2/47 A força de 10 N é aplicada sobre a manopla da válvula de controle hidráulico, como mostrado. Calcule o momento dessa força em relação ao ponto O.

Resp. $M_O = 2{,}81$ N · m no sentido horário



Problema 2/47

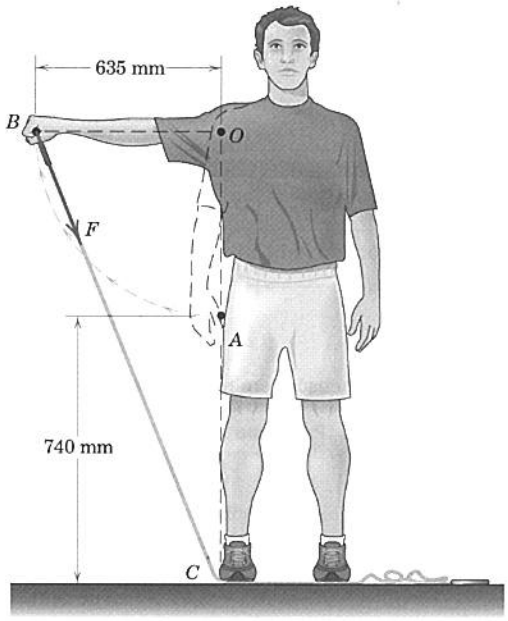
2/48 Calcule o momento M_A da força de 200 N em relação ao ponto A usando três métodos escalares e um método vetorial.



Problema 2/48

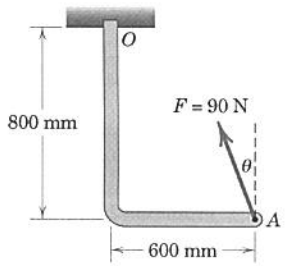
2/49 Um praticante de exercício começa com seu braço na posição relaxada *OA*, na qual a fita elástica não está esticada. Ele então gira seu braço para a posição horizontal *OB*. O módulo elástico da fita é $k = 60$ N/m — ou seja, uma força de 60 N é necessária para cada metro adicional de alongamento da fita. Determine o momento em torno de *O* devido à força que a fita exerce sobre a mão *B*.

Resp. $M_O = 26{,}8$ N · m no sentido anti-horário



Problema 2/49

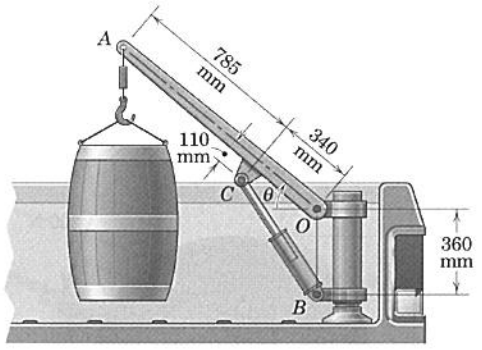
2/50 (*a*) Calcule o momento da força de 90 N em relação ao ponto *O* para a condição $\theta = 15°$. Determine também o valor de θ para o qual o momento em relação a *O* é (*b*) zero e (*c*) máximo.



Problema 2/50

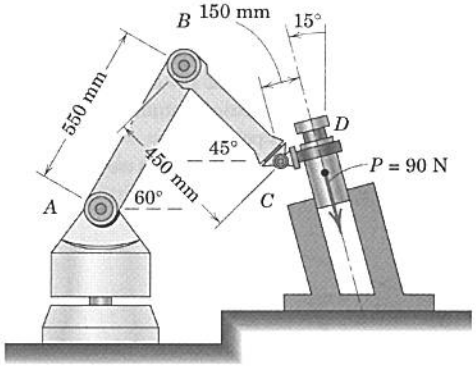
2/51 Um pequeno guindaste é montado na lateral da caçamba de uma caminhonete e facilita o manuseio de cargas pesadas. Quando o ângulo de elevação da lança vale $\theta = 40°$, a força no cilindro hidráulico *BC* vale 4,5 kN e esta força, aplicada no ponto *C*, está no sentido de *B* para *C* (o cilindro está em compressão). Determine o momento desta força de 4,5 kN em relação ao ponto de rotação *O* da lança.

Resp. $M_O = 0{,}902$ kN · m no sentido horário



Problema 2/51

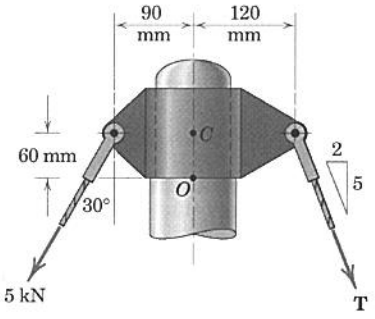
2/52 Critérios de projeto requerem, como mostrado, que o robô exerça a força de 90 N sobre uma peça cilíndrica enquanto a está inserindo em um furo circular. Determine o momento em relação aos pontos *A*, *B* e *C* da força que a peça exerce sobre o robô.



Problema 2/52

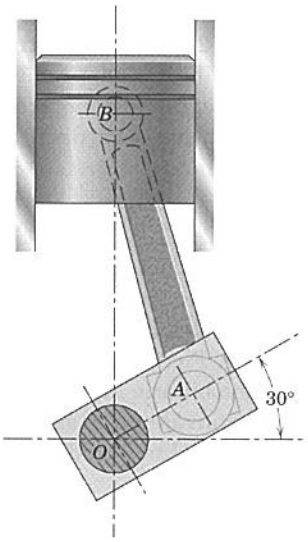
2/53 A presilha no topo de um mastro suporta as duas forças mostradas. Determine o módulo de **T** que não causará momento (momento nulo) no ponto *O*.

Resp. $T = 4{,}04$ kN



Problema 2/53

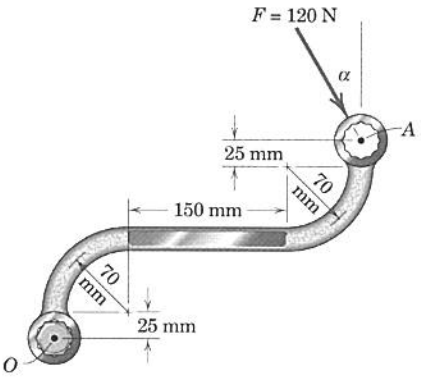
2/54 O pistão, biela e eixo de manivela de um motor diesel são mostrados na figura. A distância OA vale metade do curso de 200 mm, e o comprimento AB da biela vale 350 mm. Para a posição indicada, a biela está sob compressão de 16 kN ao longo de AB. Determine o momento M desta força em relação ao eixo O do eixo de manivela.



Problema 2/54

2/55 A força de 120 N é aplicada a uma extremidade da chave curva, como mostrado. Se $\alpha = 30°$, calcule o momento de F em relação ao centro O do parafuso. Determine o valor de α que maximizaria o momento em relação a O. Dê o valor deste momento máximo.

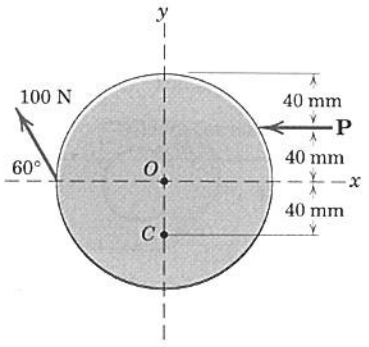
Resp. $M_O = 41{,}5$ N · m no sentido horário
$\alpha = 33{,}2°$, $(M_O)_{máx} = 41{,}6$ N · m no sentido horário.



Problema 2/55

▶**2/56** Se o momento combinado das duas forças em relação ao ponto C é zero, determine:
(*a*) o módulo da força **P**;
(*b*) o módulo R da resultante das duas forças;
(*c*) as coordenadas x e y do ponto A sobre a periferia da roda, em relação ao qual o momento combinado das duas forças é máximo;
(*d*) o momento combinado M_A das duas forças em relação a A.

Resp. (*a*) $P = 61{,}6$ N
(*b*) $R = 141{,}3$ N
(*c*) $x = 49{,}0$ mm, $y = 63{,}2$ mm
(*d*) $M_A = 15{,}77$ N · m no sentido horário



Problema 2/56

2/5 Binário

O momento produzido por duas forças não colineares, iguais e opostas é chamado de *binário*. Binários têm determinadas propriedades particulares e têm aplicações importantes em mecânica.

Considere a ação de duas forças iguais e opostas **F** e $-\mathbf{F}$, separadas por uma distância d, como mostrado na Fig. 2/10*a*. Estas duas forças não podem ser combinadas em uma única força, porque sua soma em todas as direções é zero. Seu único efeito é produzir uma tendência à rotação. O momento combinado das duas forças em relação a um eixo normal ao seu plano e passando por qualquer ponto em seu plano, tal como O, é o binário **M**. Este momento tem módulo

$$M = F(a + d) - Fa$$

ou

$$M = Fd$$

Para o caso ilustrado, sua direção é anti-horária quando visto de cima. Observe, especialmente, que o módulo do binário é independente da distância a que localiza as forças em relação ao centro do momento O. Segue-se que o momento devido a um binário tem o mesmo valor para todos os centros de momento.

Método da Álgebra Vetorial

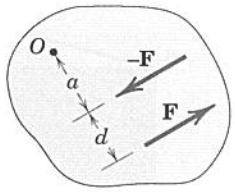
Podemos também expressar o momento devido a um binário usando álgebra vetorial. Com a notação do produto vetorial da Eq. 2/6, o momento combinado das forças que formam o binário da Fig. 2/10*b* em relação ao ponto O é

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

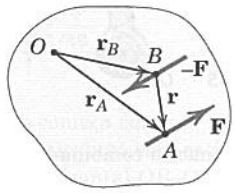
onde $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$ são vetores de posição, que partem do ponto O para pontos arbitrários A e B sobre as linhas de ação de **F** e $-\mathbf{F}$, respectivamente. Dado que $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, podemos expressar **M** como

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

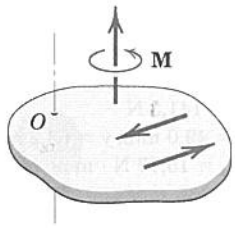
Aqui, novamente, a expressão do momento não faz referência ao centro do momento O e, deste modo, é a mesma para todos



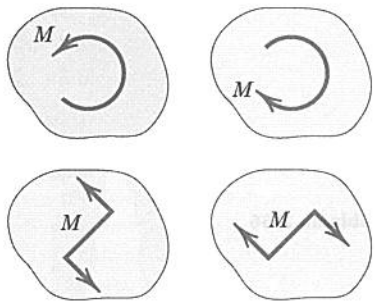
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2/10

os centros de momento. Assim, podemos representar **M** por um vetor livre, como mostrado na Fig. 2/10*c*, onde a direção de **M** é normal ao plano do binário e o sentido de **M** é estabelecido pela regra da mão direita.

Como o vetor **M** do binário é sempre perpendicular ao plano das forças que formam o binário, na análise bidimensional podemos representar o sentido do vetor do binário como horário ou anti-horário por meio de uma das convenções mostradas na Fig. 2.10*d*. Posteriormente, quando lidarmos com vetores de binários em problemas tridimensionais, faremos uso integral da notação vetorial para representá-los e seu sentido será dado diretamente pelo cálculo matemático.

Binários Equivalentes

Mudar os valores de F e d não altera um binário, enquanto o produto Fd permanecer o mesmo. Do mesmo modo, um binário não é afetado se as forças atuam em um plano diferente, porém paralelo. A Fig. 2/11 mostra quatro diferentes configurações do mesmo binário **M**. Em cada um dos quatro casos, os binários são equivalentes e são descritos pelo mesmo vetor livre, que representa as tendências idênticas de rotação dos corpos.

Sistemas Força-Binário

O efeito de uma força agindo sobre um corpo é a tendência de empurrar ou puxar o corpo na direção da força, e de girar o corpo em relação a qualquer eixo fixo que não intercepte a linha da força. Podemos representar este efeito dual mais facilmente substituindo a força dada por uma força igual e paralela, e por um binário que compense a mudança no momento devido à força.

A substituição de uma força por uma força e um binário está ilustrada na Fig. 2/12, onde a força dada **F**, atuando no ponto A, é substituída por uma força igual **F** em um ponto B qualquer e pelo binário anti-horário $M = Fd$. A modificação está mostrada na figura do meio, onde forças iguais e opostas **F** e **−F** são adicionadas no ponto B, sem introduzir qualquer efeito externo sobre o corpo. Vemos agora que a força original em A e a força igual e de sinal oposto em B formam um binário $M = Fd$, que é anti-horário para o exemplo escolhido, como

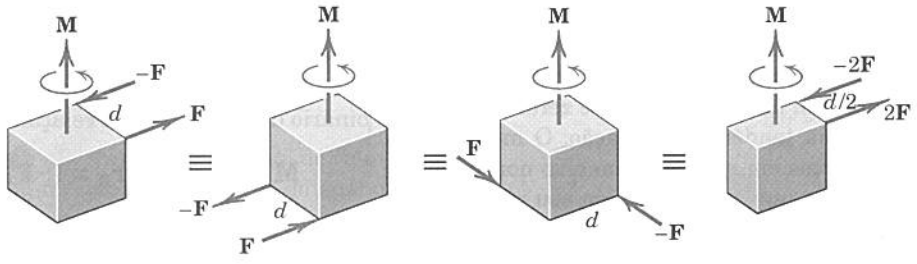


Figura 2/11

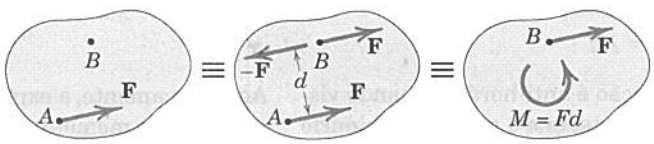


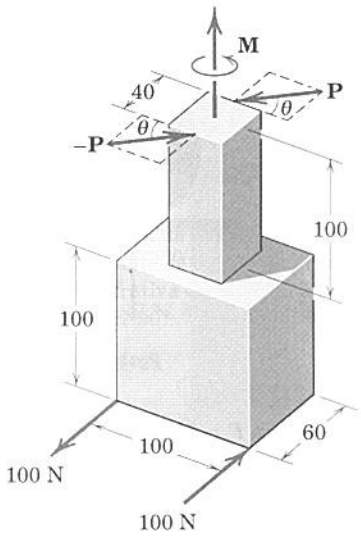
Figura 2/12

mostrado na parte direita da figura. Assim, substituímos a força original em A pela mesma força atuando em um ponto diferente B e por um binário, sem alterar os efeitos externos da força original sobre o corpo. A combinação da força com o binário na parte direita da Fig. 2/12 é denominada um *sistema força-binário.*

Invertendo este processo, podemos combinar um dado binário e uma força que se situe no plano do binário (normal ao vetor do binário) para produzir uma única força equivalente. A substituição de uma força por um sistema força-binário equivalente e o procedimento inverso têm muitas aplicações em mecânica e devem ser bem conhecidos.

Exemplo 2/7

O elemento estrutural rígido está submetido a um binário composto por duas forças de 100 N. Substitua este binário por um binário equivalente, consistindo nas duas forças **P** e **−P**, cada uma com módulo de 400 N. Determine o ângulo θ apropriado.



Dimensões em milímetros

Solução. O binário original é anti-horário quando o plano das forças é visto de cima, e seu módulo é

$$[M = Fd] \qquad M = 100(0{,}1) = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$$

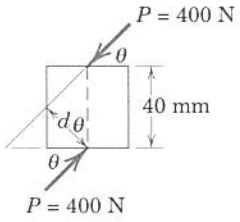
As forças **P** e **−P** produzem um binário anti-horário

$$M = 400(0{,}040)\cos\theta$$

① Igualando as duas expressões tem-se

$$10 = (400)(0{,}040)\cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{10}{16} = 51{,}3° \qquad \textit{Resp.}$$

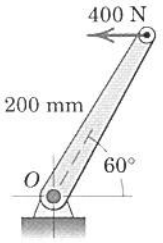


Sugestão Útil

① Como os dois binários são vetores livres paralelos, as únicas dimensões importantes são as que dão as distâncias perpendiculares entre as forças dos binários.

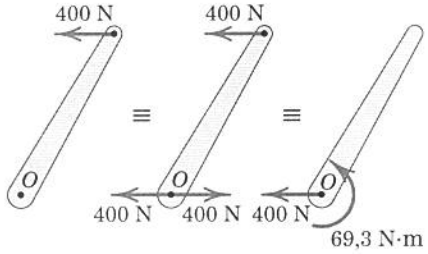
Exemplo 2/8

Substitua a força horizontal de 400 N, atuando na alavanca, por um sistema equivalente consistindo de uma força em O e um binário.



Solução. Aplicamos duas forças iguais e opostas de 400 N em O e identificamos o binário anti-horário

$$[M = Fd] \qquad M = 400(0{,}200 \text{ sen } 60°) = 69{,}3 \text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



① Assim, a força original é equivalente à força de 400 N em O e ao binário de 69,3 N · m, como mostrado na terceira das três figuras equivalentes.

Sugestão Útil

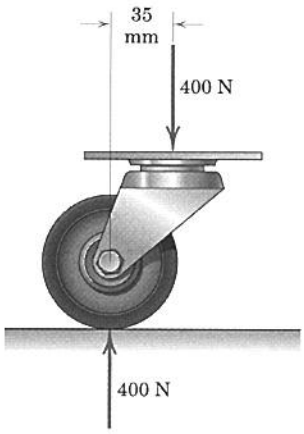
① O inverso deste problema é freqüentemente encontrado, ou seja, a substituição de uma força e de um binário por uma única força. O procedimento no sentido inverso equivale a substituir o binário por duas forças, uma das quais é igual e oposta à força de 400 N em O. O braço de alavanca da segunda força seria M/F = 69,3/400 = 0,1732 m, que é 0,2 sen 60°, determinando assim a linha de ação da força resultante única de 400 N.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

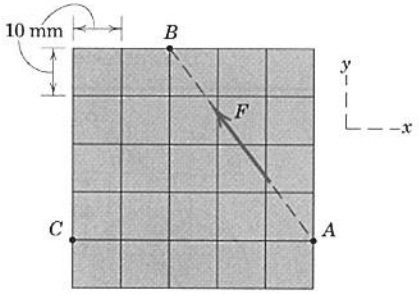
2/57 O conjunto roda/suporte está submetido ao par de forças de 400 N mostrado. Determine o momento associado a essas forças.

Resp. $M = 14$ N · m no sentido horário.



Problema 2/57

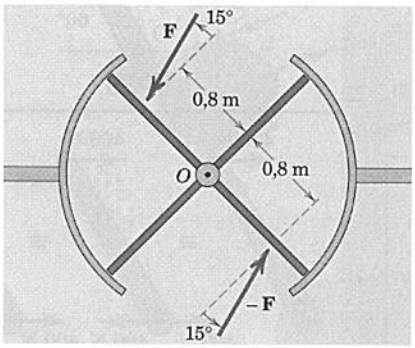
2/58 Uma força $F = 60$N atua ao longo da linha AB. Determine o sistema força-binário equivalente no ponto C.



Problema 2/58

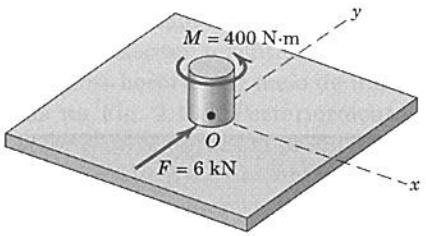
2/59 A vista de topo de uma porta giratória é mostrada. Duas pessoas se aproximam simultaneamente da porta e exercem forças de módulo igual, como mostrado. Se o momento resultante em relação ao eixo de rotação da porta em O vale 25 N · m, determine o módulo da força F.

Resp. $F = 16{,}18$ N



Problema 2/59

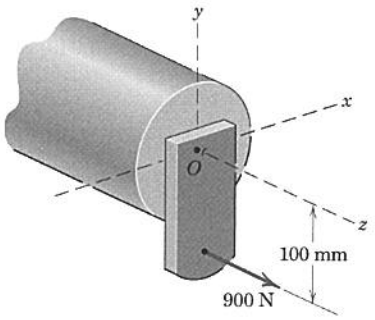
2/60 O sistema força-binário indicado está aplicado a um pequeno eixo localizado no centro da placa. Substitua esse sistema por uma única força e especifique a coordenada do ponto sobre o eixo x através do qual passa a linha de ação dessa força resultante.



Problema 2/60

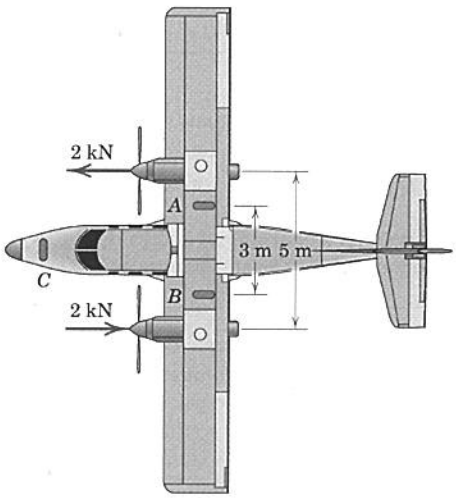
2/61 O suporte está soldado a ponto à extremidade do eixo no ponto O. Para mostrar o efeito da força de 900 N sobre a solda, substitua a força por seu equivalente formado por uma força e um binário **M** em O. Expresse **M** em notação vetorial.

Resp. $\mathbf{M} = -90\mathbf{i}$ N · m



Problema 2/61

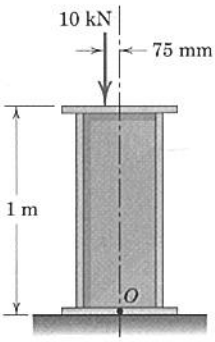
2/62 Como parte de um teste, os dois motores de um avião são acelerados e as inclinações das hélices são ajustadas de modo a resultar em um empuxo para frente e para trás, como mostrado. Que força F deve ser exercida pelo chão em cada uma das duas rodas principais freadas em A e B, para se opor ao efeito giratório dos empuxos das duas hélices? Despreze quaisquer efeitos da roda do nariz, C, que está girada de 90° e não está freada.



Problema 2/62

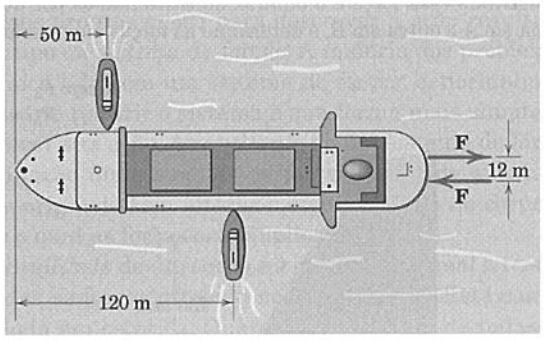
2/63 Substitua a força de 10 kN atuando sobre a coluna de aço por um sistema força-binário equivalente no ponto O. Essa substituição é freqüentemente feita no projeto de estruturas.

Resp. $R = 10$ kN, $M_O = 0{,}75$ kN · m no sentido anti-horário



Problema 2/63

2/64 Cada hélice de um navio de duas hélices desenvolve um empuxo de 300 kN na velocidade máxima. Ao manobrar o navio, uma hélice está girando a toda velocidade para frente e a outra a toda velocidade no sentido reverso. Que empuxo P cada rebocador deve exercer no navio para contrabalançar o efeito das hélices?

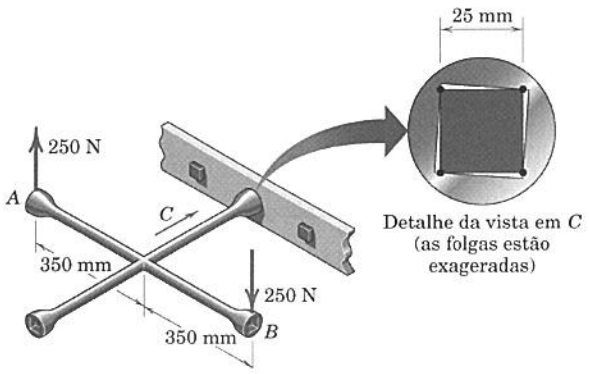


Problema 2/64

Problemas Representativos

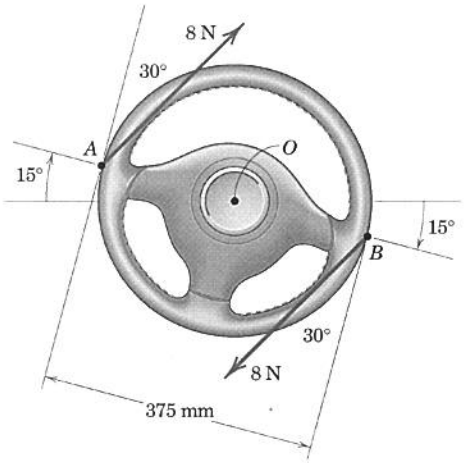
2/65 Uma chave de roda é usada para apertar um parafuso de cabeça quadrada. Se forças de 250 N forem aplicadas à chave, como mostrado, determine o módulo F das forças iguais exercidas nos quatro pontos de contato na cabeça de 25 mm do parafuso, de modo que seu efeito externo sobre o parafuso seja equivalente ao das duas forças de 250 N. Considere que as forças são perpendiculares aos lados planos da cabeça do parafuso.

Resp. $F = 3500$ N



Problema 2/65

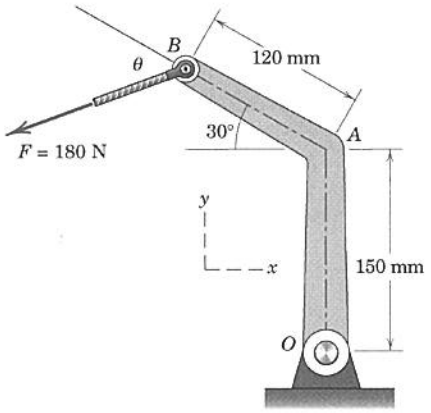
2/66 Durante uma curva suave para a direita, uma pessoa exerce as forças mostradas sobre o volante. Observe que cada força consiste em uma componente tangencial e em uma componente radial direcionada para dentro. Determine o momento exercido em relação à coluna do volante em O.



Problema 2/66

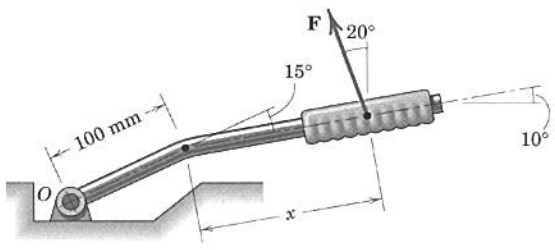
2/67 A força de 180 N está aplicada à extremidade do corpo OAB. Se $\theta = 50°$, determine o sistema força-binário equivalente no eixo, em O.

Resp. $\mathbf{F} = -169{,}1\mathbf{i} - 61{,}6\mathbf{j}$ N, $M_O = 41{,}9$ N · m no sentido anti-horário



Problema 2/67

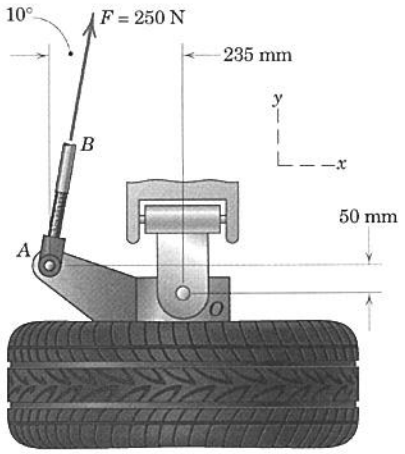
2/68 Uma força $\mathbf{F}$ de módulo 50 N é exercida sobre a alavanca do freio de mão de um automóvel, na posição $x = 250$ mm. Substitua a força por um sistema força-binário equivalente no ponto O.



Problema 2/68

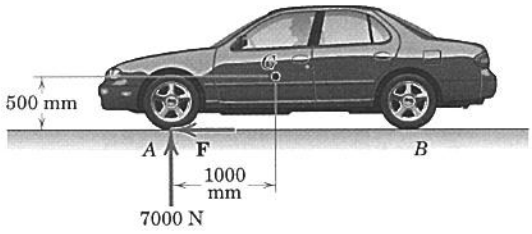
2/69 A haste de união AB exerce uma força de 250 N na guia AO como mostrado. Substitua essa força por um sistema força-binário equivalente em O.

Resp. $\mathbf{F} = 43{,}4\mathbf{i} + 246\mathbf{j}$ N, $M_O = 60{,}0$ N · m no sentido horário



Problema 2/69

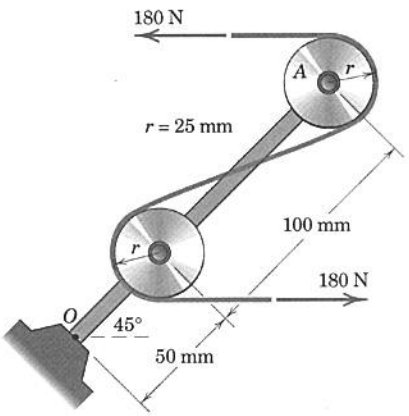
2/70 As rodas do automóvel de tração dianteira sofrem, em conjunto, a ação de uma força de reação normal de 7000 N e de uma força de fricção **F**, ambas exercidas pela superfície da estrada. Se é sabido que a resultante destas duas forças faz um ângulo de 15° com a vertical, determine o sistema força-binário equivalente no centro de massa G do carro. Trate este problema como sendo bidimensional.



Problema 2/70

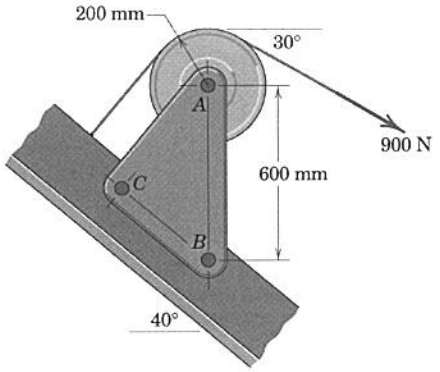
2/71 O sistema consistindo da barra OA, duas polias idênticas e uma fita fina está submetido às duas forças trativas de 180 N, como mostrado na figura. Determine o sistema força-binário equivalente no ponto O.

Resp. $M = 21{,}7$ N · m no sentido anti-horário



Problema 2/71

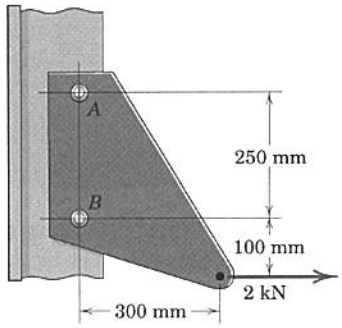
2/72 Calcule o momento M_B causado pela força de 900 N em relação ao parafuso em B. Simplifique seu trabalho substituindo, inicialmente, a força por seu sistema força-binário equivalente em A.



Problema 2/72

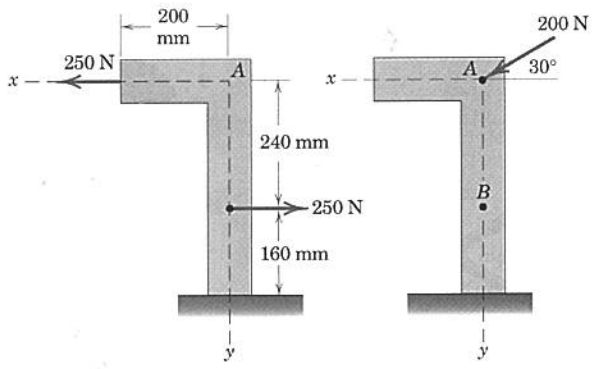
2/73 O suporte está preso à coluna por meio de dois rebites, A e B, e suporta uma força de 2 kN. Substitua essa força por uma força atuando ao longo da mediatriz dos rebites e por um binário. Em seguida, redistribua essa força e o binário, substituindo-os por duas forças, uma em A e outra em B, e determine as forças suportadas pelos rebites.

Resp. $F_A = 0{,}8$ kN
$F_B = 2{,}8$ kN



Problema 2/73

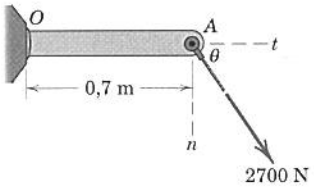
2/74 A placa dobrada está submetida às duas forças de 250 N mostradas. Deseja-se substituir essas forças por um conjunto equivalente formado pela força de 200 N aplicada em A e uma segunda força aplicada em B. Determine a coordenada y de B.



Problema 2/74

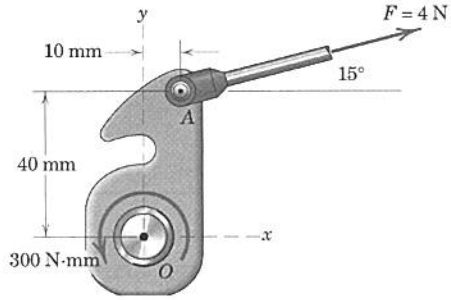
2/75 A solda em O pode suportar uma força máxima de 2500 N ao longo de cada uma das direções n e t e um momento máximo de 1400 N · m. Determine a faixa admissível para a direção θ da força de 2700 N aplicada em A. O ângulo θ está restrito a $0 \leq \theta \leq 90°$.

Resp. $22{,}2° \leq \theta \leq 47{,}8°$



Problema 2/75

2/76 O dispositivo mostrado é uma peça de um mecanismo de liberação do encosto de um banco de automóvel. A peça é submetida a uma força de 4 N exercida em A e um momento de 300 N · mm exercido por uma mola de torção escondida. Determine a interseção com o eixo y da linha de ação da força única equivalente.



Problema 2/76

2/6 Resultantes

As propriedades de uma força, de um momento e de um binário foram desenvolvidas nas quatro seções anteriores. Estamos prontos agora para descrever a ação resultante de um grupo ou *sistema* de forças. A maioria dos problemas em mecânica lida com um sistema de forças, e, normalmente, é necessário reduzir o sistema à sua forma mais simples, para descrever sua ação. A *resultante* de um sistema de forças é a combinação mais simples de forças que pode substituir as forças originais sem alterar o efeito externo no corpo rígido sobre o qual as forças estão aplicadas.

O *equilíbrio* de um corpo é a condição na qual a resultante de todas as forças atuando no corpo é nula. Esta condição é estudada em estática. Quando a resultante de todas as forças em um corpo não é nula, a aceleração do corpo é obtida igualando-se a força resultante ao produto da massa pela aceleração do corpo. Esta condição é estudada em dinâmica. Assim, a determinação das resultantes é básica tanto para estática quanto para dinâmica.

O tipo mais comum de sistema de forças ocorre quando as forças atuam todas em um único plano, digamos o plano x-y, como ilustrado pelo sistema de três forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ na Fig. 2/13*a*. Nós obtemos o módulo e a direção da força resultante $\mathbf{R}$ formando o *polígono de forças* mostrado na parte *b* da figura, onde as forças são somadas em qualquer seqüência. Assim, para qualquer sistema de forças coplanares podemos escrever

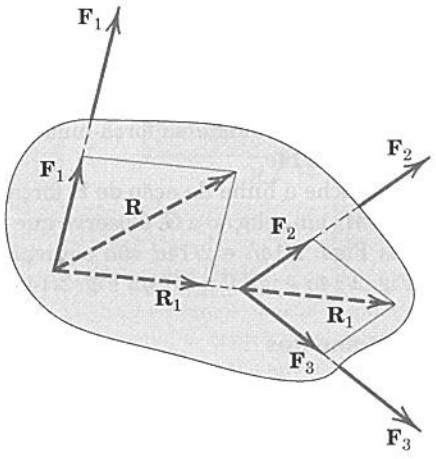
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots = \Sigma\mathbf{F}$$
$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \qquad \textbf{(2/9)}$$

Graficamente, a linha de ação correta de $\mathbf{R}$ pode ser obtida preservando-se as linhas de ação corretas das forças e adicionando-as pela lei do paralelogramo. Isto é visto na parte *a* da figura, para o caso de três forças, onde a soma $\mathbf{R}_1$ de $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ é adicionada a $\mathbf{F}_1$ para obter $\mathbf{R}$. O princípio da transmissibilidade foi usado neste caso.

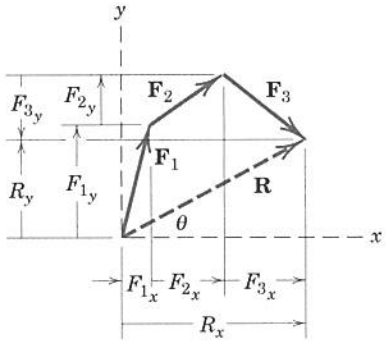
Método Algébrico

Podemos usar álgebra para obter a força resultante e sua linha de ação como se segue:

1. Escolha um ponto de referência conveniente e mova todas as forças para este ponto. Este processo está ilustrado para um sistema de três forças nas Figs. 2/14*a* e *b*, onde M_1, M_2 e M_3 são os momentos resultantes da transferência



(*a*)



(*b*)

Figura 2/13

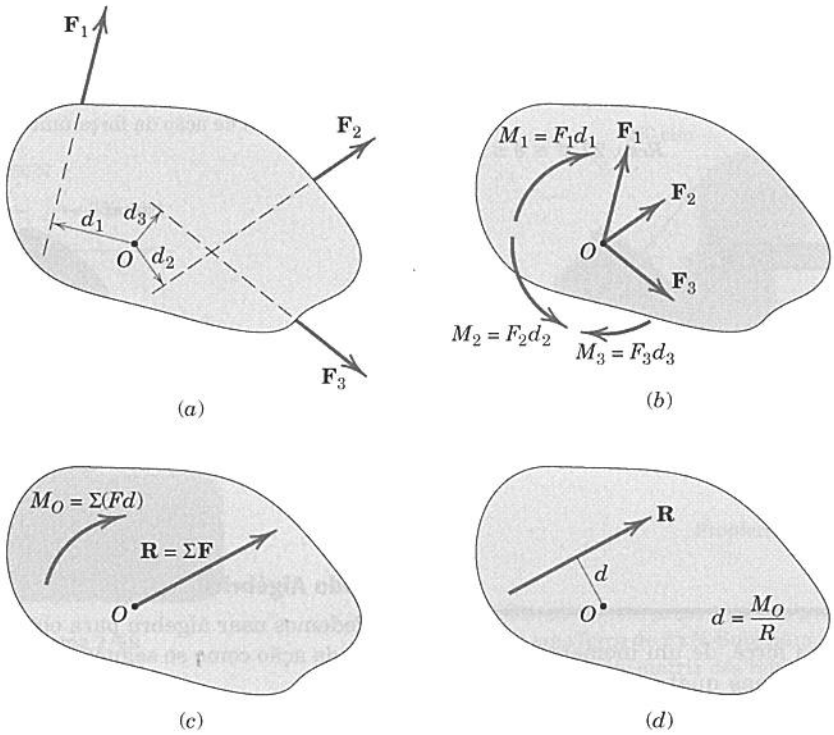


Figura 2/14

das forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ de suas respectivas linhas de ação originais para linhas de ação passando por O.

2. Some todas as forças em O para obter a força resultante $\mathbf{R}$ e some todos os momentos para obter o momento resultante M_O. Temos agora o sistema força-binário único, como mostrado na Fig. 2/14*c*.
3. Na Fig. 2/14*d*, ache a linha de ação de $\mathbf{R}$ forçando $\mathbf{R}$ a ter um momento M_O em relação a O. Observe que os sistemas de força das Figs. 2/14*a* e 2/14*d* são equivalentes e que $\Sigma(Fd)$ na Fig. 2/14*a* é igual a Rd na Fig. 2/14*d*.

Princípio dos Momentos

Este processo está resumido na forma de equação por

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F} \\ M_O &= \Sigma M = \Sigma(Fd) \\ Rd &= M_O \end{aligned} \qquad \textbf{(2/10)}$$

As duas primeiras das Eqs. 2/10 reduzem um dado sistema de forças a um sistema força-binário em um ponto O arbitrariamente escolhido, mas conveniente. A última equação especifica a distância d do ponto O à linha de ação de $\mathbf{R}$ e afirma que o momento da resultante de forças em relação a qualquer ponto O é igual à soma dos momentos das forças originais do sistema em relação ao mesmo ponto. Esta equação estende o teorema de Varignon ao caso de sistemas de forças *não concorrentes*; chamamos esta extensão de *princípio dos momentos.*

Para um sistema de forças concorrentes onde as linhas de ação de todas as forças passam por um ponto O comum, o somatório dos momentos ΣM_O em relação a este ponto é zero. Assim, a linha de ação da resultante $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$, determinada pela primeira das Eqs. 2/10, passa pelo ponto O. Para um sistema de forças paralelas, selecione um eixo coordenado na direção das forças. Se a força resultante $\mathbf{R}$ para um dado sistema de forças for zero, a resultante do sistema não precisa ser zero, porque a resultante pode ser um binário. As três forças na Fig. 2/15, por exemplo, têm uma força resultante nula, mas têm um momento resultante no sentido horário, $M = F_3 d$.

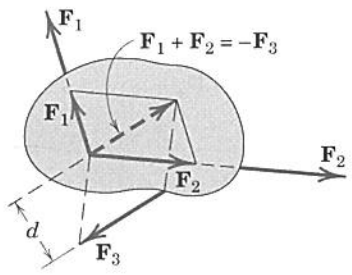
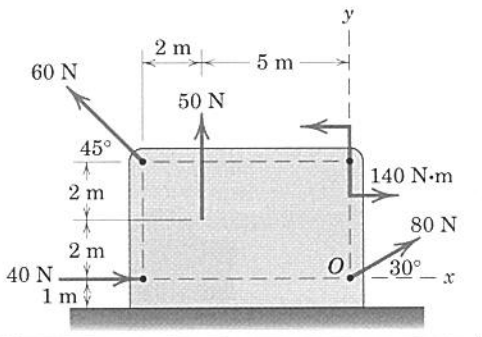


Figura 2/15

Exemplo 2/9

Determine a resultante das quatro forças e do binário que atuam na placa mostrada.



Solução. O ponto O foi selecionado como um ponto de referência conveniente para o sistema força-binário que deve representar o sistema dado.

$$[R_x = \Sigma F_x] \qquad R_x = 40 + 80\cos 30° - 60\cos 45° = 66{,}9 \text{ N}$$

$$[R_y = \Sigma F_y] \qquad R_y = 50 + 80\,\text{sen}\,30° + 60\cos 45° = 132{,}4 \text{ N}$$

$$[R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}] \qquad R = \sqrt{(66{,}9)^2 + (132{,}4)^2} = 148{,}3 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\left[\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}\right] \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{132{,}4}{66{,}9} = 63{,}2° \qquad \textit{Resp.}$$

① $$[M_O = \Sigma(Fd)] \qquad M_O = 140 - 50(5) + 60\cos 45°(4) - 60\,\text{sen}\,45°(7)$$
$$= -237 \text{ N·m}$$

O sistema força-binário consistindo de **R** e M_O é mostrado na Fig. *a*.

Determinamos agora a linha de ação final de **R**, tal que **R** sozinho represente o sistema original.

$$[Rd = |M_O|] \qquad 148{,}3d = 237 \qquad d = 1{,}600 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Assim sendo, a resultante **R** pode ser aplicada a qualquer ponto na linha de ação que faz um ângulo de 63,2° com o eixo x e é tangente no ponto A a um círculo com 1,600 m de raio e centro em O, como mostrado na parte *b* da figura. Aplicamos a equação $Rd = M_O$ em seu valor absoluto (ignorando qualquer sinal de M_O) e deixamos o sentido físico da situação, como ilustrado na Fig. *a*, dar a localização final de **R**. Se M_O tivesse sido anti-horário, a linha de ação correta para **R** teria sido a tangente no ponto B.

A resultante **R** pode também ser localizada determinando-se sua distância de interseção b ao ponto C sobre o eixo x, Fig. *c*. Com R_x e R_y atuando por meio de C, apenas R_y exerce um momento em relação a O, de modo que

$$R_y b = |M_O| \qquad \text{e} \qquad b = \frac{237}{132{,}4} = 1{,}792 \text{ m}$$

Alternativamente, a interseção em y poderia ter sido obtida, observando-se que o momento em relação a O seria devido apenas a R_x.

Uma abordagem mais formal na determinação da linha de ação final de **R** implica usar a expressão vetorial

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ é um vetor de posição unindo o ponto O a qualquer ponto sobre a linha de ação de **R**. Substituindo as expressões vetoriais para **r**, **R** e $\mathbf{M}_O$ e fazendo o produto vetorial, resulta em

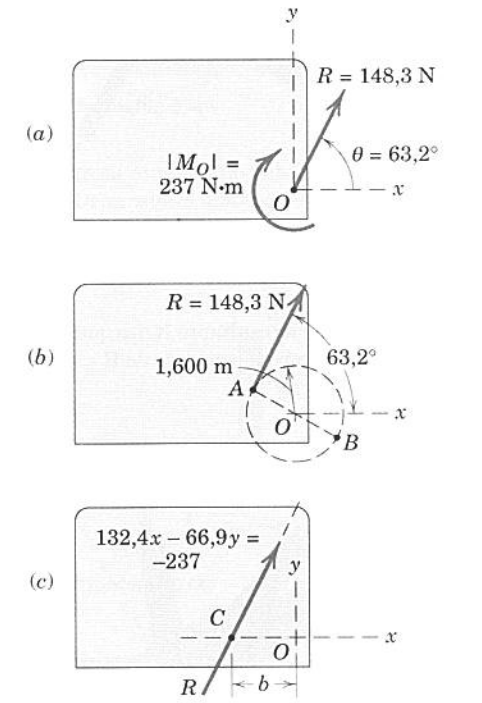
$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (66{,}9\mathbf{i} + 132{,}4\mathbf{j}) = -237\mathbf{k}$$

$$(132{,}4x - 66{,}9y)\mathbf{k} = -237\mathbf{k}$$

Assim, a linha de ação desejada, Fig. *c*, é dada por

$$132{,}4x - 66{,}9y = -237$$

② Colocando-se $y = 0$, obtemos $x = -1{,}792$ m, o que concorda com nosso cálculo anterior da distância b.



Sugestões Úteis

① Observamos que a escolha do ponto O como o centro dos momentos elimina quaisquer momentos devidos às duas forças que passam por O. Se a convenção de sinais horária tivesse sido adotada, M_O valeria +237 N · m, com o sinal de mais indicando um sentido que concorda com a convenção de sinais. Qualquer convenção de sinais, é claro, leva à conclusão de um momento M_O no sentido horário.

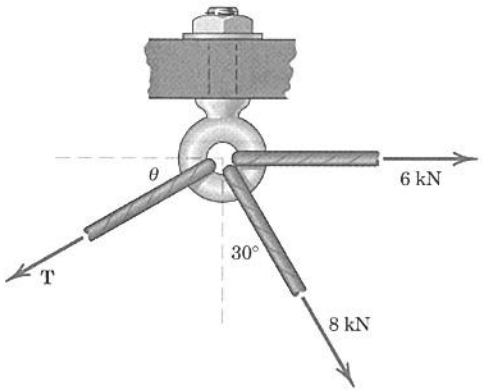
② Observe que o enfoque vetorial gera automaticamente a informação dos sinais, enquanto o enfoque escalar tem maior sentido físico. Você deve dominar ambos os métodos.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

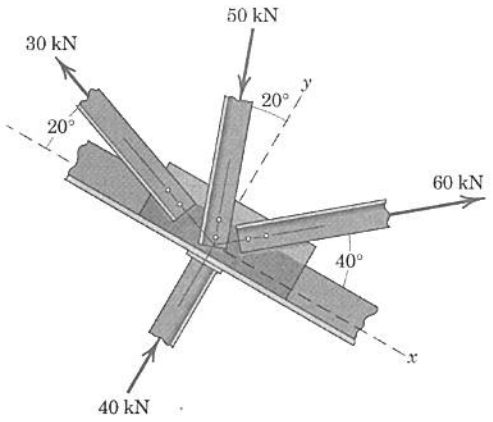
2/77 Calcule o modulo da força trativa **T** e o ângulo θ de forma que o olhal tenha uma força resultante de 15 kN direcionada para baixo.

Resp. $R = 12{,}85$ kN, $\theta = 38{,}9°$



Problema 2/77

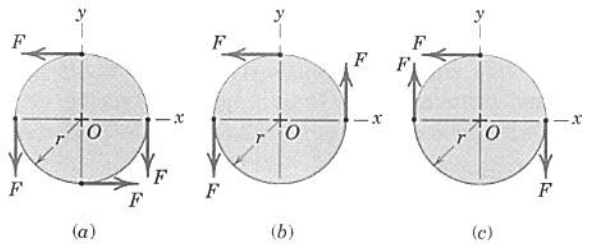
2/78 Determine a resultante **R** das quatro forças atuando na placa de união. Ache também o módulo de **R** e o ângulo θ_x que a resultante faz com o eixo x.



Problema 2/78

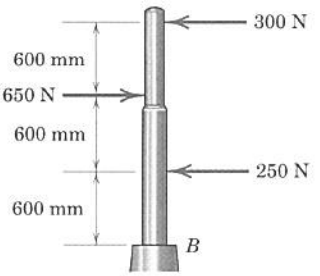
2/79 Determine o sistema força-binário equivalente na origem O para cada um dos três casos de forças sendo aplicadas nas bordas de um disco circular. Substitua esse sistema força-binário por uma única força, se for possível determinar a resultante desse modo.

Resp. (a) $\mathbf{R} = -2F\mathbf{j}$ ao longo de $x = -r$
(*b*) $\mathbf{R} = -F\mathbf{i}$ ao longo de $y = 3r$
(*c*) $\mathbf{R} = -F\mathbf{i}$ ao longo de $y = -r$



Problema 2/79

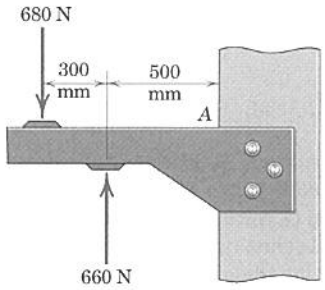
2/80 Determine a altura h acima da base B na qual atua a resultante das três forças.



Problema 2/80

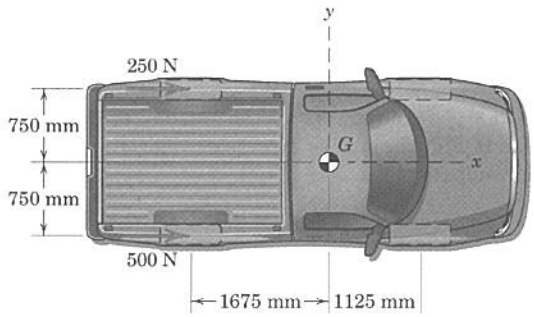
2/81 Onde atua a resultante das duas forças?

Resp. 10,70 m à esquerda de *A*



Problema 2/81

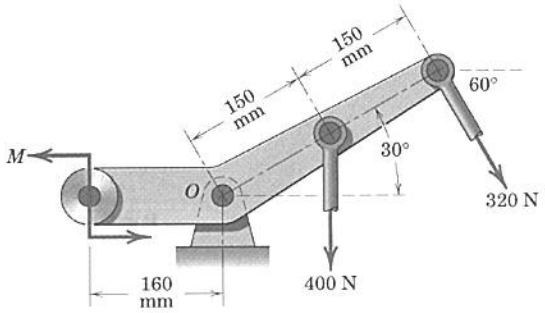
2/82 Sob condições não uniformes e escorregadias da estrada, as duas forças mostradas são exercidas sobre as duas rodas de tração traseiras da caminhonete, que tem um diferencial traseiro que limita derrapagens. Determine a interseção com o eixo y da resultante desse sistema de forças.



Problema 2/82

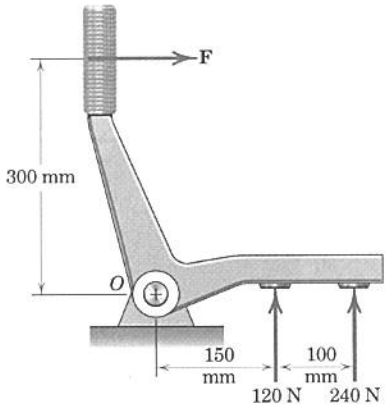
2/83 Determine M se a resultante das duas forças e do momento M passa pelo ponto O.

Resp. $M = 148{,}0$ N · m no sentido anti-horário.



Problema 2/83

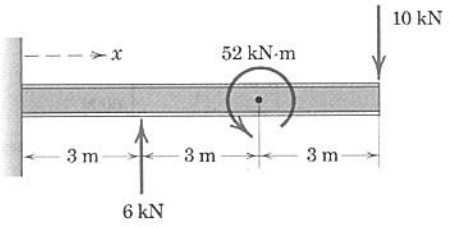
2/84 Determine o módulo da força **F** aplicada à manopla, que fará com que a resultante das três forças passe por O.



Problema 2/84

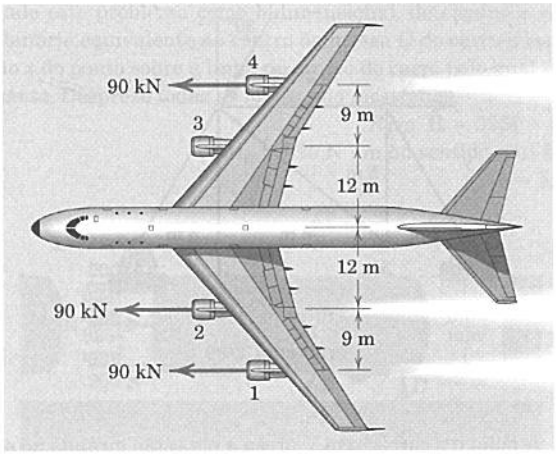
2/85 Determine e localize a resultante **R** das duas forças e do momento atuando na viga em I.

Resp. $R = 4$ kN para baixo em $x = 5$ m



Problema 2/85

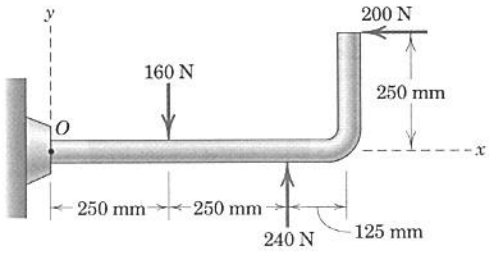
2/86 Um avião comercial com quatro turbinas a jato, cada uma produzindo um empuxo à frente de 90 kN, está em um vôo de cruzeiro, estacionário, quando o motor número 3 falha repentinamente. Determine e localize a resultante dos vetores de empuxo dos três motores remanescentes. Trate este problema como bidimensional.



Problema 2/86

2/87 Substitua as três forças atuando no tubo dobrado por uma única força equivalente **R**. Determine a distância x a partir do ponto O até o ponto no eixo x pelo qual passa a linha de ação de **R**.

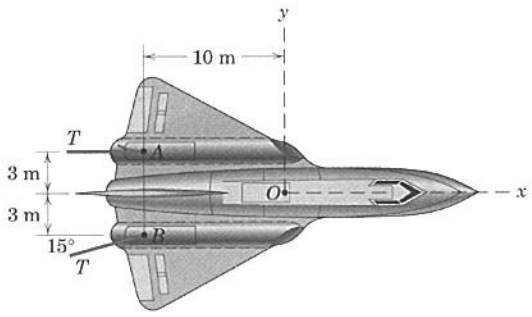
Resp. $\mathbf{R} = -200\mathbf{i} + 80\mathbf{j}$ N, $x = 1{,}625$ m (fora do tubo)



Problema 2/87

Problemas Representativos

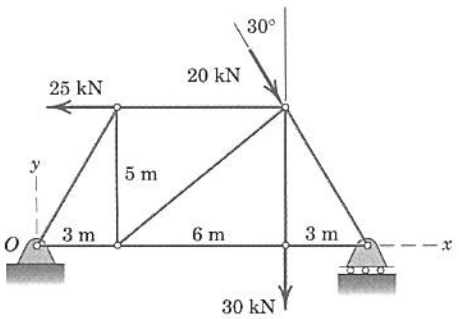
2/88 As direções dos dois vetores de empuxo de um avião experimental podem ser variadas independentemente, dentro de certos limites, desde a direção convencional à frente. Para a configuração de empuxo mostrada, determine o sistema força-binário equivalente no ponto O. Substitua, então, este sistema força-binário por uma única força e especifique o ponto sobre o eixo x pelo qual passa a linha de ação desta resultante. Estes resultados são vitais para avaliar o desempenho do projeto.



Problema 2/88

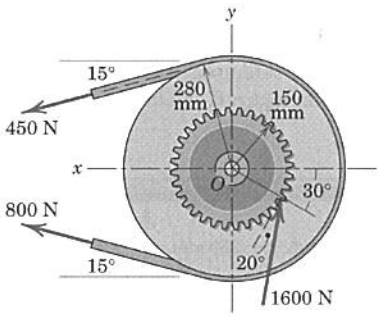
2/89 Determine a resultante **R** das três forças atuando na treliça simples. Especifique os pontos sobre os eixos x e y através dos quais **R** deve passar.

Resp. $\mathbf{R} = -15\mathbf{i} - 47{,}3\mathbf{j}$ kN
$x = 7{,}42$m, $y = -23{,}4$ m



Problema 2/89

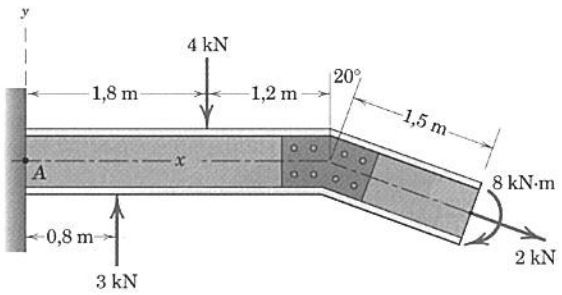
2/90 A polia e a correia em V presa a ela estão girando no sentido anti-horário e estão submetidas à carga de 1600 N, devida aos dentes da engrenagem, e aos esforços trativos de 800 N e 450 N na correia em V. Represente a ação destas três forças por uma força resultante **R** em O e por um momento de módulo M. O conjunto está desacelerando ou acelerando?



Problema 2/90

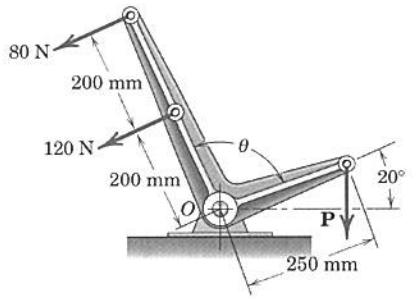
2/91 Para essa viga, as especificações de projeto para o encaixe em A dependem do módulo e da posição das cargas aplicadas. Represente a resultante das três forças e do momento por uma única força **R** em A e por um momento M. Especifique o módulo de **R**.

Resp. $\mathbf{R} = 1{,}879\mathbf{i} - 1{,}684\mathbf{j}$ kN, $R = 2{,}52$ kN
$M = 14{,}85$ kN · m no sentido horário



Problema 2/91

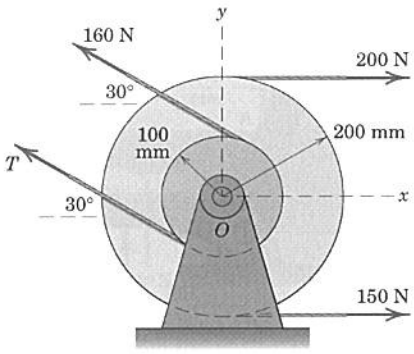
2/92 Na posição em equilíbrio mostrada, a resultante das três forças atuando na haste dobrada passa pelo mancal O. Determine a força vertical **P**. O resultado depende de θ?



Problema 2/92

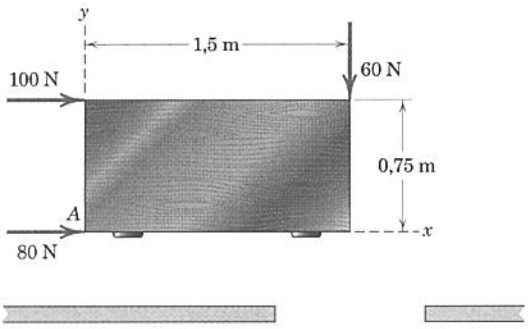
2/93 Duas polias estão submetidas às forças trativas das correias, como mostrado. Se a resultante **R** destas forças passa pelo centro O, determine T, o módulo de **R** e o ângulo anti-horário θ que **R** faz com o eixo x.

Resp. $T = 60$ N, $R = 193{,}7$ N, $\theta = 34{,}6°$



Problema 2/93

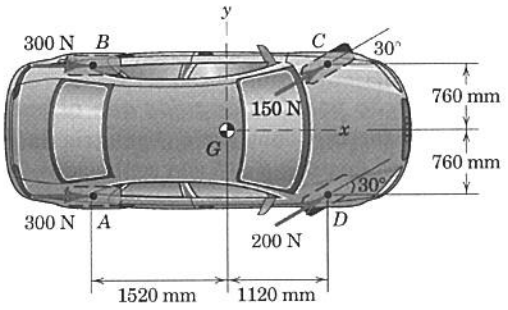
2/94 Ao empurrar uma mesa na direção da porta de saída, três estudantes exercem as forças mostradas na vista de topo. Determine o sistema força-binário equivalente no ponto A. Determine, então, a equação da linha de ação da força resultante.



Problema 2/94

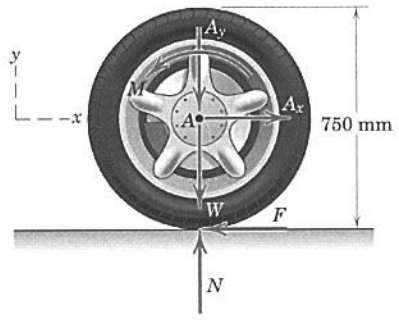
2/95 Sob condições não uniformes e escorregadias da estrada, as quatro forças mostradas são exercidas sobre as quatro rodas do veículo com tração nas quatro rodas. Determine a resultante desse sistema e as interseções x e y de suas linhas de ação. Observe que os eixos dianteiro e traseiro são iguais (ou seja, $\overline{AB} = \overline{CD}$).

Resp. $\mathbf{R} = 903\mathbf{i} + 175\mathbf{j}$ N, $(0; -0{,}253)$ m, $(1{,}308; 0)$ m



Problema 2/95

2/96 A roda traseira de um automóvel de tração dianteira que está acelerando para a direita está submetida às cinco forças e ao momento mostrado. As forças $A_x = 240$ N e $A_y = 2000$ N são forças transmitidas pelo eixo à roda, $F = 160$ N é a força de fricção exercida pela superfície da estrada no pneu, $N = 2400$ N é a força normal de reação exercida pela superfície da estrada e $W = 400$ N é o peso do conjunto pneu/roda. O momento $M = 3$ N · m é devido à fricção do mancal. Determine e localize a resultante do sistema.



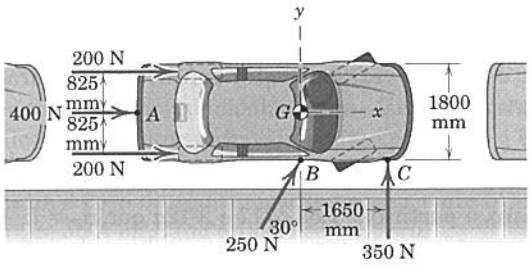
Problema 2/96

2/97 Um carro de tração traseira está atolado na neve entre outros carros estacionados como mostrado. Em uma tentativa de livrar o carro, três estudantes exercem forças no carro nos pontos *A*, *B* e *C*, enquanto a ação do motorista resulta em um empuxo de 200 N para frente, atuando paralelo ao plano de rotação de cada roda traseira. Tratando este problema como bidimensional, determine o sistema força-binário equivalente no centro de massa *G* do carro e localize a posição *x* do ponto sobre a linha de centro do carro pelo qual passa a resultante. Despreze todas as forças não mostradas.

Resp. $\mathbf{R} = 925\mathbf{i} + 567\mathbf{j}$ N

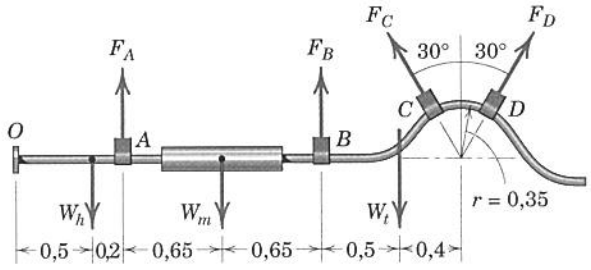
$M_G = 690$ N · m no sentido anti-horário

$x = 1{,}218$ m



Problema 2/97

2/98 Um sistema de escapamento para uma caminhonete é mostrado na figura. Os pesos W_h, W_m e W_t do tubo de entrada, abafador e escapamento são 10, 100 e 50 N, respectivamente, e atuam nos pontos indicados. Se o suporte no ponto *A* está ajustado de modo a exercer uma força trativa de 50 N, determine as forças necessárias nos suportes nos pontos *B*, *C* e *D* de modo que o sistema força-binário no ponto *O* seja zero. Por que um sistema força-momento nulo em *O* é desejável?



Dimensões em metros

Problema 2/98

SEÇÃO B SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS

2/7 Componentes Retangulares

Muitos problemas em mecânica requerem análise em três dimensões e, para estes problemas, é muitas vezes necessário projetar uma força em suas três componentes mutuamente perpendiculares. A força **F** atuando em um ponto *O* na Fig. 2/16 tem as *componentes retangulares* F_x, F_y, F_z, onde

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F_y = F\cos\theta_y \qquad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

$$F_z = F\cos\theta_z \qquad \mathbf{F} = F(\mathbf{i}\cos\theta_x + \mathbf{j}\cos\theta_y + \mathbf{k}\cos\theta_z)$$

(2/11)

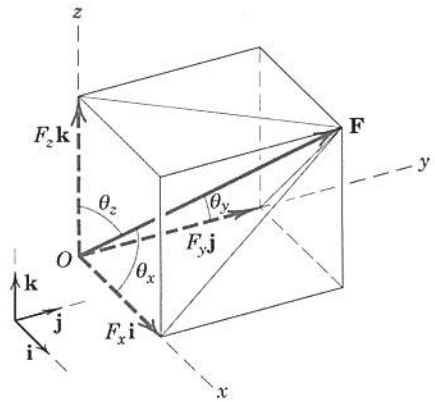


Figura 2/16

Os vetores unitários **i**, **j** e **k** estão nas direções x, y e z, respectivamente. Usando os cossenos diretores de **F**, que são $l = \cos\theta_x$, $m = \cos\theta_y$ e $n = \cos\theta_z$, onde $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, podemos escrever a força como

$$\mathbf{F} = F(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \qquad (2/12)$$

Podemos interpretar o termo à direita da Eq. 2/12 como o módulo da força F vezes um vetor unitário $\mathbf{n}_F$ que caracteriza a direção de **F**, ou

$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_F \qquad (2/12a)$$

Fica claro, a partir das Eqs. 2/12 e 2/12a que $\mathbf{n}_F = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$, que mostra que os componentes escalares do vetor unitário $\mathbf{n}_F$ são os cossenos diretores da linha de ação de **F**.

Na resolução de problemas tridimensionais deve-se, comumente, encontrar os componentes escalares x, y e z de uma força. Na maioria dos casos, a direção de uma força é descrita (a) por dois pontos sobre a linha de ação da força ou (b) por dois ângulos que orientam a linha de ação.

(a) Especificação por dois pontos na linha de ação da força. Se as coordenadas dos pontos A e B da Fig. 2/17 são conhecidas, a força **F** pode ser escrita como

$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_F = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = F\frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

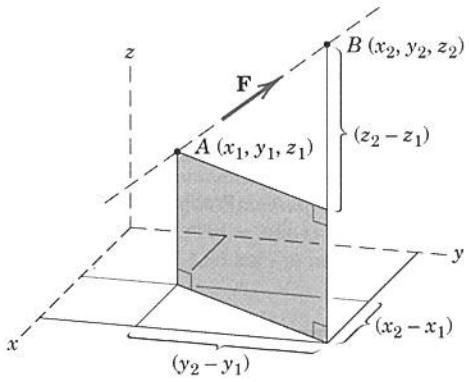


Figura 2/17

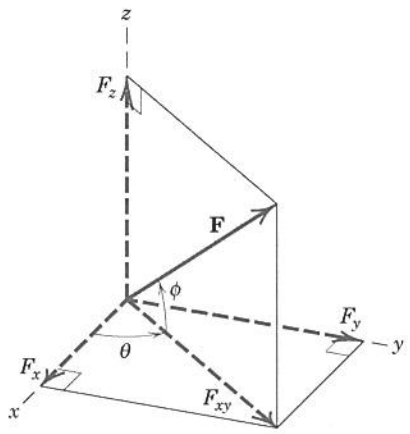


Figura 2/18

Assim os componentes escalares x, y e z de **F** são os coeficientes escalares dos vetores unitários **i**, **j** e **k**, respectivamente.

(b) Especificação por dois ângulos que orientam a linha de ação da força. Considere a geometria da Fig. 2/18. Assumimos que os ângulos θ e ϕ são conhecidos. Primeiramente, projete **F** nos componentes horizontal e vertical.

$$F_{xy} = F\cos\phi$$
$$F_z = F\,\text{sen}\,\phi$$

Projete, então, o componente horizontal F_{xy} nos componentes x e y.

$$F_x = F_{xy}\cos\theta = F\cos\phi\cos\theta$$
$$F_y = F_{xy}\,\text{sen}\,\theta = F\cos\phi\,\text{sen}\,\theta$$

As quantidades F_x, F_y e F_z são os componentes escalares desejados de **F**.

A escolha da orientação do sistema de coordenadas é arbitrária, tendo como consideração primária a conveniência. No entanto, devemos usar um conjunto de eixos orientado de acordo com a regra da mão direita para manter consistência com a definição da regra da mão direita do produto vetorial. Quando giramos do eixo x para o eixo y por um ângulo de 90°, a direção positiva para o eixo z em um sistema orientado de acordo com a regra da mão direita é a mesma que a de um parafuso girado no mesmo sentido. Isto é equivalente à regra da mão direita.

Produto Escalar

Podemos expressar os componentes retangulares de uma força **F** (ou qualquer outro vetor) com o auxílio da operação vetorial denominada *produto escalar* (veja o item 6 no Módulo C/7 do Apêndice C). O produto escalar de dois vetores **P** e **Q**, Fig. 2/19a, é definido como o produto de seus módulos vezes o cosseno do ângulo α entre eles. O produto escalar é escrito como

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\alpha$$

Podemos interpretar este produto como a projeção ortogonal $P\cos\alpha$ de **P** na direção de **Q** multiplicado por Q, ou como a projeção ortogonal $Q\cos\alpha$ de **Q** na direção de **P** multiplicado por P. Em ambos os casos, o produto escalar dos dois vetores é uma quantidade escalar. Assim, por exemplo, podemos expressar o componente escalar $F_x = F\cos\theta_x$ da força **F** na Fig. 2/16 como $F_x = \mathbf{F}\cdot\mathbf{i}$, onde **i** é o vetor unitário na direção x.

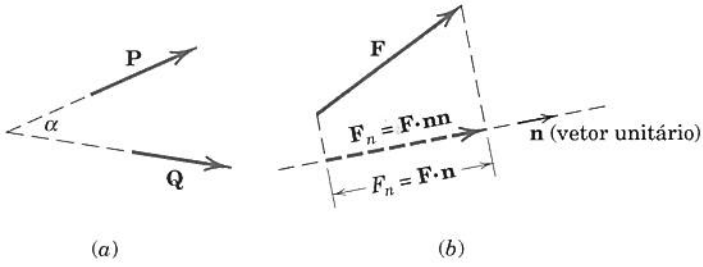


Figura 2/19

Em termos mais gerais, se $\mathbf{n}$ é um vetor unitário em uma dada direção, a projeção de $\mathbf{F}$ na direção $\mathbf{n}$, Fig. 2/19*b*, tem o módulo $F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Se desejamos expressar a projeção na direção $\mathbf{n}$ como uma quantidade vetorial, multiplicamos seu componente escalar, dado por $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, pelo vetor unitário $\mathbf{n}$ para obter $\mathbf{F}_n = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. Podemos escrever esta expressão como $\mathbf{F}_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{nn}$ sem ambigüidade porque o termo $\mathbf{nn}$ não é definido e, portanto, a expressão completa não pode ser interpretada erroneamente como $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{nn})$.

Se os cossenos diretores de $\mathbf{n}$ são α, β e γ, então podemos escrever $\mathbf{n}$ na forma de componentes vetoriais, como qualquer outro vetor, como

$$\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$$

onde neste caso o seu módulo é unitário. Se os cossenos diretores de $\mathbf{F}$ em relação aos eixos de referência x-y-z são l, m e n, então a projeção de $\mathbf{F}$ na direção $\mathbf{n}$ é

$$\begin{aligned} F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= F(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \cdot (\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}) \\ &= F(l\alpha + m\beta + n\gamma) \end{aligned}$$

porque

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

e

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$

Os dois últimos conjuntos de equações são verdadeiros porque $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ têm comprimento unitário e são mutuamente perpendiculares.

Ângulo entre Dois Vetores

Se o ângulo entre a força $\mathbf{F}$ e a direção especificada pelo vetor unitário $\mathbf{n}$ é θ, então, a partir da definição de produto escalar, temos $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = Fn \cos\theta = F \cos\theta$, onde $|\mathbf{n}| = n = 1$. Assim, o ângulo entre $\mathbf{F}$ e $\mathbf{n}$ é dado por

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{F} \qquad \textbf{(2/13)}$$

Em geral, o ângulo entre quaisquer dois vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ é

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{PQ} \qquad \textbf{(2/13}a\textbf{)}$$

Se uma força $\mathbf{F}$ é perpendicular a uma linha cuja direção é especificada pelo vetor unitário $\mathbf{n}$, então $\cos\theta = 0$ e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$. Note que esta relação não significa que $\mathbf{F}$ ou $\mathbf{n}$ sejam zero, como seria o caso da multiplicação escalar onde $(A)(B) = 0$ requer que ou A ou B (ou ambos) sejam zero.

A relação do produto escalar se aplica tanto a vetores que não se interceptam como aos que se interceptam. Assim, o produto escalar dos vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$, que não se interceptam, na Fig. 2/20 é Q vezes a projeção de $\mathbf{P}'$ sobre $\mathbf{Q}$, ou $P'Q \cos\alpha = PQ \cos\alpha$ porque $\mathbf{P}'$ e $\mathbf{P}$ são iguais quando tratados como vetores livres.

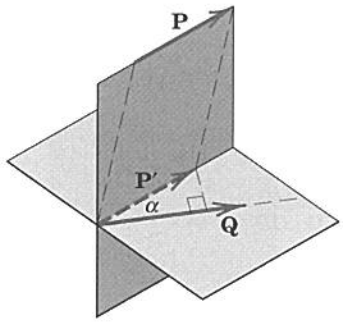
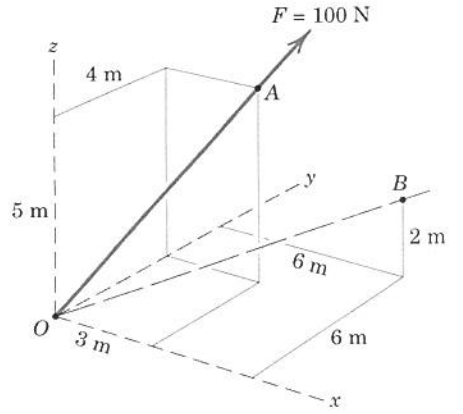


Figura 2/20

Exemplo 2/10

Uma força **F** de módulo 100 N é aplicada na origem *O* dos eixos *x*-*y*-*z* como mostrado. A linha de ação de **F** passa por um ponto *A* cujas coordenadas são 3 m, 4 m e 5 m. Determine (*a*) os componentes escalares *x*, *y* e *z* de **F**, (*b*) a projeção F_{xy} de **F** no plano *x*-*y* e (*c*) a projeção F_{OB} de **F** ao longo da linha *OB*.



Solução. Parte (a). Começamos escrevendo o vetor da força **F** como seu módulo *F* multiplicado por um vetor unitário $\mathbf{n}_{OA}$.

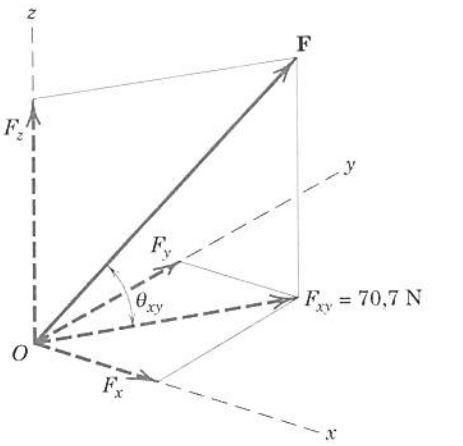
$$\mathbf{F} = F\mathbf{n}_{OA} = F\frac{\overrightarrow{OA}}{OA} = 100\left[\frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}}\right]$$

$$= 100[0{,}424\mathbf{i} + 0{,}566\mathbf{j} + 0{,}707\mathbf{k}]$$

$$= 42{,}4\mathbf{i} + 56{,}6\mathbf{j} + 70{,}7\mathbf{k}\ \text{N}$$

Os componentes escalares desejados são, portanto,

① $F_x = 42{,}4$ N $\quad F_y = 56{,}6$ N $\quad F_z = 70{,}7$ N *Resp.*



Parte (b). O cosseno do ângulo θ_{xy} entre **F** e o plano *x*-*y* é

$$\cos\theta_{xy} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = 0{,}707$$

de forma que $F_{xy} = F\cos\theta_{xy} = 100(0{,}707) = 70{,}7$ N *Resp.*

Parte (c). O vetor unitário $\mathbf{n}_{OB}$ ao longo de *OB* é

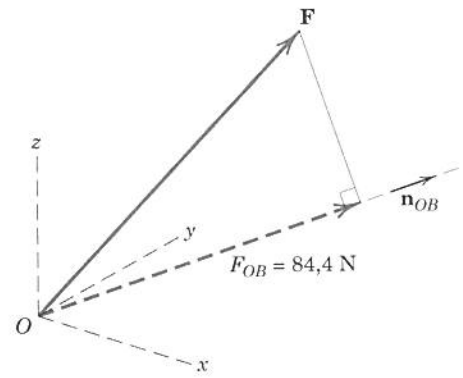
$$\mathbf{n}_{OB} = \frac{\overrightarrow{OB}}{OB} = \frac{6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{6^2 + 6^2 + 2^2}} = 0{,}688\mathbf{i} + 0{,}688\mathbf{j} + 0{,}229\mathbf{k}$$

A projeção escalar de **F** sobre *OB* é

② $F_{OB} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{OB} = (42{,}4\mathbf{i} + 56{,}6\mathbf{j} + 70{,}7\mathbf{k})\cdot(0{,}688\mathbf{i} + 0{,}688\mathbf{j} + 0{,}229\mathbf{k})$

$$= (42{,}4)(0{,}688) + (56{,}6)(0{,}688) + (70{,}7)(0{,}229)$$

$$= 84{,}4\text{N}$$ *Resp.*



Se desejamos expressar a projeção como um vetor, escrevemos

$$\mathbf{F}_{OB} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{OB}\mathbf{n}_{OB}$$

$$= 84{,}4(0{,}688\mathbf{i} + 0{,}688\mathbf{j} + 0{,}229\mathbf{k})$$

$$= 58{,}1\mathbf{i} + 58{,}1\mathbf{j} + 19{,}35\mathbf{k}\ \text{N}$$

Sugestões Úteis

① Neste exemplo todos os componentes escalares são positivos. Esteja preparado para o caso em que um cosseno diretor e, portanto, o componente escalar, sejam negativos.

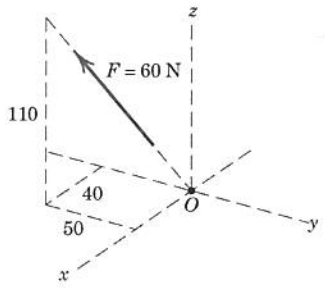
② O produto escalar encontra automaticamente a projeção, ou o componente escalar, de **F** ao longo da linha *OB*, como mostrado.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

2/99 Expresse **F** vetorialmente em termos dos vetores unitários **i**, **j** e **k**. Determine o ângulo entre **F** e o eixo *y*.

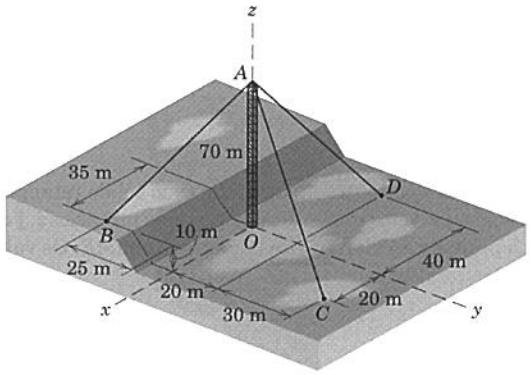
Resp. $\mathbf{F} = 18{,}86\mathbf{i} - 23{,}6\mathbf{j} + 51{,}9\mathbf{k}$ N
$\theta_y = 113{,}1°$



Dimensões em milímetros

Problema 2/99

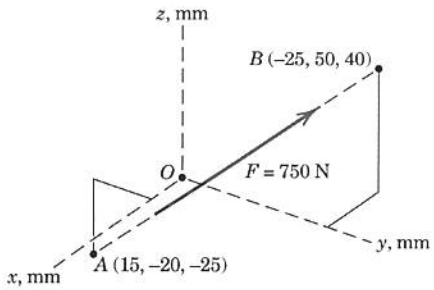
2/100 A torre de transmissão de microondas com 70 m de altura é equilibrada por três cabos de amarração, como mostrado. O cabo *AB* suporta uma força trativa de 12 kN. Expresse em forma vetorial a força correspondente no ponto *B*.



Problema 2/100

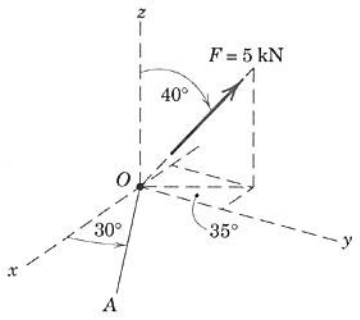
2/101 Expresse a força **F** como um vetor em termos dos vetores unitários **i**, **j** e **k**. Determine os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que **F** faz com os eixos positivos *x*, *y* e *z*.

Resp. $\mathbf{F} = -290\mathbf{i} + 507\mathbf{j} + 471\mathbf{k}$ N
$\theta_x = 112{,}7°$, $\theta_y = 47{,}5°$, $\theta_z = 51{,}1°$



Problema 2/101

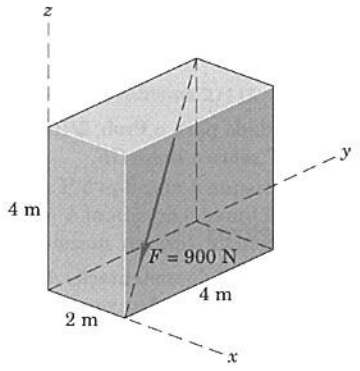
2/102 Expresse **F** como um vetor em termos dos vetores unitários **i**, **j** e **k**. Determine a projeção de **F**, tanto como um escalar quanto como um vetor, sobre a linha *OA*, que está situada no plano *x*-*y*.



Problema 2/102

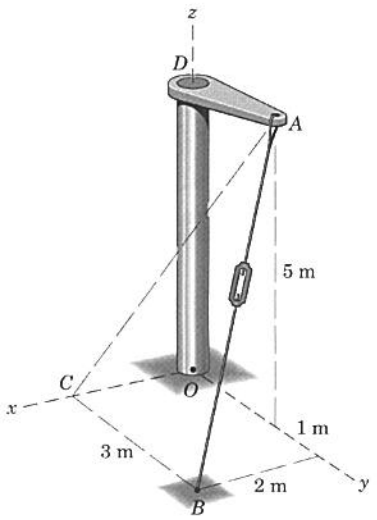
2/103 A força **F** tem um módulo de 900 N e atua ao longo da diagonal do paralelepípedo, como mostrado. Expresse **F** em termos de seu módulo multiplicado pelo vetor unitário apropriado, e determine seus componentes *x*, *y* e *z*.

Resp. $\mathbf{F} = 900\left[\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right]$ N
$F_x = 300$ N, $F_y = -600$ N, $F_z = -600$ N



Problema 2/103

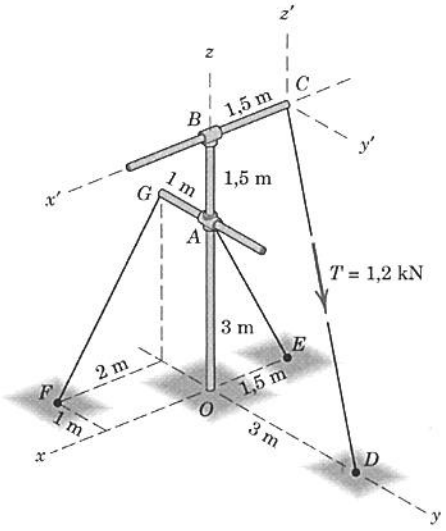
2/104 O tensionador é apertado até que a força trativa no cabo *AB* valha 2,4 kN. Determine a expressão vetorial para a força trativa **T**, como uma força atuando no elemento *AD*. Ache também o módulo da projeção de **T** ao longo da linha *AC*.



Problema 2/104

2/105 O mastro rígido com barras cruzadas é suportado pelos três cabos mostrados. Um tensionador em D é apertado até induzir uma força trativa T de 1,2 kN em CD. Expresse $\mathbf{T}$ como um vetor. Faz alguma diferença no resultado qual sistema de coordenadas é utilizado?

Resp. $\mathbf{T} = 0{,}321\mathbf{i} + 0{,}641\mathbf{j} - 0{,}962\mathbf{k}$ kN, Não



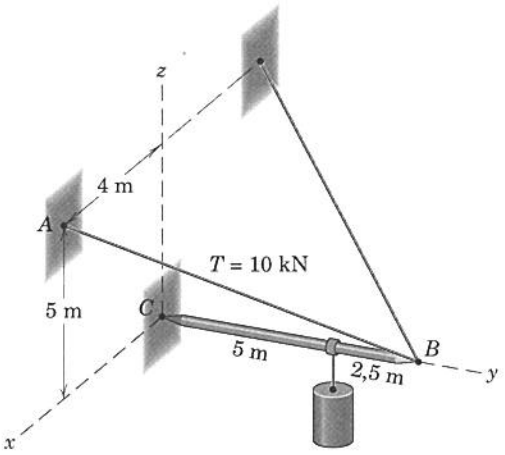
Problema 2/105

2/106 Use o resultado dado para o Prob. 2/105 e determine o módulo T_{GF} da projeção de $\mathbf{T}$ sobre a linha GF.

Problemas Representativos

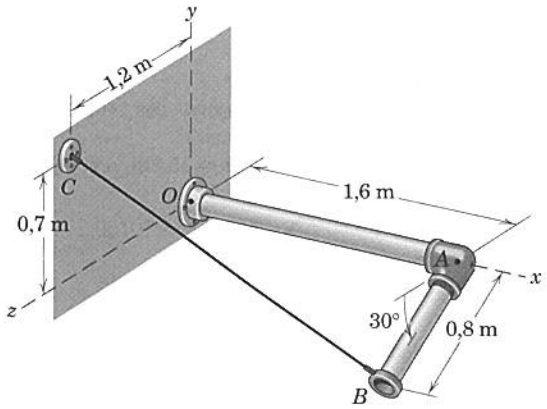
2/107 A força trativa no cabo de sustentação AB vale 10 kN. Escreva, como um vetor $\mathbf{T}$, a força que o cabo exerce sobre a haste BC. Determine os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que a linha de ação de $\mathbf{T}$ faz com os eixos positivos x, y e z.

Resp. $\mathbf{T} = 10[0{,}406\mathbf{i} - 0{,}761\mathbf{j} + 0{,}507\mathbf{k}]$ kN
$\theta_x = 66{,}1°$, $\theta_y = 139{,}5°$, $\theta_z = 59{,}5°$



Problema 2/107

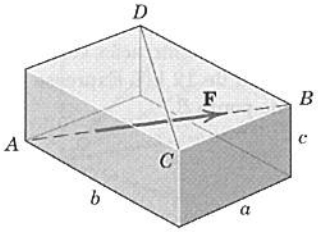
2/108 O cabo BC suporta uma força trativa de 750 N. Escreva esta força trativa como uma força $\mathbf{T}$ atuando no ponto B em termos dos vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. O cotovelo em A forma um ângulo reto.



Problema 2/108

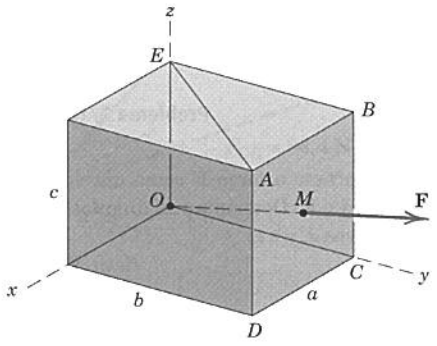
2/109 Desenvolva uma expressão para a projeção F_{DC} da força $\mathbf{F}$ sobre a linha direcionada de D a C.

Resp. $F_{DC} = \dfrac{(b^2 - a^2)F}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



Problema 2/109

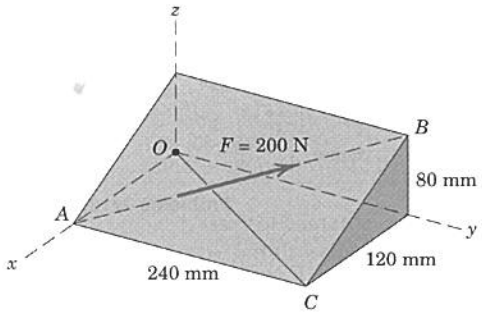
2/110 Se M está no centro da face $ABCD$ do sólido retangular, expresse $\mathbf{F}$ como um vetor em termos dos vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Determine a projeção escalar de $\mathbf{F}$ ao longo da linha AE. Os valores de F, a, b e c são conhecidos.



Problema 2/110

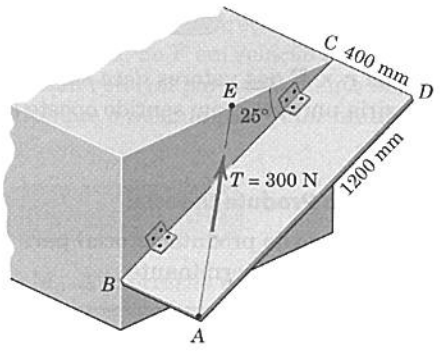
2/111 Determine o ângulo θ entre a força de 200 N e a linha OC.

Resp. $\theta = 54{,}9°$



Problema 2/111

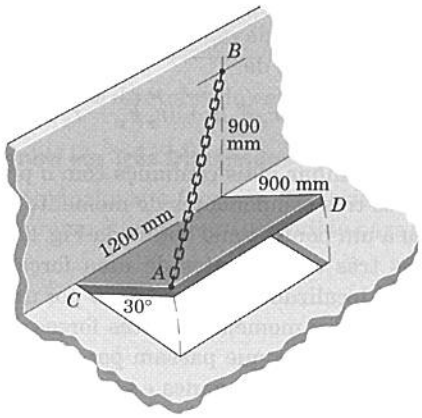
2/112 A placa retangular é suportada por dobradiças ao longo de seu lado BC e pelo cabo AE. Se a força trativa no cabo vale 300N, determine a projeção sobre a linha BC da força exercida pelo cabo sobre a placa. Note que E é o ponto médio da borda horizontal superior do suporte estrutural.



Problema 2/112

2/113 A porta de acesso é mantida na posição aberta a 30° por uma corrente AB. Se a força trativa na corrente é de 100 N, determine a projeção desta força de tração sobre o eixo diagonal CD da porta.

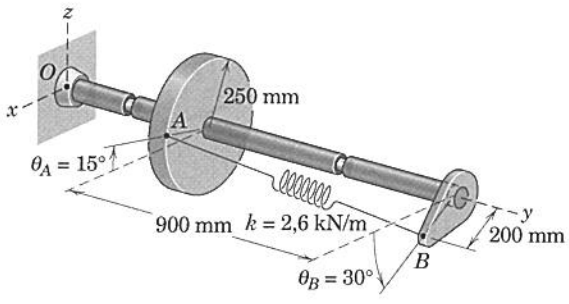
Resp. $T_{CD} = 46{,}0$ N



Problema 2/113

▶2/114 A mola com constante $k = 2{,}6$ kN/m está presa ao disco no ponto A e à placa da extremidade no ponto B, como mostrado. A mola não está esticada quando θ_A e θ_B são, ambos, zero. Se o disco é girado 15° no sentido horário e a placa é girada de 30° no sentido anti-horário, determine uma expressão vetorial para a força $\mathbf{F}$ que a mola exerce no ponto A. O módulo da força da mola é a constante k multiplicada pela deflexão (alongamento ou encurtamento) da mola.

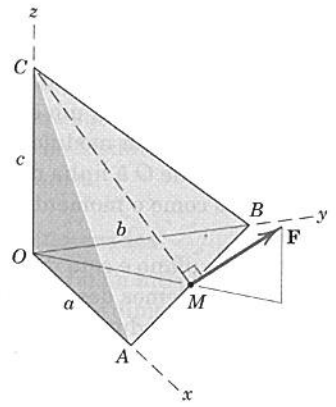
Resp. $\mathbf{F} = -3{,}12\mathbf{i} + 41{,}1\mathbf{j} - 7{,}52\mathbf{k}$ N



Problema 2/114

▶2/115 Determine os componentes x, y e z da força $\mathbf{F}$ que atua no tetraedro como mostrado. Os valores de a, b, c e F são conhecidos e M é o ponto médio da aresta AB.

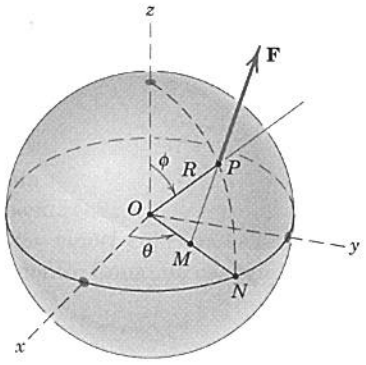
Resp.
$$F_x = \frac{2acF}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}}$$
$$F_y = \frac{2bcF}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}}$$
$$F_z = F\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 4c^2}}$$



Problema 2/115

▶2/116 Uma força $\mathbf{F}$ é aplicada à superfície da esfera como mostrado. Os ângulos θ e ϕ localizam o ponto P e M é o ponto médio de ON. Expresse $\mathbf{F}$ em forma vetorial, usando as coordenadas x, y e z dadas.

Resp. $\mathbf{F} = F\left[\dfrac{(2\operatorname{sen}\phi - 1)(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta) + \mathbf{k}(2\cos\phi)}{\sqrt{5 - 4\operatorname{sen}\phi}}\right]$



Problema 2/116

2/8 Momento e Binário

Em análises bidimensionais é freqüentemente conveniente determinar o módulo de um momento por multiplicação escalar, usando a regra do braço de alavanca. Em três dimensões, no entanto, a determinação da distância perpendicular entre um ponto ou linha e a linha de ação da força pode ser um cálculo tedioso. Um enfoque vetorial com o produto vetorial se torna, portanto, vantajoso.

Momentos em Três Dimensões

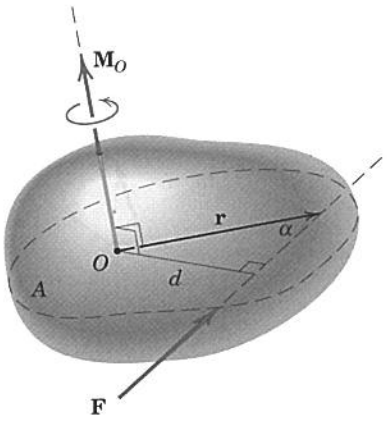
Considere uma força $\mathbf{F}$, com uma dada linha de ação, atuando em um corpo, Fig. 2/21*a*, e qualquer ponto O fora desta linha. O ponto O e a linha de $\mathbf{F}$ estabelecem um plano A. O momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ em relação a um eixo que passa por O e é perpendicular ao plano tem módulo $M_O = Fd$, onde d é a distância perpendicular de O à linha de $\mathbf{F}$. Este momento também é denominado como o momento de $\mathbf{F}$ em relação ao *ponto* O.

O vetor $\mathbf{M}_O$ é normal ao plano e está direcionado ao longo do eixo que passa por O. Podemos descrever tanto o módulo quanto a direção de $\mathbf{M}_O$ pelo produto vetorial introduzido no Módulo 2/4. (Refira-se ao item 7 no Módulo C/7 do Apêndice C.) O vetor $\mathbf{r}$ vai de O a *qualquer* ponto na linha de ação de $\mathbf{F}$. Como descrito no Módulo 2/4, o produto vetorial de $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$ é escrito como $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ e tem módulo $(r \text{ sen } \alpha)F$, que é igual a Fd, o módulo de $\mathbf{M}_O$.

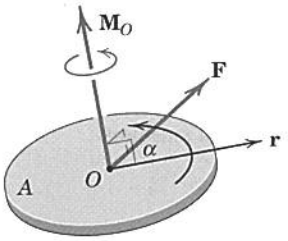
A direção e sentido corretos do momento são estabelecidos pela regra da mão direita, descrita anteriormente nos Módulos 2/4 e 2/5. Assim, com $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$ tratados como vetores livres originados em O, Fig. 2/21*b*, o polegar aponta na direção de $\mathbf{M}_O$ se os dedos da mão direita se curvam na direção da rotação de $\mathbf{r}$ para $\mathbf{F}$ percorrendo um ângulo α. Portanto, podemos escrever o momento de $\mathbf{F}$ em relação ao eixo que passa por O como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{2/14}$$

A ordem $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ dos vetores *deve* ser mantida porque $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ produziria um vetor com sentido oposto ao de $\mathbf{M}_O$; isto é, $\mathbf{F} \times \mathbf{r} = -\mathbf{M}_O$.



(*a*)



(*b*)

Figura 2/21

Avaliando o Produto Vetorial

A expressão do produto vetorial para $\mathbf{M}_O$ pode ser escrita na forma de um determinante

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{2/15}$$

(Reporte-se ao item 7 no Módulo C/7 do Apêndice C se você ainda não está familiarizado com a representação em um determinante do produto vetorial.) Note a simetria e a ordem dos termos e note que um sistema de coordenadas orientado segundo a regra da *mão direita* deve ser usado. A expansão do determinante dá

$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y)\mathbf{i} + (r_z F_x - r_x F_z)\mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\mathbf{k}$$

Para ganhar mais confiança com o produto vetorial, examine os três componentes do momento de uma força em relação a um ponto, como obtido da Fig. 2/22. Esta figura mostra os três componentes de uma força $\mathbf{F}$ atuando em um ponto A localizado em relação a O por um vetor $\mathbf{r}$. Os valores escalares dos momentos destas forças em relação aos eixos positivos x, y e z que passam por O podem ser obtidos pela regra do braço de alavanca e são

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y \quad M_y = r_z F_x - r_x F_z \quad M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

que concordam com os respectivos termos na expansão do determinante para o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

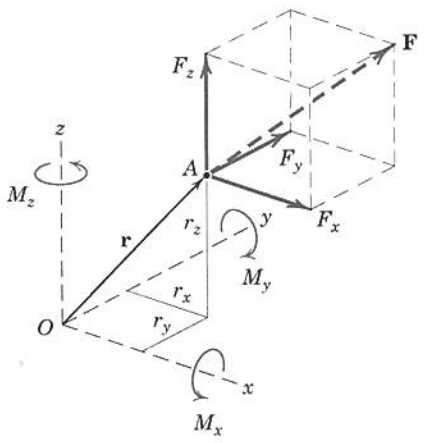


Figura 2/22

Momento em Relação a um Eixo Arbitrário

Podemos agora obter uma expressão para o momento $\mathbf{M}_\lambda$ de $\mathbf{F}$ em relação a *qualquer* eixo λ que passa por O, como mostrado na Fig. 2/23. Se $\mathbf{n}$ é um vetor unitário na direção λ, então podemos usar a expressão do produto escalar para o componente de um vetor como descrito no Módulo 2/7, para obter $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{n}$, o componente de $\mathbf{M}_O$ na direção de λ. Este escalar é o módulo do momento $\mathbf{M}_\lambda$ de $\mathbf{F}$ em relação a λ.

Para obter a expressão vetorial para o momento $\mathbf{M}_\lambda$ de $\mathbf{F}$ em relação a λ, multiplique o módulo pelo vetor unitário direcional $\mathbf{n}$ para obter

$$\boxed{\mathbf{M}_\lambda = (\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}} \qquad (2/16)$$

onde $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ substitui $\mathbf{M}_O$. A expressão $\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ é conhecida como o *produto escalar triplo* (veja o item 8 no Módulo C/7, Apêndice C). Não é necessário escrever $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ porque um produto vetorial não pode ser formado por um vetor e um escalar. Assim, a associação $\mathbf{r} \times (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})$ não teria sentido.

O produto escalar triplo pode ser representado pelo determinante

$$\boxed{|\mathbf{M}_\lambda| = M_\lambda = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}} \qquad (2/17)$$

onde α, β e γ são os cossenos diretores do vetor unitário $\mathbf{n}$.

O Teorema de Varignon em Três Dimensões

No Módulo 2/4 introduzimos o teorema de Varignon em duas dimensões. O teorema é facilmente estendido para três dimensões. A Fig. 2/24 mostra um sistema de forças concorrentes $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots$ O somatório dos momentos destas forças em relação a O é

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \cdots = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots)$$
$$= \mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$$

onde usamos a propriedade distributiva para produtos vetoriais. Usando o símbolo $\mathbf{M}_O$ para representar a soma dos momentos no lado esquerdo da equação anterior, temos

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{R}} \qquad (2/18)$$

Esta equação mostra que a soma dos momentos de um sistema de forças concorrentes em relação a um dado ponto é igual ao momento de sua soma em relação ao mesmo ponto. Como mencionado no Módulo 2/4, este princípio tem muitas aplicações em mecânica.

Binários em Três Dimensões

O conceito do binário foi introduzido no Módulo 2/5 e é facilmente estendido a três dimensões. A Fig. 2/25 mostra duas forças iguais e em sentidos opostos, $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$, atuando em um corpo. O vetor $\mathbf{r}$ vai de *qualquer* ponto B na linha de ação de $-\mathbf{F}$ para *qualquer* ponto A na linha de ação de $\mathbf{F}$. Os pontos A e B são localizados pelos vetores de posição $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$ a partir de *qualquer* ponto O. O momento combinado das duas forças em relação a O é

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

No entanto, $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, de forma que toda referência ao centro de momento O desaparece e o momento do binário se torna

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \qquad (2/19)$$

Assim, o momento de um binário é o *mesmo em relação a todos os pontos*. O módulo de $\mathbf{M}$ é $M = Fd$, onde d é a distância perpendicular entre as linhas de ação das duas forças, conforme descrito no Módulo 2/5.

O momento de um binário é um *vetor livre*, enquanto o momento de uma força em relação a um ponto (que é também o momento em relação a um eixo definido que passa pelo ponto) é um *vetor móvel* cuja direção está ao longo do eixo que passa pelo ponto. Como no caso de duas dimensões, um

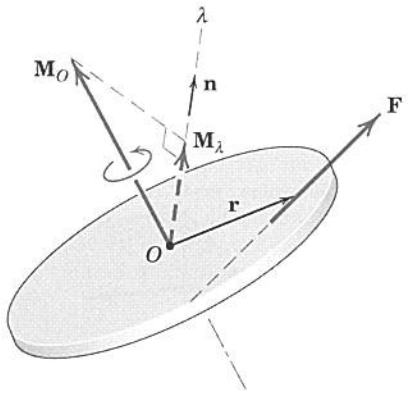


Figura 2/23

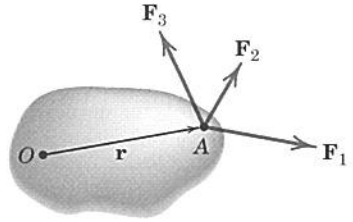


Figura 2/24

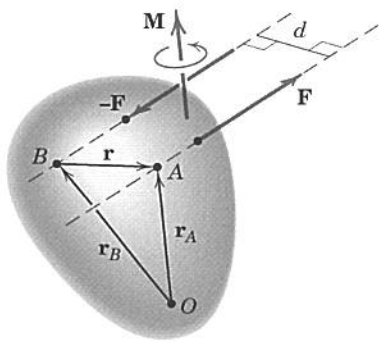


Figura 2/25

binário tende a produzir uma rotação pura do corpo em torno de um eixo normal ao plano das forças que formam o binário.

Os vetores de um binário obedecem todas as regras que governam quantidades vetoriais. Assim, na Fig. 2/26, o vetor do binário $\mathbf{M}_1$ devido a $\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_1$ pode ser somado, como mostrado, ao vetor do binário $\mathbf{M}_2$, devido a $\mathbf{F}_2$ e $-\mathbf{F}_2$, para produzir o momento $\mathbf{M}$ que, por sua vez, pode ser produzido por $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$.

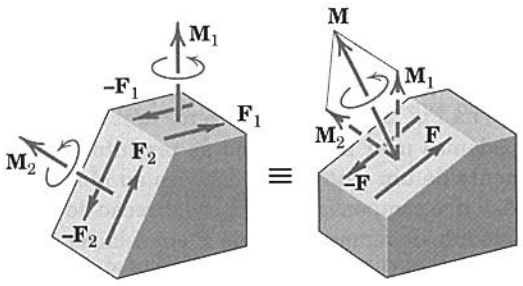


Figura 2/26

No Módulo 2/5 aprendemos como substituir uma força por seu sistema força-binário equivalente. Você também deve ser capaz de fazer esta substituição em três dimensões. O procedimento está representado na Fig. 2/27, onde a força $\mathbf{F}$ atuando em um corpo rígido no ponto A é substituída por uma força igual no ponto B e pelo momento $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Somando as forças iguais e opostas $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ em B, obtemos o binário composto por $-\mathbf{F}$ e pela força original $\mathbf{F}$. Assim, vemos que o vetor do binário é simplesmente o momento da força original em relação ao ponto para o qual a força está sendo deslocada. Enfatizamos que r é um vetor que vai de B para *qualquer* ponto na linha de ação da força original que passa por A.

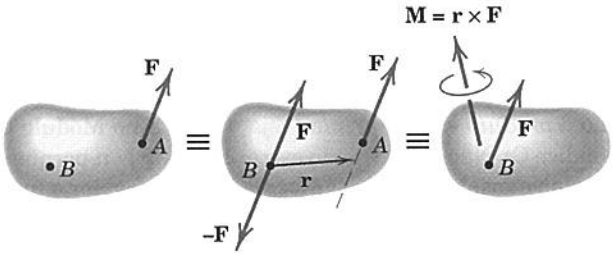
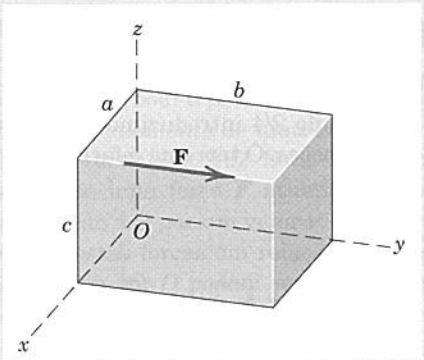


Figura 2/27

Exemplo 2/11

Determine o momento da força $\mathbf{F}$ em relação ao ponto O (*a*) por inspeção e (*b*) pela definição formal do produto vetorial, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

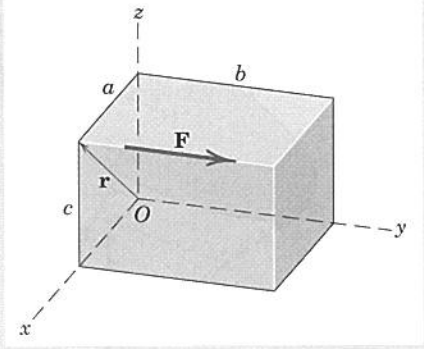


Solução. (*a*) Como $\mathbf{F}$ é paralela ao eixo y, $\mathbf{F}$ não causa momento em relação a esse eixo. Deve ficar claro que o braço de alavanca entre o eixo x e a linha de ação de $\mathbf{F}$ é c e que o momento de $\mathbf{F}$ em relação ao eixo x é negativo. De modo semelhante, o braço de alavanca entre o eixo z e a linha de ação de $\mathbf{F}$ é a e o momento de $\mathbf{F}$ em relação ao eixo z é positivo. Assim temos

$$\mathbf{M}_O = -cF\mathbf{i} + aF\mathbf{k} = F(-c\mathbf{i} + a\mathbf{k}) \qquad \textit{Resp.}$$

(*b*) Formalmente,

① $$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (a\mathbf{i} + c\mathbf{k}) \times F\mathbf{j} = aF\mathbf{k} - cF\mathbf{i}$$
$$= F(-c\mathbf{i} + a\mathbf{k}) \qquad \textit{Resp.}$$

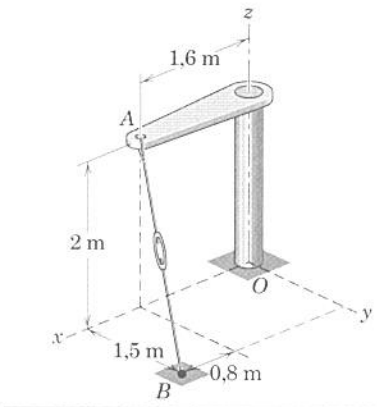


Sugestão Útil

① Alertamos, novamente, que $\mathbf{r}$ vai *desde* o centro de momento *até* a linha de ação de $\mathbf{F}$. Outro vetor de posição possível, mas menos conveniente, é $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Exemplo 2/12

O tensionador é apertado até que a força trativa no cabo AB seja de 2,4 kN. Determine o momento da força atuando no ponto A em relação ao ponto O e determine o módulo desse momento.



Solução. Começamos escrevendo a força descrita como um vetor.

$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{AB} = 2{,}4\left[\frac{0{,}8\mathbf{i} + 1{,}5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{0{,}8^2 + 1{,}5^2 + 2^2}}\right]$$

$$= 0{,}731\mathbf{i} + 1{,}371\mathbf{j} - 1{,}829\mathbf{k} \text{ kN}$$

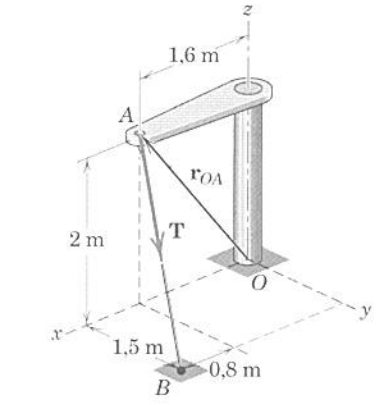
O momento dessa força em relação ao ponto O é

① $$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{T} = (1{,}6\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \times (0{,}731\mathbf{i} + 1{,}371\mathbf{j} - 1{,}829\mathbf{k})$$

$$= -2{,}74\mathbf{i} + 4{,}39\mathbf{j} + 2{,}19\mathbf{k} \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Esse vetor tem um módulo de

$$M_O = \sqrt{2{,}74^2 + 4{,}39^2 + 2{,}19^2} = 5{,}62 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

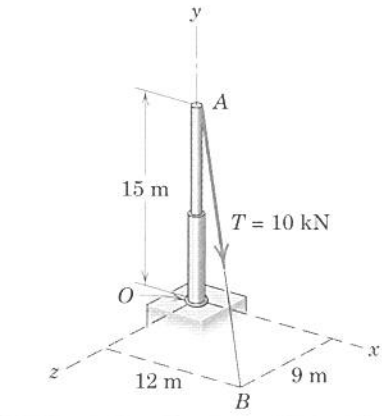


Sugestão Útil

① O estudante deve verificar, por inspeção, os sinais das componentes do momento.

Exemplo 2/13

Uma força trativa $\mathbf{T}$ de módulo 10 kN é aplicada ao cabo preso no topo do mastro rígido, em A, e preso ao chão em B. Determine o momento M_z de $\mathbf{T}$ em relação ao eixo z que passa pela base O.



Solução (a). O momento solicitado pode ser obtido encontrando o componente ao longo do eixo z do momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{T}$ em relação ao ponto O. O vetor $\mathbf{M}_O$ é normal ao plano definido por $\mathbf{T}$ e pelo ponto O, como mostrado na segunda figura. Ao usar-se a Eq. 2/14 para encontrar $\mathbf{M}_O$, o vetor $\mathbf{r}$ é qualquer vetor do ponto O à linha de ação de $\mathbf{T}$. A escolha ① mais simples é o vetor de O até A, que é escrito como $\mathbf{r} = 15\mathbf{j}$ m. A expressão vetorial para $\mathbf{T}$ é

$$\mathbf{T} = T\mathbf{n}_{AB} = 10\left[\frac{12\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{(12)^2 + (-15)^2 + (9)^2}}\right]$$

$$= 10(0{,}566\mathbf{i} - 0{,}707\mathbf{j} + 0{,}424\mathbf{k}) \text{ kN}$$

A partir da Eq. 2/14,

$$[\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}] \qquad \mathbf{M}_O = 15\mathbf{j} \times 10(0{,}566\mathbf{i} - 0{,}707\mathbf{j} + 0{,}424\mathbf{k})$$

$$= 150(-0{,}566\mathbf{k} + 0{,}424\mathbf{i}) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

O valor M_z do momento desejado é a componente escalar de $\mathbf{M}_O$ na direção z ou $M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k}$. Portanto,

$$M_z = 150(-0{,}566\mathbf{k} + 0{,}424\mathbf{i}) \cdot \mathbf{k} = -84{,}9 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

② O sinal de menos indica que o vetor $\mathbf{M}_z$ está na direção negativa de z. Expresso como um vetor, o momento é $\mathbf{M}_z = -84{,}9\mathbf{k}$ kN · m.

Sugestões Úteis

① Poderíamos usar também o vetor desde O até B como $\mathbf{r}$ e obter o mesmo resultado, mas usar o vetor OA é mais simples.

② É sempre útil acompanhar suas operações vetoriais com um esboço dos vetores de forma a manter uma imagem clara da geometria do problema.

Solução (b). A força de módulo T é projetada nos componentes T_z e T_{xy} no plano x-y. Como T_z é paralelo ao eixo z, ele não pode exercer momento em relação a este eixo.
③ O momento M_z é, portanto, devido somente a T_{xy} e é $M_z = T_{xy}d$, onde d é a distância perpendicular de T_{xy} a O. O cosseno do ângulo entre T e T_{xy} é $\sqrt{15^2 + 12^2} / \sqrt{15^2 + 12^2 + 9^2} = 0{,}906$, e, portanto,

$$T_{xy} = 10(0{,}906) = 9{,}06 \text{ kN}$$

O braço de alavanca d é igual a $\overline{OA}$ multiplicado pelo seno do ângulo entre T_{xy} e OA, ou

$$d = 15 \frac{12}{\sqrt{12^2 + 15^2}} = 9{,}37 \text{ m}$$

Portanto, o momento de **T** em relação ao eixo z tem o módulo

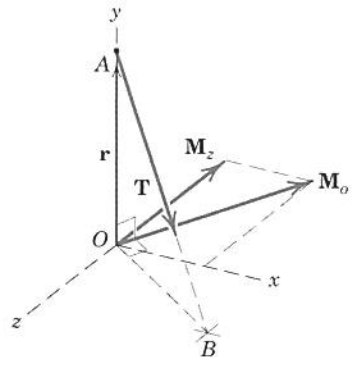
$$M_z = 9{,}06(9{,}37) = 84{,}9 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

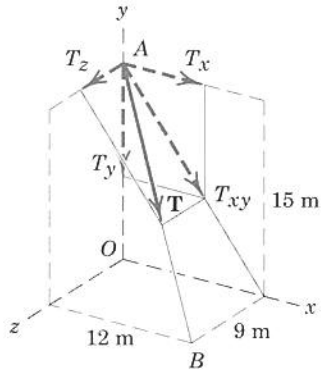
e está no sentido horário quanto visualizado no plano x-y.

Solução (c). O componente T_{xy} pode ser ainda projetado em seus componentes T_x e T_y. Está claro que T_y não exerce momento em relação ao eixo z já que passa pelo eixo, de forma que o momento solicitado se deve somente a T_x. O cosseno diretor de **T** em relação ao eixo x é $12/\sqrt{9^2 + 12^2 + 15^2} = 0{,}566$ de forma que $T_x = 10(0{,}566) = 5{,}66$ kN. Assim,

$$M_z = 5{,}66(15) = 84{,}9 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

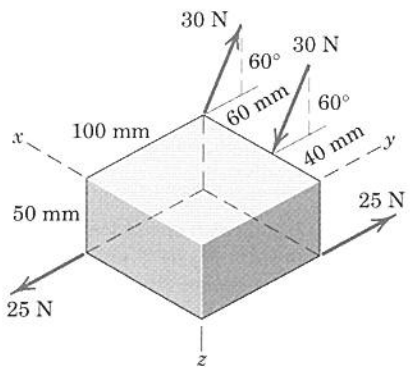
③ Esboce a vista x-y do problema e mostre d.





Exemplo 2/14

Determine o módulo e a direção do binário **M** que substituirá os dois binários dados e ainda produzirá o mesmo efeito externo sobre o bloco. Especifique as duas forças **F** e $-\mathbf{F}$ aplicadas nas duas faces do bloco, paralelas ao plano y-z, que podem substituir as quatro forças dadas. As forças de 30 N atuam paralelas ao plano y-z.



Solução. O binário devido às forças de 30 N tem módulo $M_1 = 30(0{,}06) = 1{,}80$ N · m. A direção de $\mathbf{M}_1$ é normal ao plano definido pelas duas forças e o sentido, mostrado na figura, é estabelecido pela regra da mão direita. O binário devido às forças de 25 N tem módulo $M_2 = 25(0{,}10) = 2{,}50$ N · m, com a direção e o sentido mostrados na figura. Os dois vetores dos binários se combinam para dar os componentes

$$M_y = 1{,}80 \text{ sen } 60° = 1{,}559 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = -2{,}50 + 1{,}80 \cos 60° = -1{,}600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

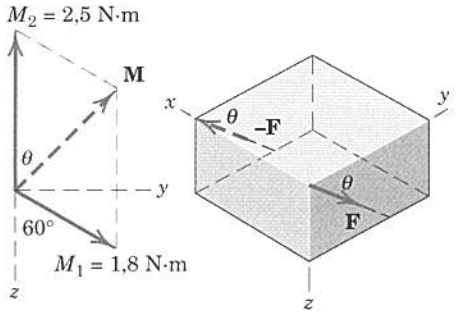
① Assim,
$$M = \sqrt{(1{,}559)^2 + (-1{,}600)^2} = 2{,}23 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

com
$$\theta = \tan^{-1} \frac{1{,}559}{1{,}600} = \tan^{-1} 0{,}974 = 44{,}3° \qquad \textit{Resp.}$$

As forças **F** e $-\mathbf{F}$ estão em um plano normal ao momento **M** e seus braços de alavanca, como visto na figura à direita, valem 100 mm. Portanto, cada força tem módulo

[$M = Fd$]
$$F = \frac{2{,}23}{0{,}10} = 22{,}3 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

e a direção $\theta = 44{,}3°$.

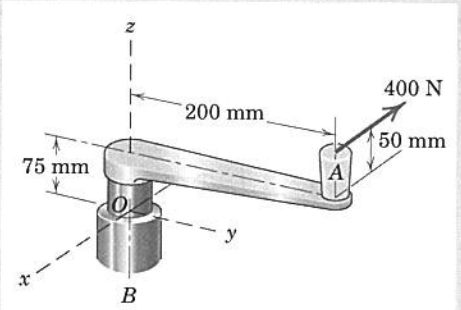


Sugestão Útil

① Lembre-se de que os vetores dos binários são *vetores livres* e, portanto, não têm linhas de ação únicas.

Exemplo 2/15

Uma força de 400 N é aplicada em A na manivela da alavanca de controle que está conectada ao eixo rígido OB. Ao determinar o efeito da força sobre o eixo, em uma seção transversal como aquela em O, podemos substituir a força por uma força equivalente em O e por um momento. Descreva este momento como um vetor $\mathbf{M}$.



Solução. O momento pode ser expresso em notação vetorial como $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, onde $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA} = 0{,}2\mathbf{j} + 0{,}125\mathbf{k}$ m e $\mathbf{F} = -400\mathbf{i}$ N. Assim,

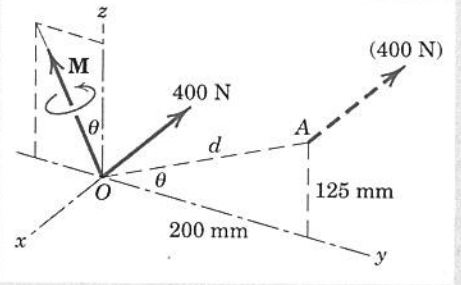
$$\mathbf{M} = (0{,}2\mathbf{j} + 0{,}125\mathbf{k}) \times (-400\mathbf{i}) = -50\mathbf{j} + 80\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Alternativamente, vemos que mover a força de 400 N por uma distância $d = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}2^2} = 0{,}236$ m para uma posição paralela que passa por O, requer a adição de um momento $\mathbf{M}$ cujo módulo é

$$M = Fd = 400(0{,}236) = 94{,}3\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

O vetor do momento é perpendicular ao plano para o qual a força foi deslocada e seu sentido é o do momento da força dada em relação a O. A direção de $\mathbf{M}$ no plano y-z é dada por

$$\theta = \tan^{-1}\frac{125}{200} = 32{,}0^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

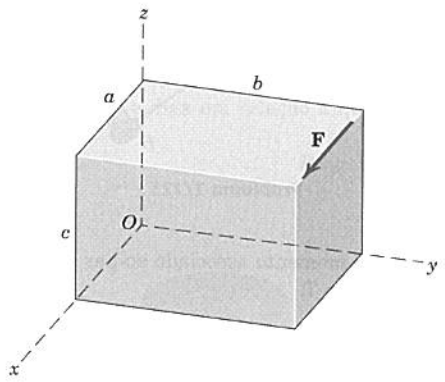


PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

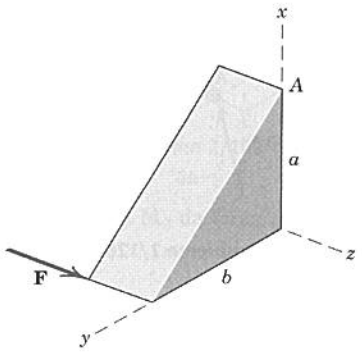
2/117 Determine o momento da força $\mathbf{F}$ em relação ao ponto O.

Resp. $\mathbf{M}_O = F(c\mathbf{j} - b\mathbf{k})$



Problema 2/117

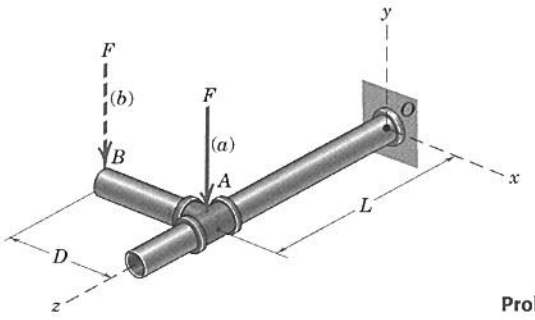
2/118 Determine o momento da força $\mathbf{F}$ em relação ao ponto A.



Problema 2/118

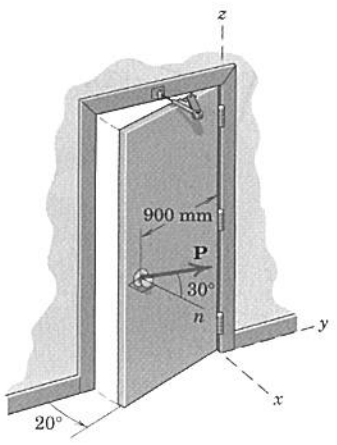
2/119 Determine o momento da força de módulo F em relação ao ponto O para o caso (a) quando a força $\mathbf{F}$ é aplicada em A e para o caso (b) quando $\mathbf{F}$ é aplicada em B.

Resp. (a) $\mathbf{M}_O = FL\mathbf{i}$
(b) $\mathbf{M}_O = F(L\mathbf{i} + D\mathbf{k})$



Problema 2/119

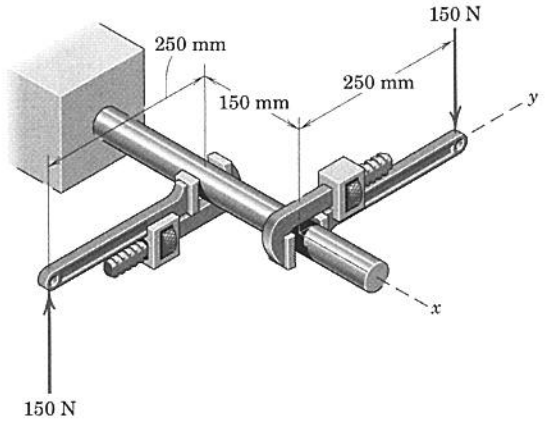
2/120 Ao se abrir uma porta que está equipada com um mecanismo de retorno, uma pessoa exerce uma força $\mathbf{P}$ de módulo 32 N, como mostrado. A força $\mathbf{P}$ e a normal n à face da porta estão em um plano vertical. Calcule o momento de $\mathbf{P}$ em relação ao eixo z.



Problema 2/120

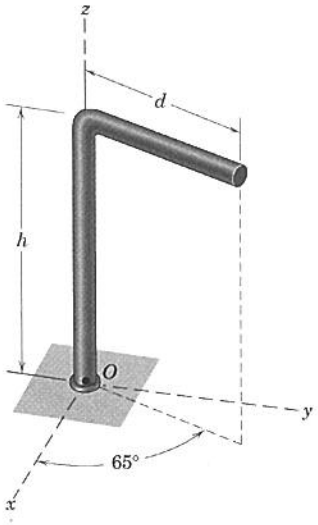
2/121 As duas forças que atuam nos cabos das chaves de grifo formam um binário **M**. Expresse o binário como um vetor.

Resp. $\mathbf{M} = -75\mathbf{i} + 22{,}5\mathbf{j}$ N · m



Problema 2/121

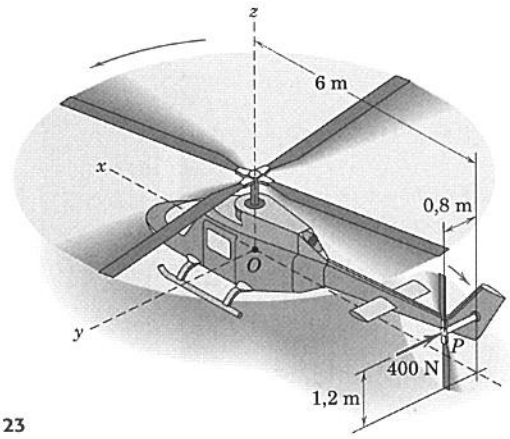
2/122 A barra curva tem uma massa ρ por unidade de comprimento. Determine o momento do peso da barra em relação ao ponto O.



Problema 2/122

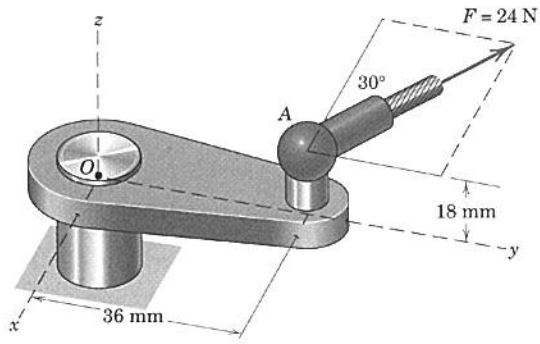
2/123 Um helicóptero está mostrado e são dadas certas coordenadas tridimensionais. Durante um teste no solo, uma força aerodinâmica de 400 N é aplicada ao rotor da cauda em P, como mostrado. Determine o momento desta força em relação ao ponto O na fuselagem.

Resp. $\mathbf{M}_O = 480\mathbf{i} + 2400\mathbf{k}$ N · m



Problema 2/123

2/124 A força de 24 N está aplicada ao ponto A do conjunto de suportes. Determine o momento dessa força em relação ao ponto O.

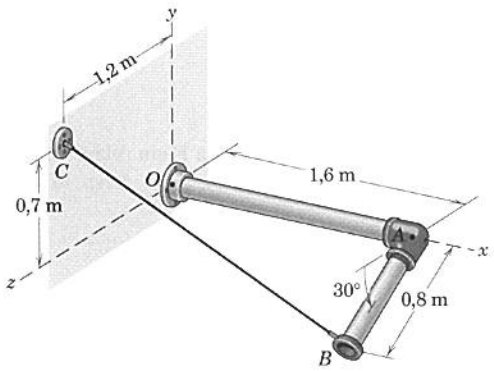


Problema 2/124

2/125 O tubo em ângulo reto OAB do Prob. 2/108 é novamente mostrado aqui. Substitua a força trativa de 750 N que o cabo exerce no ponto B por um sistema força-binário no ponto O.

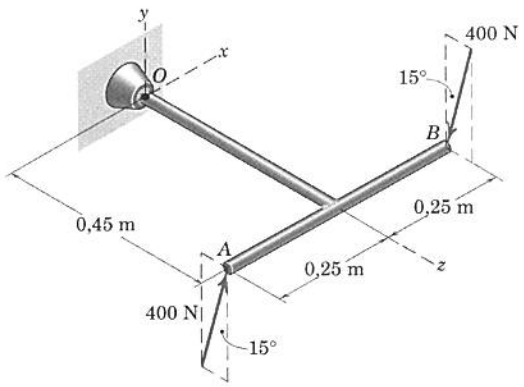
Resp. $\mathbf{R} = -598\mathbf{i} + 411\mathbf{j} + 189{,}5\mathbf{k}$ N

$\mathbf{M}_O = -361\mathbf{i} - 718\mathbf{j} + 419\mathbf{k}$ N · m



Problema 2/125

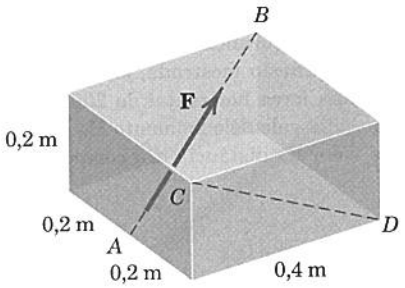
2/126 Determine o momento associado ao par de forças de 400 N aplicado à estrutura em T.



Problema 2/126

2/127 Se o módulo do momento de **F** em relação à linha CD vale 50 N · m, determine o módulo de **F**.

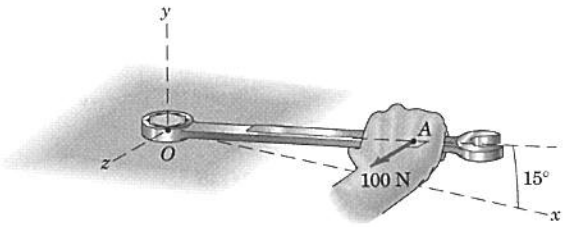
Resp. $F = 228$ N



Problema 2/127

Problemas Representativos

2/128 Um mecânico aplica a força horizontal de 100 N perpendicularmente à chave de boca, como indicado na figura. Determine o momento dessa força em relação ao centro do parafuso em O. A linha de centro da chave está situada no plano x-y.

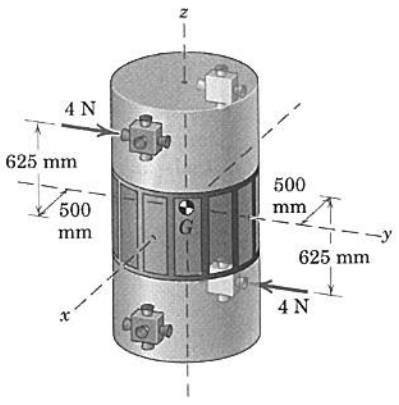


$\overline{OA} = 185$ mm

Problema 2/128

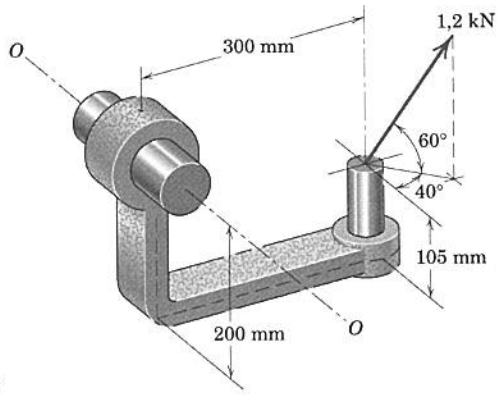
2/129 Dois retrofoguetes de 4 N do satélite estacionário são acionados simultaneamente, como mostrado. Calcule o momento associado com este binário e diga em relação a que eixos começarão a ocorrer rotações.

Resp. $\mathbf{M} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ N · m



Problema 2/129

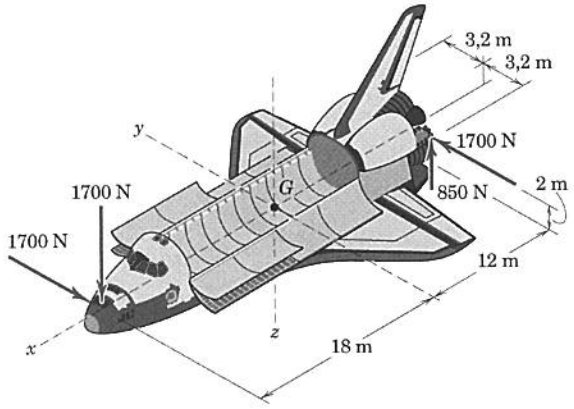
2/130 Calcule o momento $\mathbf{M}_O$ da força de 1,2 kN em relação ao eixo O-O.



Problema 2/130

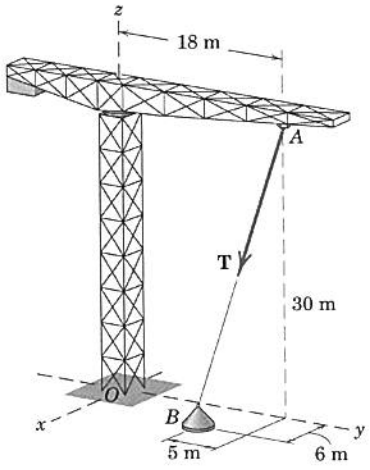
2/131 Um ônibus espacial está sujeito a impulsos de cinco dos motores de seu sistema de controle de reações. Quatro dos impulsos estão mostrados na figura; o quinto é um impulso de 850 N para cima, na traseira à direita, simétrico ao impulso de 850 N mostrado na traseira à esquerda. Calcule o momento destas forças em relação ao ponto G e mostre que as forças têm o mesmo momento em relação a todos os pontos.

Resp. $\mathbf{M} = 3400\mathbf{i} - 51000\mathbf{j} - 51000\mathbf{k}$ N · m



Problema 2/131

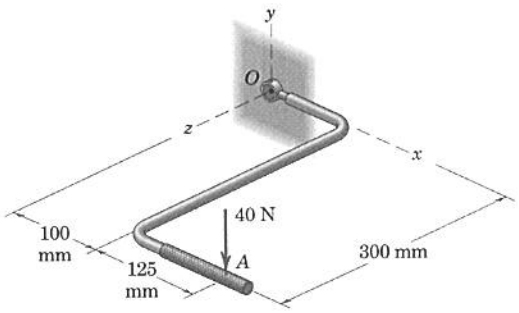
2/132 Ao levantar uma carga da posição B, desenvolve-se no cabo uma força trativa $\mathbf{T}$ de 24 kN. Calcule o momento que $\mathbf{T}$ produz em relação à base O da grua de construção.



Problema 2/132

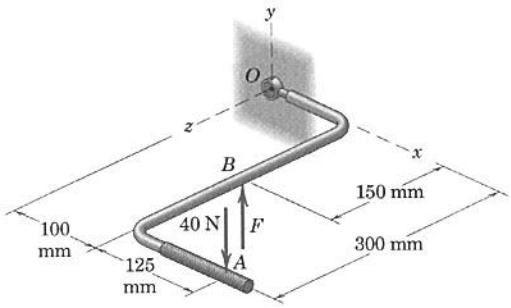
2/133 A chave especial mostrada é usada para parafusos de difícil acesso que tem uma especificação de baixo torque. Determine o momento da força de 40 N aplicada no ponto A do cabo da chave em relação a O. Discuta qualquer desvantagem dessa chave.

Resp. $\mathbf{M}_O = 12\mathbf{i} - 9\mathbf{k}$ N · m



Problema 2/133

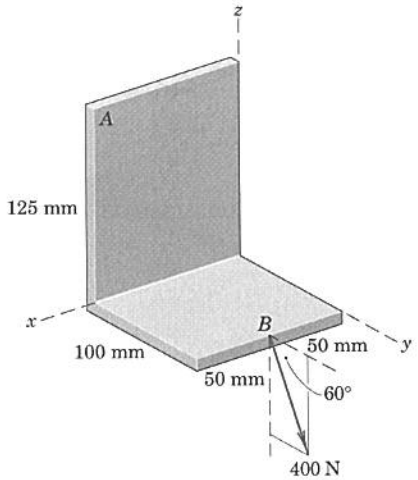
2/134 Para reduzir o momento indesejável em relação ao eixo x, um mecânico usa sua mão esquerda para sustentar o cabo da chave no ponto B. Que força direcionada para cima, F, deve ser exercida para que não haja momento em relação ao eixo x? Qual é, então, o momento resultante em relação a O?



Problema 2/134

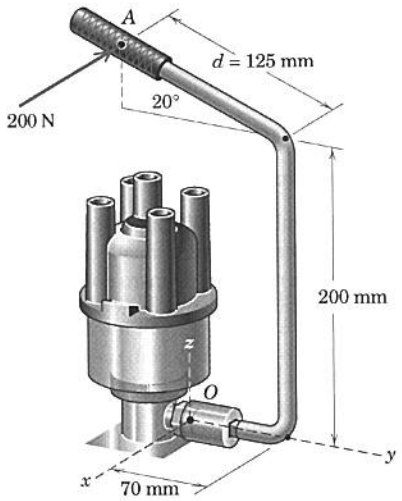
2/135 Determine o momento da força de 400 N em relação ao ponto A (a) usando a relação do produto vetorial e (b) projetando a força em seus componentes e achando seus respectivos momentos.

Resp. $\mathbf{M}_A = -9{,}64\mathbf{i} - 17{,}32\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ N · m



Problema 2/135

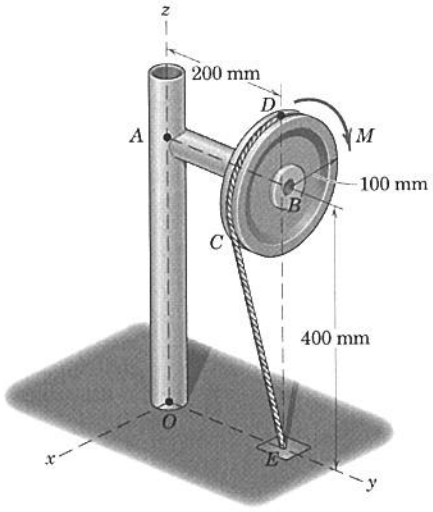
2/136 A chave especial mostrada na figura é projetada para ter acesso ao parafuso de segurança de alguns distribuidores de automóvel. Para a configuração mostrada, onde a chave está em um plano vertical e uma força horizontal de 200 N é aplicada em A, perpendicular ao cabo, calcule o momento $\mathbf{M}_O$ aplicado ao parafuso em O. Para que valor da distância d o componente z de $\mathbf{M}_O$ será zero?



Problema 2/136

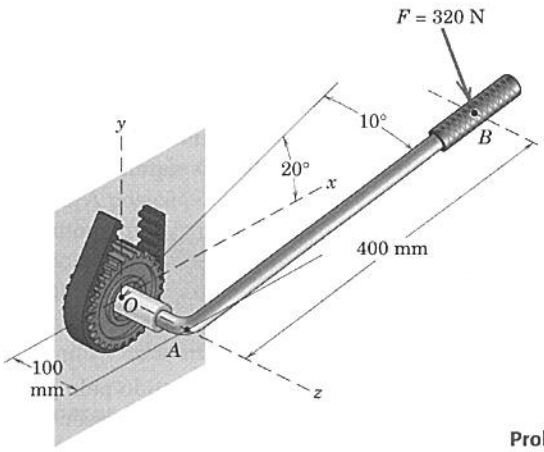
2/137 O momento $\mathbf{M}$ aplicado à polia causa uma força trativa $T = 80$ N no cabo, que está preso à polia em D e ao chão em E. Determine o momento em relação a O dessa força de 80 N, quando aplicada em C.

Resp. $\mathbf{M}_O = -15{,}49\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ N · m



Problema 2/137

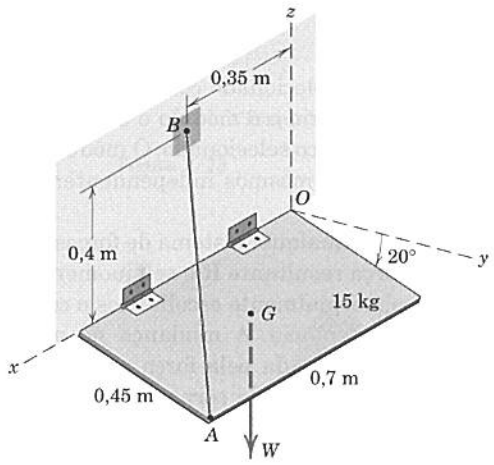
2/138 Uma força de 320 N é aplicada à extremidade da chave, quando a polia dentada é presa a biela de um motor. A força é perpendicular ao plano contendo os pontos O, A e B. Determine o momento dessa força em relação ao ponto O.



Problema 2/138

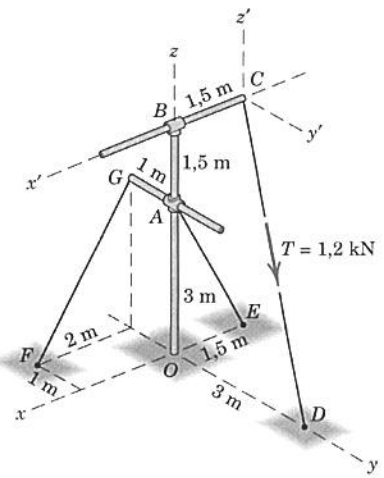
2/139 Utilizando os princípios de equilíbrio a serem desenvolvidos no Capítulo 3, pode-se determinar que a força trativa no cabo *AB* vale 143,4 N. Determine o momento dessa força trativa atuando no ponto *A* em relação ao eixo *x*. Compare seu resultado ao momento do peso *W* da placa uniforme de 15 kg em relação ao eixo *x*. Qual é o momento da força trativa atuando em *A* em relação à linha *OB*?

Resp. $M_x = 31{,}1$ N · m, $(M_x)_W = -31{,}1$ N · m
$M_{OB} = 0$



Problema 2/139

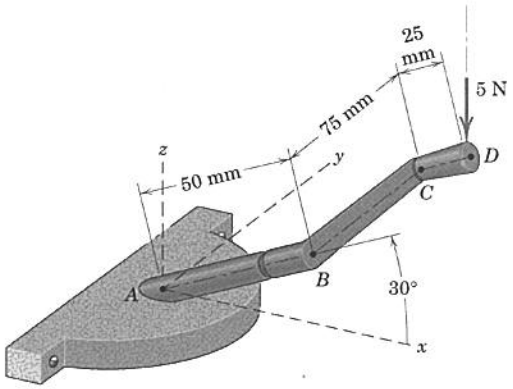
2/140 O poste rígido com barras cruzadas do Prob. 2/105 é mostrado novamente aqui. Determine a expressão vetorial para o momento da força trativa de 1,2 kN (*a*) em relação ao ponto *O* e (*b*) em relação ao eixo *z* do poste. Encontre cada momento de duas maneiras diferentes.



Problema 2/140

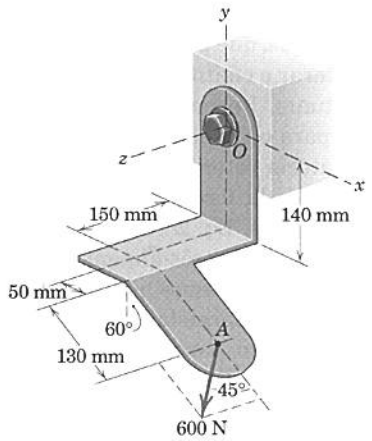
2/141 Uma força vertical de 5 N é aplicada à manete do mecanismo de abertura de janelas quando a manivela *BC* está na horizontal. Determine o momento da força em relação ao ponto *A* e em relação à linha *AB*.

Resp. $\mathbf{M}_A = -375\mathbf{i} + 325\mathbf{j}$ N · mm
$\mathbf{M}_{AB} = -281\mathbf{i} - 162{,}4\mathbf{k}$ N · mm

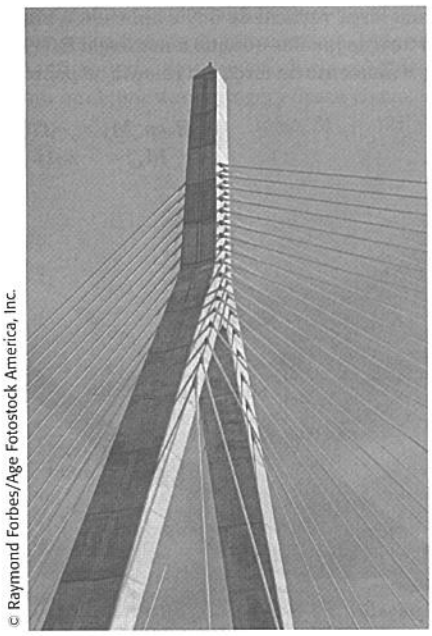


Problema 2/141

2/142 Determine a expressão vetorial para o momento $\mathbf{M}_O$ da força de 600 N em relação ao ponto *O*. A especificação de projeto para o parafuso em *O* necessitaria deste resultado.



Problema 2/142


© Raymond Forbes/Age Fotostock America, Inc.

Os cabos de uma ponte suspensa exercem um sistema tridimensional de forças concentradas nessa torre da ponte.

2/9 Resultantes

Na Seção 2/6 definimos a resultante como a combinação mais simples de forças, que pode substituir um dado sistema de forças, sem alterar o efeito externo sobre o corpo rígido no qual as forças atuam. Encontramos o módulo e direção da força resultante para o sistema de forças bidimensional por meio de um somatório vetorial de forças, Eq. 2/9, e localizamos a linha de ação da força resultante pela aplicação do princípio dos momentos, Eq. 2/10. Esses mesmos princípios podem ser estendidos para três dimensões.

Na seção anterior mostramos que uma força pode ser movida para uma posição paralela pela adição de um binário correspondente. Portanto, para o sistema de forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ ... atuando em um corpo rígido na Fig. 2/28*a*, podemos mover uma força de cada vez para o ponto arbitrário O, desde que também introduzamos um momento para cada força transferida. Assim, por exemplo, podemos mover a força $\mathbf{F}_1$ para O, desde que introduzamos o momento $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$, onde $\mathbf{r}_1$ é um vetor de O até qualquer ponto na linha de ação de $\mathbf{F}_1$. Quando todas as forças são deslocadas para O desta maneira, temos um sistema de forças concorrentes em O e um sistema de vetores de momento, conforme representado na parte *b* da figura. As forças concorrentes podem então ser somadas vetorialmente para produzir uma força resultante $\mathbf{R}$ e os momentos podem também ser somados para produzir um momento resultante $\mathbf{M}$, Fig. 2/28*c*. O sistema geral de forças é então reduzido a

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots = \Sigma\mathbf{F}$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \cdots = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (2/20)$$

Os vetores de momento são mostrados passando pelo ponto O, mas como eles são vetores livres, podem ser representados em quaisquer posições paralelas. Os módulos das resultantes e seus componentes são

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z$$
$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$
$$\mathbf{M}_x = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x \qquad \mathbf{M}_y = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_y \qquad \mathbf{M}_z = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z$$
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \qquad (2/21)$$

O ponto O selecionado como o ponto de concorrência das forças é arbitrário e o módulo e direção de $\mathbf{M}$ dependem do ponto O específico selecionado. O módulo e a direção de $\mathbf{R}$, no entanto, são os mesmos independentemente do ponto selecionado.

Em geral, qualquer sistema de forças pode ser substituído por sua força resultante $\mathbf{R}$ e seu momento resultante $\mathbf{M}$. Em dinâmica, normalmente escolhemos o centro de massa como ponto de referência. A mudança no movimento linear do corpo é determinada pela força resultante e a mudança no movimento angular do corpo é determinada pelo momento resultante. Em estática, o corpo está em *completo equilíbrio* quando a força resultante $\mathbf{R}$ é zero e o torque resultante $\mathbf{M}$ também é zero. Assim, a determinação das resultantes é fundamental tanto em estática como em dinâmica.

Examinaremos agora as resultantes para vários sistemas de forças especiais.

Forças Concorrentes. Quando forças são concorrentes em um ponto, apenas a primeira das Eqs. 2/20 precisa ser

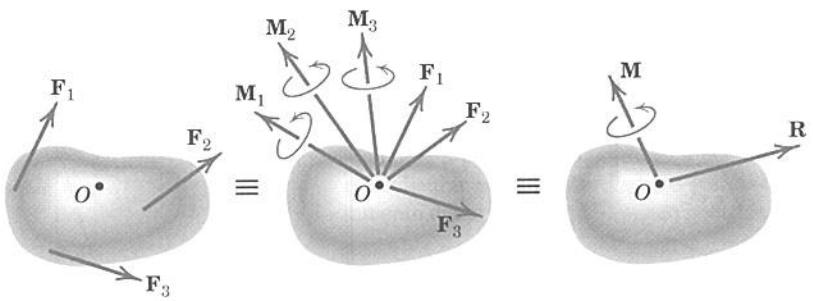


Figura 2/28 (*a*) (*b*) (*c*)

utilizada porque não existem momentos em relação ao ponto de concorrência.

Forças Paralelas. Para um sistema de forças paralelas, nem todas no mesmo plano, o módulo da força paralela resultante **R** é simplesmente o valor da soma algébrica das forças dadas. A posição de sua linha de ação é obtida pelo princípio dos momentos exigindo-se que $\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O$. Aqui, **r** é um vetor posicional que se estende do ponto de referência força-binário O à linha de ação final de **R**, e $\mathbf{M}_O$ é a soma dos momentos das forças individuais em relação a O. Veja o Exemplo 2/17 para uma análise de sistemas de forças paralelas.

Forças Coplanares. A Seção 2/6 foi dedicada a este sistema de forças.

Torçor Resultante. Quando o vetor de torque resultante **M** é paralelo à força resultante **R**, como mostrado na Fig. 2/29, a resultante é chamada *torçor*. Por definição, um torçor é positivo se os vetores de torque e força apontam no mesmo sentido e negativo se eles apontam em sentidos opostos. Um exemplo comum de um torçor positivo é encontrado no uso de uma chave de fenda para aparafusar um parafuso com rosca direita. Qualquer sistema geral de forças pode ser representado por um torçor aplicado ao longo de uma linha de ação única. Esta redução é ilustrada na Fig. 2/30, na qual a parte *a* da figura representa, para o sistema geral de forças, a força resultante **R** atuando em algum ponto O e o torque resultante correspondente **M**. Por conveniência, apesar de **M** ser um vetor livre, ele foi representado como atuando em O.

Na parte *b* da figura, **M** está projetado nos componentes $\mathbf{M}_1$ ao longo da direção de **R** e $\mathbf{M}_2$ normal a **R**. Na parte *c* da figura, o torque $\mathbf{M}_2$ é substituído por suas duas forças equivalentes **R** e $-\mathbf{R}$, separadas por uma distância $d = M_2/R$ com $-\mathbf{R}$ aplicado em O para cancelar a força **R** original. Este passo deixa a resultante **R**, que atua ao longo de uma linha de ação nova e única, e o torque paralelo $\mathbf{M}_1$, que é um vetor livre, como mostrado na parte *d* da figura. Assim, as resultantes do sistema geral de forças original foram transformadas em um torçor (positivo neste exemplo) com seu eixo único definido pela nova posição de **R**.

Vemos, a partir da Fig. 2/30, que o eixo da resultante do torçor está em um plano que passa por O e é normal ao plano definido por **R** e **M**. O torçor é a forma mais simples na qual pode ser expressa a resultante de um sistema geral de forças. Esta forma da resultante, no entanto, tem aplicação limitada porque, normalmente, é mais conveniente usar como ponto de referência algum ponto O tal como o centro de massa do corpo ou outra origem de coordenadas conveniente, fora do eixo do torçor.

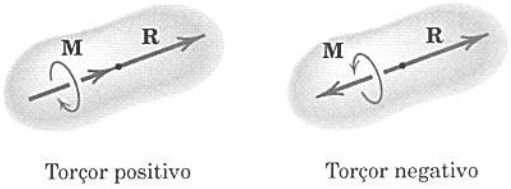


Figura 2/29

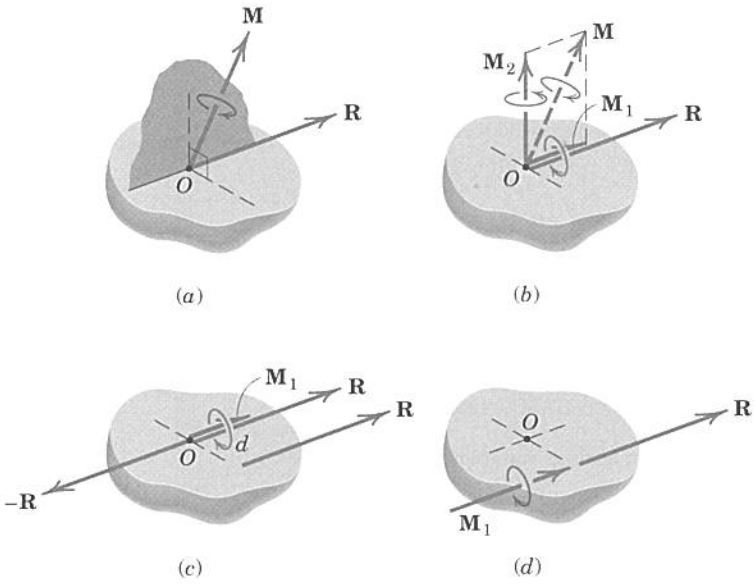
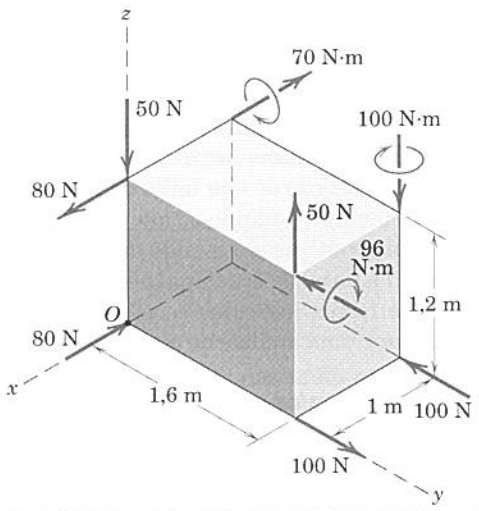


Figura 2/30

Exemplo 2/16

Determine a resultante do sistema de força e torques que atuam no sólido retangular.



Solução. Escolhemos o ponto O como um ponto de referência conveniente para o passo inicial de redução das forças dadas em um sistema força-binário. A força resultante é

① $$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = (80 - 80)\mathbf{i} + (100 - 100)\mathbf{j} + (50 - 50)\mathbf{k} = \mathbf{0}\ \text{N}$$

A soma dos momentos em relação a O é

② $$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= [50(1{,}6) - 70]\mathbf{i} + [80(1{,}2) - 96]\mathbf{j} + [100(1) - 100]\mathbf{k} \\ &= 10\mathbf{i}\ \text{N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Conseqüentemente, a resultante consiste de um torque que, é claro, pode ser aplicado a qualquer ponto do corpo ou de sua extensão.

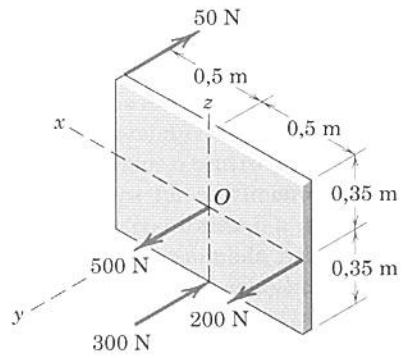
Sugestões Úteis

① Como o somatório das forças é zero, concluímos que a resultante, se ela existir, tem que ser um torque.

② Os momentos associados com os pares de força são fáceis de obter usando a regra $M = Fd$ e atribuindo a direção do vetor unitário por inspeção. Em muitos problemas tridimensionais isto pode ser mais simples do que o enfoque $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Exemplo 2/17

Determine a resultante do sistema de forças paralelas que atua na placa. Resolva usando um enfoque vetorial.

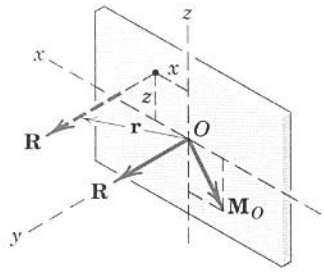


Solução. A transferência de todas as forças para o ponto O resulta no sistema força-binário

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = (200 + 500 - 300 - 50)\mathbf{j} = 350\mathbf{j}\ \text{N}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= [50(0{,}35) - 300(0{,}35)]\mathbf{i} + [-50(0{,}50) - 200(0{,}50)]\mathbf{k} \\ &= -87{,}5\mathbf{i} - 125\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

O posicionamento de $\mathbf{R}$ de forma que ele, sozinho, represente o sistema força-binário anterior, é determinado pelo princípio dos momentos na forma vetorial



$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O$$

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times 350\mathbf{j} = -87{,}5\mathbf{i} - 125\mathbf{k}$$

$$350x\mathbf{k} - 350z\mathbf{i} = -87{,}5\mathbf{i} - 125\mathbf{k}$$

Desta única equação vetorial podemos obter as duas equações escalares

$$350x = -125 \qquad \text{e} \qquad -350z = -87{,}5$$

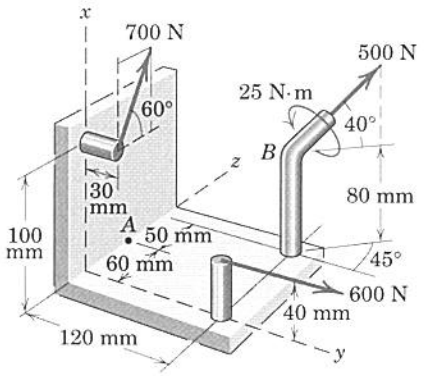
Portanto, $x = -0{,}357$ m e $z = 0{,}250$ m são as coordenadas pelas quais a linha de ação de $\mathbf{R}$ deve passar. O valor de y pode, é claro, ser qualquer um, como permitido pelo princípio da transmissibilidade. Assim, como esperado, a variável y desaparece da análise vetorial anterior.

Sugestão Útil

① Você deve obter também uma solução escalar para este problema.

Exemplo 2/18

Substitua as duas forças e o torçor negativo por uma única força **R** aplicada em A e pelo torque correspondente **M**.



Solução. A força resultante tem os componentes

$$[R_x = \Sigma F_x] \qquad R_x = 500 \text{ sen } 40° + 700 \text{ sen } 60° = 928 \text{ N}$$

$$[R_y = \Sigma F_y] \qquad R_y = 600 + 500 \cos 40° \cos 45° = 871 \text{ N}$$

$$[R_z = \Sigma F_z] \qquad R_z = 700 \cos 60° + 500 \cos 40° \text{ sen } 45° = 621 \text{ N}$$

Assim

$$\mathbf{R} = 928\mathbf{i} + 871\mathbf{j} + 621\mathbf{k} \text{ N}$$

e

$$R = \sqrt{(928)^2 + (871)^2 + (621)^2} = 1416 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

O torque a ser somado como resultado do deslocamento da força de 500 N é

① $[\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}]$ $\mathbf{M}_{500} = (0{,}08\mathbf{i} + 0{,}12\mathbf{j} + 0{,}05\mathbf{k}) \times 500(\mathbf{i} \text{ sen } 40° + \mathbf{j} \cos 40° \cos 45° + \mathbf{k} \cos 40° \text{ sen } 45°)$

onde **r** é o vetor de A até B.

A expansão termo a termo, ou o determinante, dá

$$\mathbf{M}_{500} = 18{,}95\mathbf{i} - 5{,}59\mathbf{j} - 16{,}90\mathbf{k} \text{ N·m}$$

② O momento da força de 600 N em relação a A é escrito por inspeção de suas componentes x e z, que dá

$$\mathbf{M}_{600} = (600)(0{,}060)\mathbf{i} + (600)(0{,}040)\mathbf{k}$$

$$= 36{,}0\mathbf{i} + 24{,}0\mathbf{k} \text{ N·m}$$

O momento da força de 700 N em relação a A é facilmente obtido dos momentos das componentes x e z da força. O resultado é

$$\mathbf{M}_{700} = (700 \cos 60°)(0{,}030)\mathbf{i} - [(700 \text{ sen } 60°)(0{,}060) + (700 \cos 60°)(0{,}100)]\mathbf{j} - (700 \text{ sen } 60°)(0{,}030)\mathbf{k}$$

$$= 10{,}5\mathbf{i} - 71{,}4\mathbf{j} - 18{,}19\mathbf{k} \text{ N·m}$$

③ Da mesma forma, o torque do torçor dado pode ser escrito

$$\mathbf{M}' = 25{,}0(-\mathbf{i} \text{ sen } 40° - \mathbf{j} \cos 40° \cos 45° - \mathbf{k} \cos 40° \text{ sen } 45°)$$

$$= -16{,}07\mathbf{i} - 13{,}54\mathbf{j} - 13{,}54\mathbf{k} \text{ N·m}$$

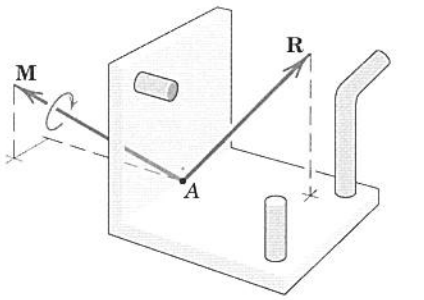
Portanto, o torque resultante ao somarem-se os termos **i**, **j** e **k** dos quatro **M**′s é

④

$$\mathbf{M} = 49{,}4\mathbf{i} - 90{,}5\mathbf{j} - 24{,}6\mathbf{k} \text{ N·m}$$

e

$$M = \sqrt{(49{,}4)^2 + (90{,}5)^2 + (24{,}6)^2} = 106{,}0 \text{ N·m} \qquad \textit{Resp.}$$



Sugestões Úteis

① *Sugestão:* Verifique os resultados do produto vetorial avaliando, diretamente do desenho, os momentos em relação a A dos componentes da força de 500 N.

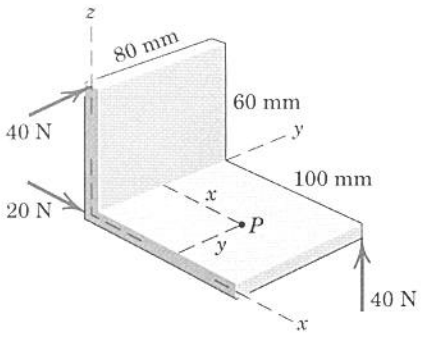
② Para as forças de 600 N e 700 N é mais fácil obter, por inspeção da figura, os componentes de seus momentos em relação às direções coordenadas que passam por A, do que montar as relações dos produtos vetoriais.

③ O vetor do torque de 25 N · m do *torçor* aponta na direção oposta a da força de 500 N e devemos projetá-lo em seus componentes x, y e z para adicioná-las aos outros componentes dos vetores de torque.

④ Apesar de no esboço das resultantes o vetor de torque resultante **M** ser desenhado passando por A, reconhecemos que um vetor de torque é um vetor livre e, portanto, não tem linha de ação especificada.

Exemplo 2/19

Determine o torçor resultante das três forças atuando na cantoneira. Calcule as coordenadas do ponto P no plano x-y pelo qual atua a força resultante do torçor. Encontre também o módulo do torque **M** do torçor.



Solução. Os cossenos diretores do torque **M** do torçor devem ser os mesmos daqueles ① da força resultante **R**, considerando que o torçor é positivo. A força resultante é

$$\mathbf{R} = 20\mathbf{i} + 40\mathbf{j} + 40\mathbf{k}\ \text{N} \qquad R = \sqrt{(20)^2 + (40)^2 + (40)^2} = 60\ \text{N}$$

e seus cossenos diretores são

$$\cos\theta_x = 20/60 = 1/3 \quad \cos\theta_y = 40/60 = 2/3 \quad \cos\theta_z = 40/60 = 2/3$$

O momento do torque do torçor deve ser igual à soma dos momentos das forças dadas em relação ao ponto P pelo qual **R** passa. Os momentos em relação a P das três forças são

$$(\mathbf{M})_{R_x} = 20y\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

$$(\mathbf{M})_{R_y} = -40(60)\mathbf{i} - 40x\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

$$(\mathbf{M})_{R_z} = 40(80 - y)\mathbf{i} - 40(100 - x)\mathbf{j}\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

e o momento total é

$$\mathbf{M} = (800 - 40y)\mathbf{i} + (-4000 + 40x)\mathbf{j} + (-40x + 20y)\mathbf{k}\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

Os cossenos diretores de **M** são

$$\cos\theta_x = (800 - 40y)/M$$

$$\cos\theta_y = (-4000 + 40x)/M$$

$$\cos\theta_z = (-40x + 20y)/M$$

onde M é o módulo de **M**. Igualando os cossenos diretores **R** e **M** dá

$$800 - 40y = \frac{M}{3}$$

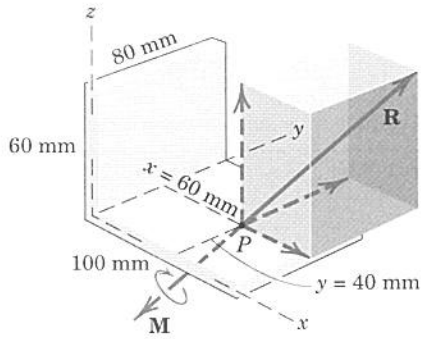
$$-4000 + 40x = \frac{2M}{3}$$

$$-40x + 20y = \frac{2M}{3}$$

Resolvendo as três equações obtém-se

$$M = -2400\ \text{N}\cdot\text{mm} \qquad x = 60\ \text{mm} \qquad y = 40\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Vemos que M acabou por ser negativo, o que significa que o vetor do torque está apontando na direção oposta à **R**, o que torna o torçor negativo.



Sugestão Útil

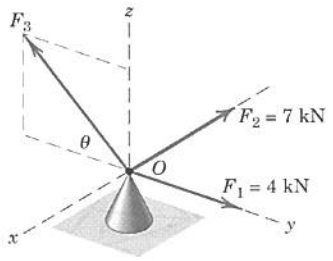
① Consideramos, inicialmente, que o torçor é positivo. Se o valor calculado para **M** for negativo, então a direção do vetor de torque é oposta a da força resultante.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

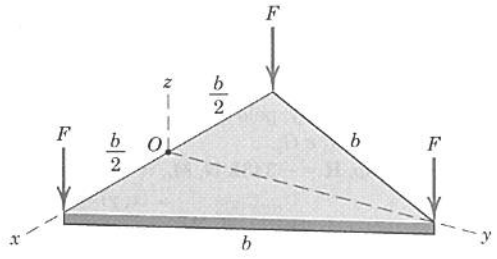
2/143 Três forças atuam no ponto O. Determine F_3, θ e R, se é conhecido que a componente y da força resultante $\mathbf{R}$ vale -5kN e que a componente z vale 6 kN.

Resp. $F_3 = 10{,}82$ kN, $\theta = 33{,}7°$, $R = 10{,}49$ kN



Problema 2/143

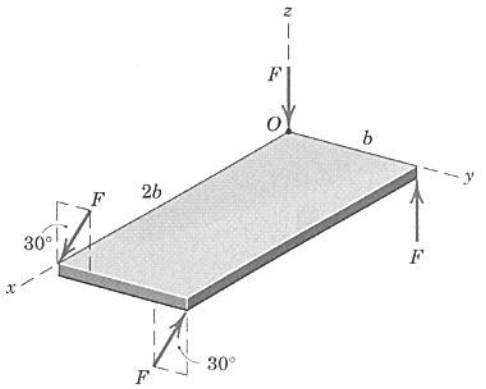
2/144 Três forças iguais são exercidas na placa eqüilátera conforme mostrado. Reduza o sistema de forças a um sistema força-binário equivalente no ponto O. Mostre que $\mathbf{R}$ é perpendicular a $\mathbf{M}_O$.



Problema 2/144

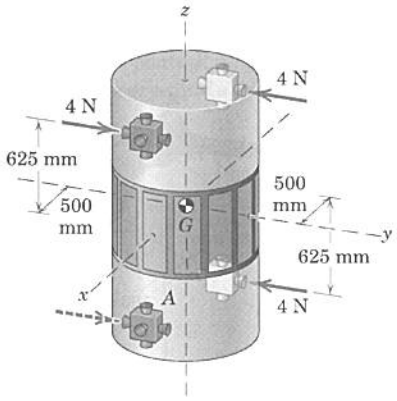
2/145 A placa retangular fina está submetida às quatro forças mostradas. Determine o sistema força-binário equivalente em O. Qual é a resultante do sistema?

Resp. $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_O = Fb\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{i}$



Problema 2/145

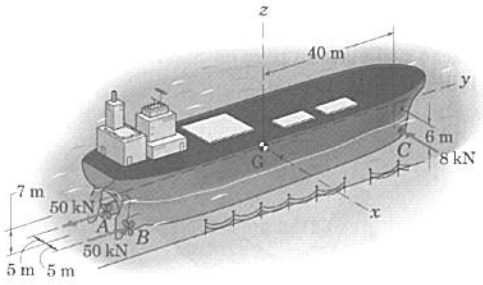
2/146 A nave espacial do Prob. 2/129 está repetida aqui. A idéia é ligar quatro retrofoguetes de 4 N, como mostrado, para girar a nave em torno de seu eixo z, mas o retrofoguete em A falha. Determine o sistema força-binário equivalente em G devido aos três retrofoguetes remanescentes.



Problema 2/146

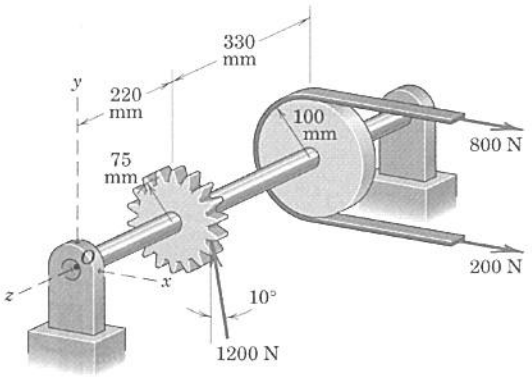
2/147 Um petroleiro se afasta das docas sob a ação do empuxo reverso da hélice A, do empuxo para a frente da hélice B e o empuxo lateral do motor em C. Determine o sistema força-binário equivalente no centro de massa G.

Resp. $\mathbf{R} = -8\mathbf{i}$kN, $\mathbf{M}_G = 48\mathbf{j} + 820\mathbf{k}$ kN · m



Problema 2/147

2/148 A polia e a engrenagem estão submetidas às cargas mostradas. Para estas forças, determine o sistema força-binário equivalente no ponto O.

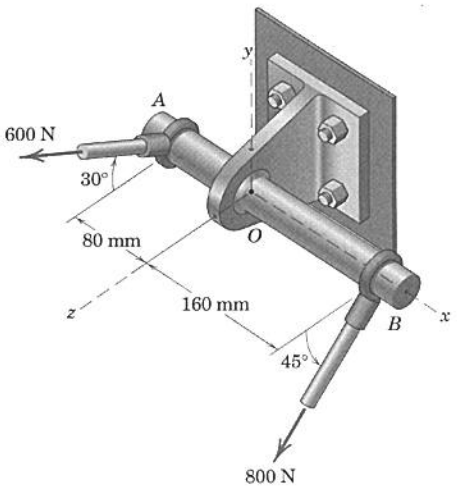


Problema 2/148

2/149 Determine o sistema força-binário em O, que seja equivalente às duas forças aplicadas ao eixo AOB. $\mathbf{R}$ é perpendicular a $\mathbf{M}_O$?

Resp. $\mathbf{R} = -266\mathbf{j} + 1085\mathbf{k}$ N

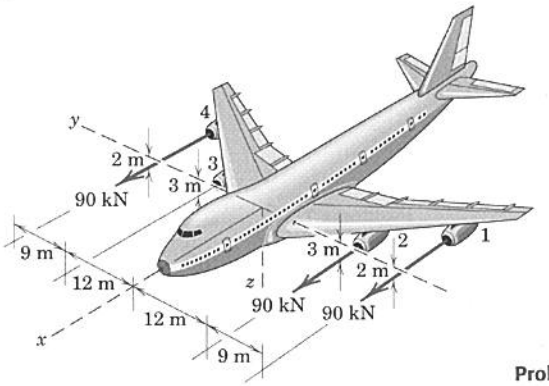
$\mathbf{M}_O = -48{,}9\mathbf{j} - 114{,}5\mathbf{k}$ N · m



Problema 2/149

Problemas Representativos

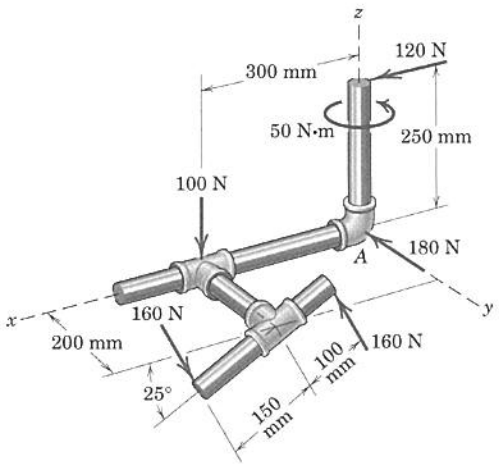
2/150 O avião de passageiros do Prob. 2/68 está redesenhado aqui com informações tridimensionais. Se a turbina 3 falha subitamente, determine a resultante dos vetores de empuxo das três turbinas remanescentes, cada um tendo módulo de 90 kN. Especifique as coordenadas y e z do ponto pelo qual passa a linha de ação da resultante. Esta informação seria crítica para os critérios de projeto de desempenho sob falha de uma turbina.



Problema 2/150

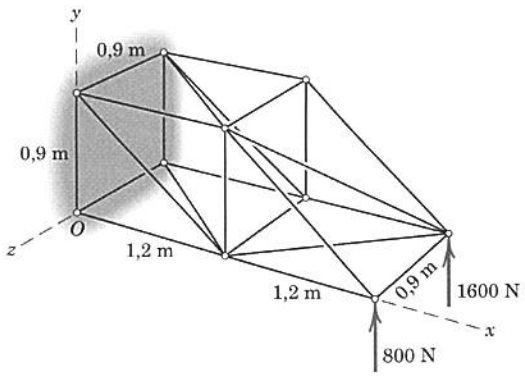
2/151 Represente por uma única força $\mathbf{R}$, em A, e por um momento $\mathbf{M}$ a resultante do sistema de forças atuando em um conjunto de tubos.

Resp. $\mathbf{R} = 120\mathbf{i} - 180\mathbf{j} - 100\mathbf{k}$ N
$\mathbf{M}_A = 100\mathbf{j} + 50\mathbf{k}$ N · m



Problema 2/151

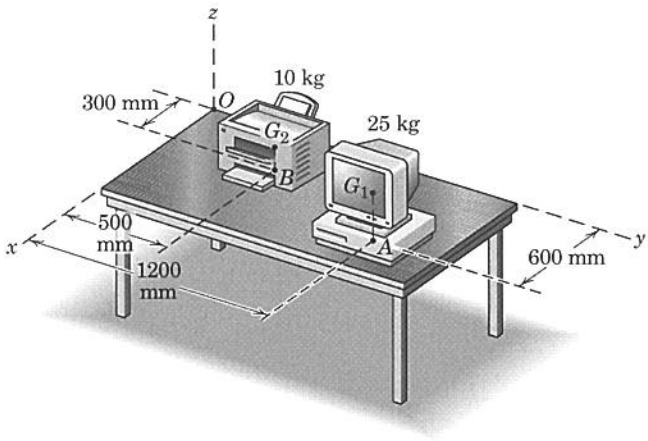
2/152 Duas cargas direcionadas para cima são exercidas sobre uma pequena treliça tridimensional. Reduza estas duas cargas a um único sistema força-binário no ponto O. Mostre que $\mathbf{R}$ é perpendicular a $\mathbf{M}_O$. Em seguida, determine o ponto no plano x-z pelo qual passa a resultante.



Problema 2/152

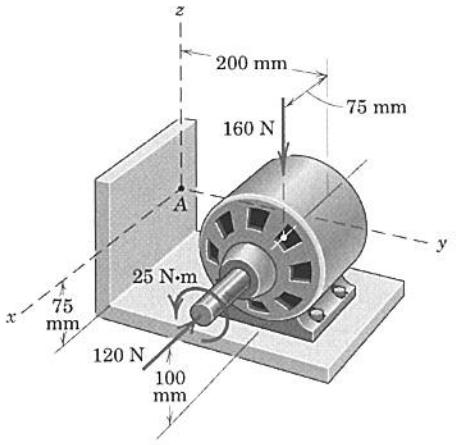
2/153 Um computador de 25 kg e uma impressora a laser de 10 kg estão sobre o tampo horizontal de uma mesa. Determine a resultante do sistema dos dois pesos correspondentes e especifique as coordenadas do ponto P, no plano x-y, pelo qual passa a resultante. Os dois pesos atuam nos pontos G_1 e G_2.

Resp. $\mathbf{R} = -343\mathbf{k}$ N, $\mathbf{M}_O = -343\mathbf{i} + 176{,}6\mathbf{j}$ N · m
$(x, y) = (514, 1000)$ mm



Problema 2/153

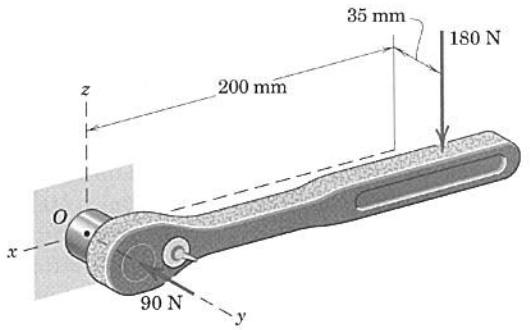
2/154 O motor montado na cantoneira suporta seu peso de 160 N e seu eixo resiste ao empuxo de 120 N e ao torque de 25 N · m aplicados. Determine a resultante do sistema de forças mostrado em termos de uma força $\mathbf{R}$ em A e de um torque $\mathbf{M}$.



Problema 2/154

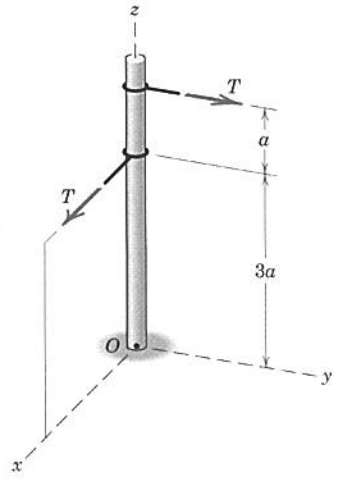
2/155 Ao apertar um parafuso cujo centro está no ponto O, uma pessoa exerce, com a mão direita, uma força de 180 N no manete da chave de catraca. Além disso, com a mão esquerda exerce uma força de 90 N, como mostrado, para manter o soquete na cabeça do parafuso. Determine o sistema força-binário equivalente em O. Determine, então, o ponto no plano x-y pelo qual passa a linha de ação da força resultante do torçor.

Resp. $\mathbf{R} = -90\mathbf{j} - 180\mathbf{k}$ N, $\mathbf{M}_O = -6{,}3\mathbf{i} - 36\mathbf{j}$ N · m
$x = -160$ mm, $y = 35$ mm



Problema 2/155

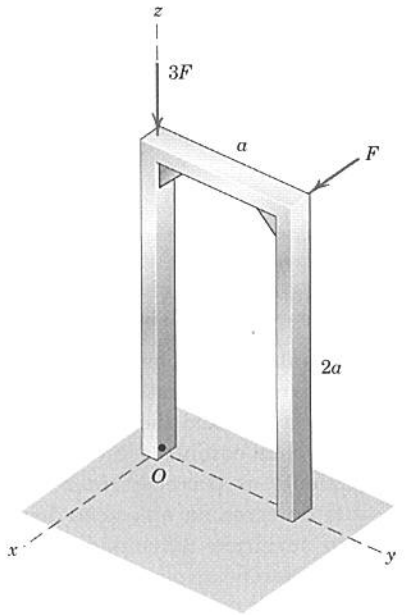
2/156 Substitua as duas forças atuando no mastro por um torçor. Escreva na forma vetorial o momento $\mathbf{M}$ associado com o torçor e especifique as coordenadas do ponto P no plano y-z pelo qual passa a linha de ação do torçor.



Problema 2/156

2/157 Substitua as duas forças atuando na moldura por um torçor. Escreva na forma vetorial o momento associado com o torçor e especifique as coordenadas do ponto P no plano y-z pelo qual passa a linha de ação do torçor. Observe que a força de módulo F é paralela ao eixo x.

Resp. $\mathbf{R} = F(\mathbf{i} - 3\mathbf{k})$, $\mathbf{M} = \dfrac{3aF}{10}(\mathbf{i} - 3\mathbf{k})$
$y = \dfrac{a}{10}$, $z = 2a$

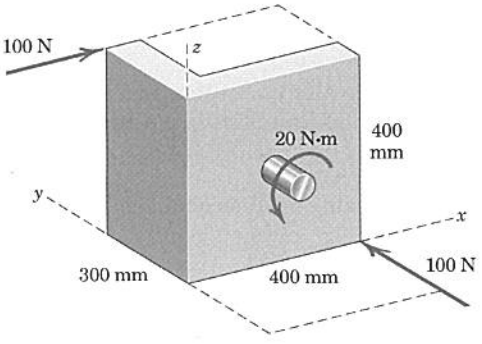


Problema 2/157

2/158 Determine as coordenadas do ponto no plano x-z pelo qual passa a linha de ação da resultante do sistema de forças, para o sistema de forças do Prob. 2/149.

▶2/159 A resultante das duas forças e do torque pode ser representada por um torçor. Determine a expressão vetorial para o momento $\mathbf{M}$ do torçor e encontre as coordenadas do ponto P no plano x-z pelo qual passa a força resultante do torçor.

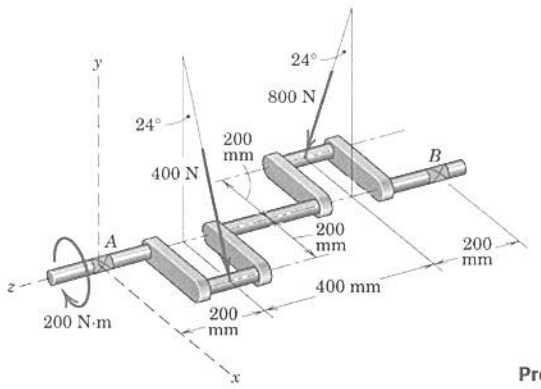
Resp. $\mathbf{M} = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ N · m
$x = z = 0{,}1$ m



Problema 2/159

▶**2/160** Na posição mostrada, o virabrequim de um pequeno compressor de dois cilindros está submetido a forças de 400 N e de 800 N, exercidas pelas bielas, e um torque de 200 N · m. Substitua esse sistema de carregamento por um sistema força-binário no ponto A. Mostre que $\mathbf{R}$ não é perpendicular a $\mathbf{M}_A$. Substitua, então, esse sistema força-binário por um torçor. Determine o módulo M do momento do torçor, o módulo da força $\mathbf{R}$ do torçor, e as coordenadas do ponto no plano x-z pelo qual passa a linha de ação do torçor.

Resp. $M = 85{,}8$ N · m, $R = 1108$ N
$x = 0{,}1158$ m, $z = -0{,}478$ m



Problema 2/160

2/10 Revisão do Capítulo

No Capítulo 2 estabelecemos as propriedades de forças, momentos e torques e os procedimentos corretos para representar seus efeitos. O domínio deste material é essencial para nosso estudo sobre equilíbrio nos capítulos a seguir. Não usar corretamente os procedimentos do Capítulo 2 é uma causa comum de erros na aplicação dos princípios do equilíbrio. Quando surgirem dificuldades, você deve usar este capítulo como referência, para ter certeza que forças, momentos e torques estão representados corretamente.

Forças

É freqüentemente necessário representar forças vetorialmente, para projetar uma força única em seus componentes ao longo de direções desejadas e para combinar duas ou mais forças concorrentes em uma força resultante equivalente. Especificamente, você deve ser capaz de:

1. Projetar um dado vetor de força em seus componentes ao longo de direções dadas e expressar o vetor em termos de vetores unitários ao longo de um dado conjunto de eixos.
2. Expressar uma força como um vetor quando seu módulo e informação sobre sua linha de ação são dados. Esta informação pode estar na forma de dois pontos ao longo de uma linha de ação ou ângulos que orientam a linha de ação.
3. Usar o produto escalar para calcular a projeção de um vetor sobre uma linha especificada e o ângulo entre dois vetores.
4. Calcular a resultante de duas ou mais forças concorrentes em um ponto.

Momentos

A tendência de uma força de girar um corpo em relação a um eixo é descrita por um momento (ou torque), que é uma grandeza vetorial. Vimos que encontrar o momento de uma força é freqüentemente facilitado pela combinação dos momentos das componentes da força. Quando estiver trabalhando com vetores de momento você deve ser capaz de:

1. Determinar um momento pela regra do braço de alavanca.
2. Usar o produto vetorial para calcular um vetor de momento em termos de um vetor de força e um vetor de posição que localiza a linha de ação da força.
3. Utilizar o teorema de Varignon para simplificar o cálculo de momentos, nas formas escalar e vetorial.
4. Usar o produto escalar triplo para calcular o momento de um vetor de força em relação a um eixo dado passando por um ponto.

Binários

Um binário corresponde ao momento combinado de duas forças iguais, opostas e não colineares. O único efeito de um binário é o de produzir uma torção pura ou rotação, independente de onde as forças estão localizadas. O binário é útil na substituição de uma força atuando em um ponto por um sistema força-binário em um ponto diferente. Para resolver problemas envolvendo binários, você deve ser capaz de:

1. Calcular o momento de um binário, dadas as forças do binário e também ou a distância entre elas ou quaisquer vetores de posição que localizem suas linhas de ação.
2. Substituir uma força dada por um sistema força-binário equivalente e vice-versa.

Resultantes

Podemos reduzir um sistema arbitrário de forças e binários a uma força resultante única aplicada em um ponto arbitrário e a um binário resultante correspondente. Podemos ainda combinar esta força resultante e o binário em um torçor para obter uma força resultante única ao longo de uma linha de ação, também única, juntamente com um vetor de binário paralelo. Para resolver problemas envolvendo resultantes, você deve ser capaz de:

1. Calcular o módulo, a direção e a linha de ação da resultante de um sistema de forças coplanares, se esta resultante for uma força; caso contrário, calcular o momento do binário resultante.

2. Aplicar o princípio dos momentos para simplificar o cálculo do momento de um sistema de forças coplanares em relação a um dado ponto.

3. Substituir um dado sistema geral de forças por um torçor ao longo de uma linha de ação específica.

Equilíbrio

Você usará os conceitos e métodos precedentes quando estudar equilíbrio nos próximos capítulos. Vamos resumir o conceito de equilíbrio:

1. Quando a força resultante em um corpo valer zero ($\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$), o corpo está em equilíbrio *translacional*. Isto significa que seu centro de massa está em repouso ou está se movendo em uma linha reta com velocidade constante.

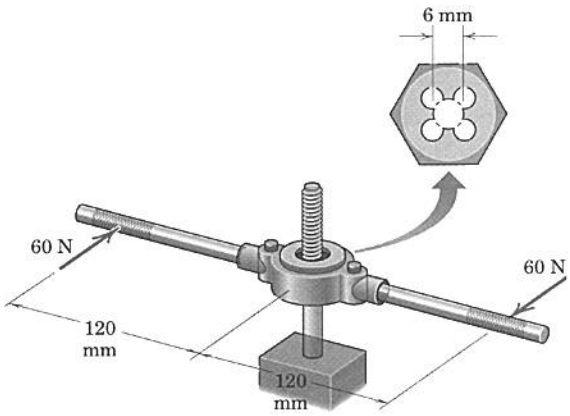
2. Além disso, se o momento resultante valer zero ($\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$), o corpo está em equilíbrio *rotacional*, não tendo movimento de rotação ou girando com velocidade angular constante.

3. Quando ambas as resultantes valem zero, o corpo está em equilíbrio *completo*.

PROBLEMAS DE REVISÃO

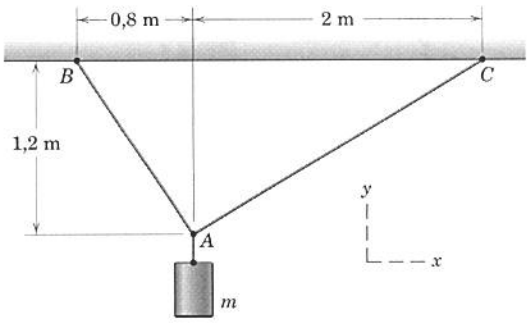
2/161 Uma matriz está sendo usada para fazer uma rosca em uma barra. Se forças de 60 N são aplicadas como mostrado, determine o módulo F das forças iguais exercidas na barra de 6 mm de diâmetro por cada uma das quatro superfícies, de forma que seu efeito externo sobre a barra seja equivalente ao das duas forças de 60 N.

Resp. $F = 1200$ N



Problema 2/161

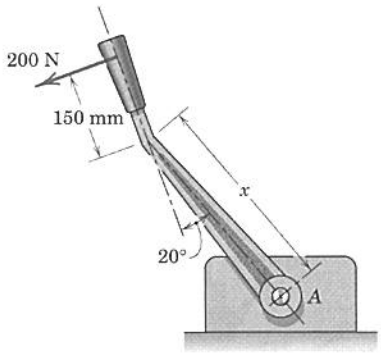
2/162 Usando os princípios de equilíbrio que serão desenvolvidos no Capítulo 3, brevemente você será capaz de verificar que a força trativa no cabo AB vale 85,8% do peso do cilindro de massa m, enquanto a força trativa no cabo AC vale 55,5% do peso suspenso. Escreva cada força trativa atuando no ponto A como um vetor, se a massa m vale 60 kg.



Problema 2/162

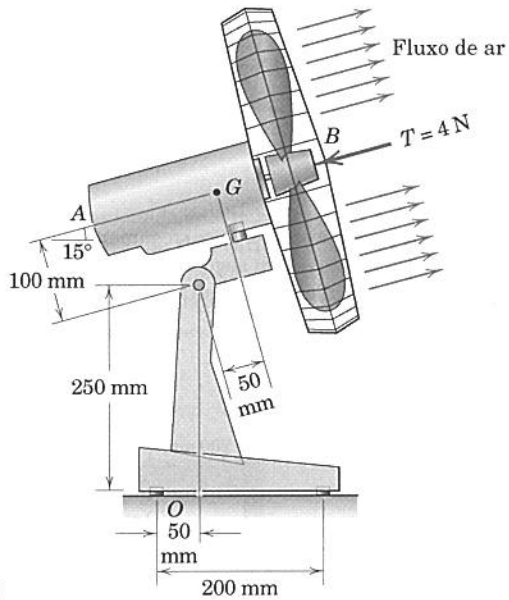
2/163 A alavanca de controle está submetida a um momento de 80 N · m no sentido horário, exercido pelo seu eixo em A e está projetada para operar com um puxão de 200 N, como mostrado. Determine a dimensão x apropriada da alavanca, se a resultante do momento e da força passa por A.

Resp. $x = 266$ mm



Problema 2/163

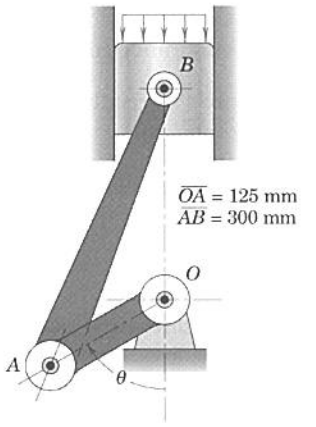
2/164 As pás do ventilador portátil geram um empuxo $\mathbf{T}$ de 4 N, como mostrado. Calcule o momento M_O dessa força em relação ao ponto O na parte traseira da base. Para comparação, determine o momento em relação a O devido ao conjunto motor-hélice AB, cujo peso de 40 N atua em G.



Problema 2/164

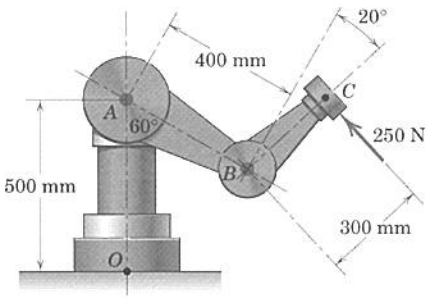
2/165 Para a posição angular $\theta = 60°$ da manivela OA, a pressão do gás no pistão induz uma força compressiva P na biela ao longo de sua linha média AB. Calcule P se essa força produz um momento de 720 N · m em relação ao eixo O da manivela.

Resp. $P = 9{,}18$ kN



Problema 2/165

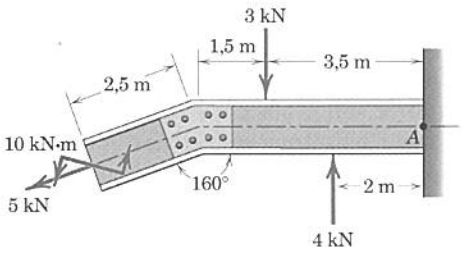
2/166 Calcule o momento M_O da força de 250 N em relação ao ponto O na base do robô.



Problema 2/166

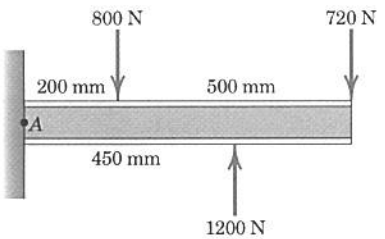
2/167 Represente a resultante das três forças e do binário por um sistema força-binário localizado no ponto A.

Resp. $R = 4{,}75$ kN, $M_A = 21{,}1$ kN · m no sentido anti-horário



Problema 2/167

2/168 Reduza o sistema de carregamento dado a um sistema força-binário no ponto A. Em seguida, determine a distância x à direita do ponto A na qual atua a resultante das três forças.

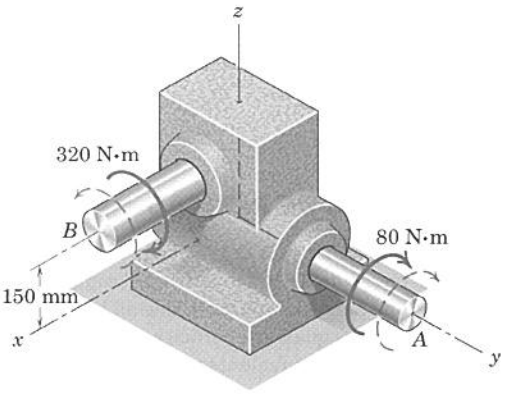


Problema 2/168

2/169 As direções de rotação dos eixos de entrada A e de saída B no redutor de engrenagens estão indicadas pelas setas curvas tracejadas. Um torque de entrada (binário) de 80 N · m é aplicado ao eixo A na direção da rotação. O eixo de saída B fornece um torque de 320 N · m à máquina que ele controla (que não está mostrada). O eixo da máquina exerce um torque de reação igual e contrário no eixo de saída do redutor. Determine a resultante $\mathbf{M}$ dos dois binários que atuam no redutor e calcule o cosseno diretor de $\mathbf{M}$ em relação ao eixo x.

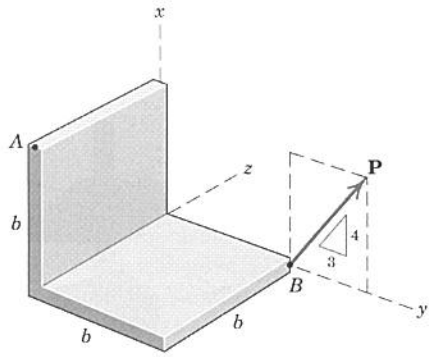
Resp. $\mathbf{M} = -320\mathbf{i} - 80\mathbf{j}$ N · m

$\cos\theta_x = -0{,}970$



Problema 2/169

2/170 Determine o momento da força $\mathbf{P}$ em relação ao ponto A.



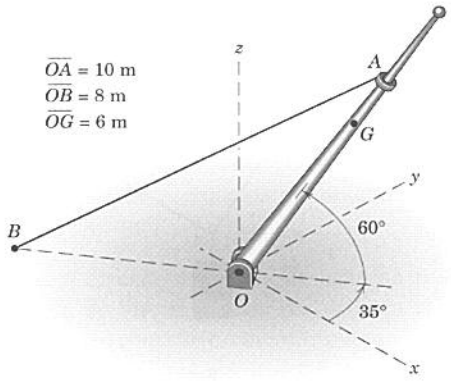
Problema 2/170

2/171 Quando o mastro OA está na posição mostrada, a força trativa no cabo AB vale 3 kN. (*a*) Usando as coordenadas mostradas, escreva na forma vetorial a força trativa exercida na pequena arruela no ponto A. (*b*) Determine o momento dessa força em relação ao ponto O e indique os momentos em relação aos eixos x, y e z. (*c*) Determine a projeção desta força trativa sobre a linha AO.

Resp. (*a*) $\mathbf{T}_{AB} = -2{,}05\mathbf{i} - 1{,}432\mathbf{j} - 1{,}663\mathbf{k}$ kN

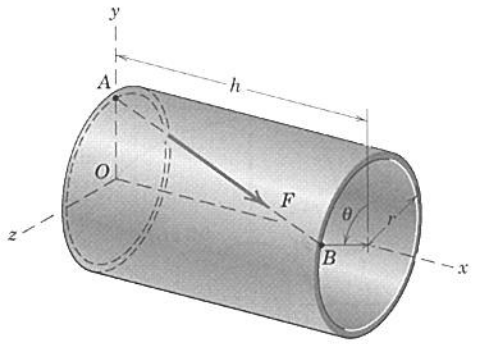
(*b*) $\mathbf{M}_O = 7{,}63\mathbf{i} - 10{,}90\mathbf{j}$ kN · m

(*c*) $T_{AO} = 2{,}69$ kN



Problema 2/171

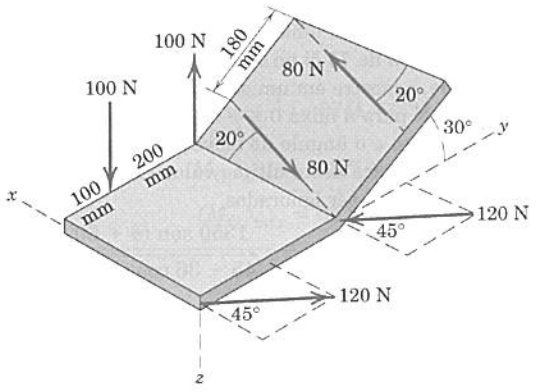
2/172 Uma força **F** atua ao longo da linha *AB* dentro da casca cilíndrica circular, como mostrado. As quantidades r, h, θ e F são conhecidas. Usando as coordenadas x, y e z mostradas, expresse **F** como um vetor.



Problema 2/172

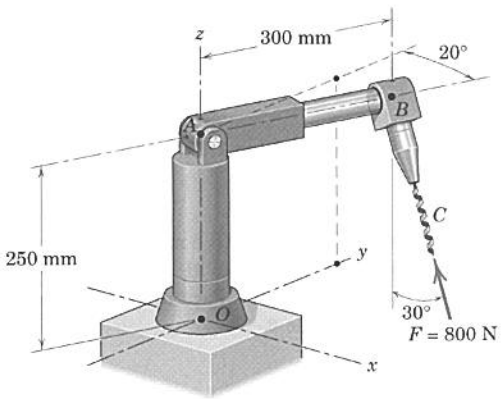
2/173 Três binários são formados por três pares de forças iguais e opostas. Determine a resultante **M** dos três binários.

Resp. $\mathbf{M} = -20\mathbf{i} - 6{,}77\mathbf{j} - 37{,}2\mathbf{k}$ N · m



Problema 2/173

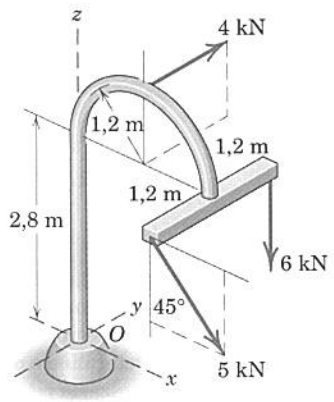
2/174 Durante uma perfuração, o pequeno dispositivo robótico é submetido a uma força de 800 N no ponto *C*, como mostrado. Substitua esta força por um sistema força-binário equivalente no ponto *O*.



Problema 2/174

2/175 A ação combinada das três forças sobre a base em *O* pode ser obtida estabelecendo sua resultante passando por *O*. Determine os módulos de **R** e do momento **M** associado.

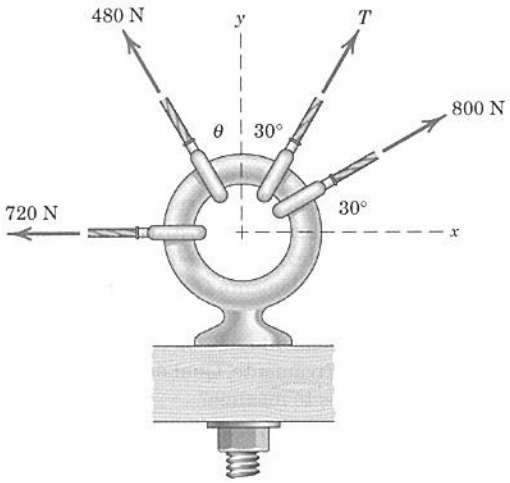
Resp. $R = 10{,}93$ kN, $M = 38{,}9$ kN · m



Problema 2/175

*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador

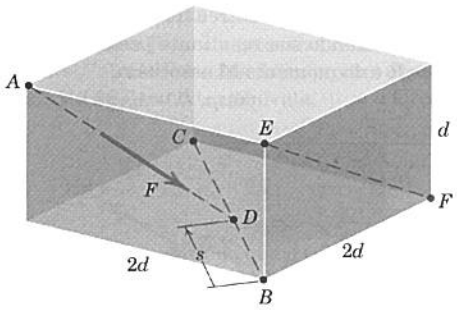
***2/176** Quatro forças são exercidas no olhal, como mostrado. Se o efeito resultante delas sobre o parafuso é um esforço trativo de 1200 N na direção y, determine os valores necessários de T e θ.



Problema 2/176

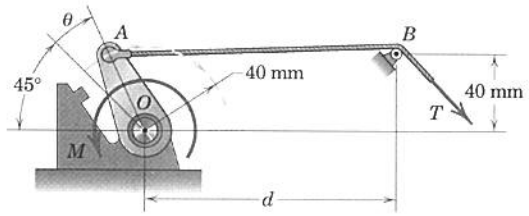
***2/177** A força **F** está direcionada de *A* para *D* e *D* pode se mover de *B* até *C*, sendo sua posição medida pela variável s. Considere a projeção de **F** sobre a linha *EF* como uma função de s. Em particular, determine e mostre em um gráfico em função de s/d, a fração n do módulo de F que está projetada. Observe que s/d varia de 0 até $2\sqrt{2}$.

$$\textit{Resp. } n = \frac{\sqrt{2}\,\frac{s}{d} + 1}{\sqrt{5}\sqrt{\left(\frac{s}{d}\right)^2 + 5 - 2\sqrt{2}\,\frac{s}{d}}}$$



Problema 2/177

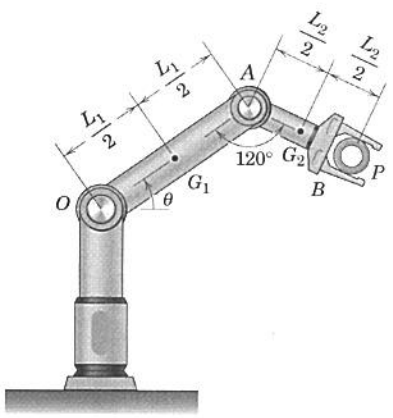
***2/178** A alavanca de controle OA gira na faixa $0° \leq \theta \leq 90°$. Uma mola de torção interna exerce um momento de retorno na alavanca em torno do ponto O, dado por $M = K(\theta + \pi/4)$, onde $K = 500$ N · mm/rad e θ está em radianos. Determine e mostre em um gráfico em função de θ a força trativa T necessária para tornar nulo o momento resultante em torno de O. Use dois valores para d ($d = 60$ mm e $d = 160$ mm) e comente sobre os méritos relativos do projeto. Os efeitos do raio da polia em B são desprezíveis.



Problema 2/178

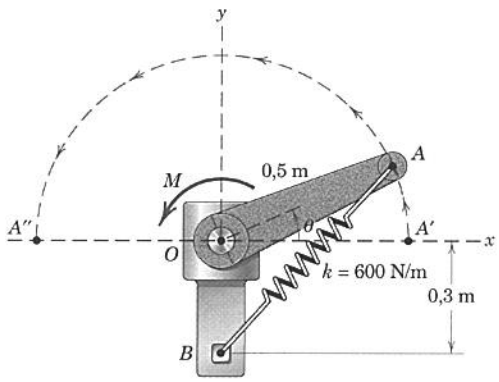
***2/179** Com a peça cilíndrica P, que pesa 1500 N, em sua garra, o braço robótico gira em torno de O na faixa $-45° \leq \theta \leq 45°$ com o ângulo em A fixo em 120°. Determine, e mostre em um gráfico (em função de θ), o momento em O devido aos efeitos combinados do peso da peça P, do peso de 600 N do elemento OA (centro de massa em G_1) e do peso de 250 N do elemento AB (centro de massa em G_2). A garra é incluída como parte do elemento AB. Os comprimentos L_1 e L_2 são 900 mm e 600 mm, respectivamente. Qual é o valor máximo de M_O e em qual valor de θ ocorre este máximo?

$$Resp.\ M_O = 1845 \cos\theta + 975 \cos(60° - \theta)\ \text{N·m}$$
$$(M_O)_{máx} = 2480\ \text{N·m para}\ \theta = 19{,}90°$$



Problema 2/179

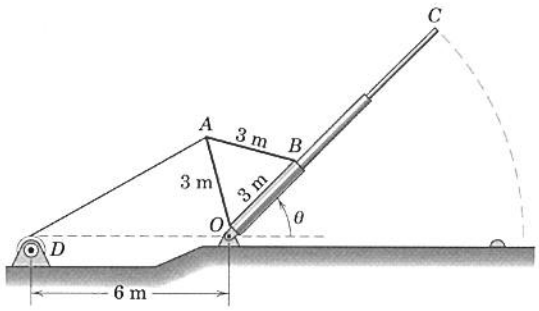
***2/180** Um motor, preso ao eixo em O, faz o braço OA girar na faixa $0° \leq \theta \leq 180°$ ao braço. O comprimento original da mola é de 0,65 m e ela pode suportar tanto tração quanto compressão. Se o momento resultante em torno de O deve ser nulo, determine o torque necessário ao motor e faça um gráfico em função de θ.



Problema 2/180

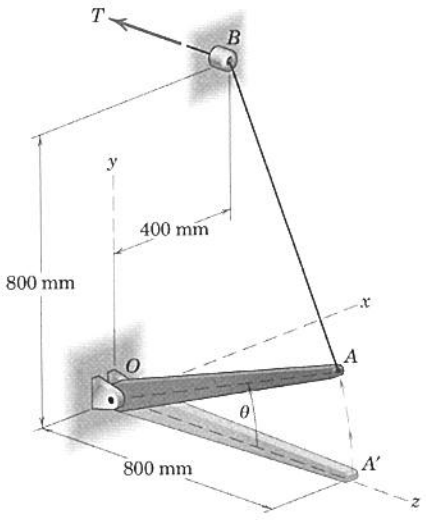
***2/181** Um mastro de bandeira com uma estrutura triangular leve está mostrado aqui em uma posição arbitrária durante sua elevação. A força trativa de 75 N no cabo de elevação se mantém constante. Determine, e mostre em um gráfico, o momento em relação a O da força de 75 N para a faixa $0 \leq \theta \leq 90°$. Determine o valor máximo deste momento e o ângulo de elevação no qual ele ocorre; comente a relevância física deste último valor. Os efeitos do diâmetro do carretel em D podem ser ignorados.

$$Resp.\ \mathbf{M}_O = \frac{1350 \operatorname{sen}(\theta + 60°)}{\sqrt{45 + 36\cos(\theta + 60°)}}\mathbf{k}\ \text{N·m}$$
$$(M_O)_{máx} = 225\ \text{N·m para}\ \theta = 60°$$



Problema 2/181

***2/182** A força trativa T no cabo AB é mantida em um valor constante de 120 N. Determine o momento $\mathbf{M}_o$ dessa força trativa em torno do ponto O na faixa $0 \leq \theta \leq 90°$. Faça um gráfico das componentes x, y e z de $\mathbf{M}_o$ em função de θ.



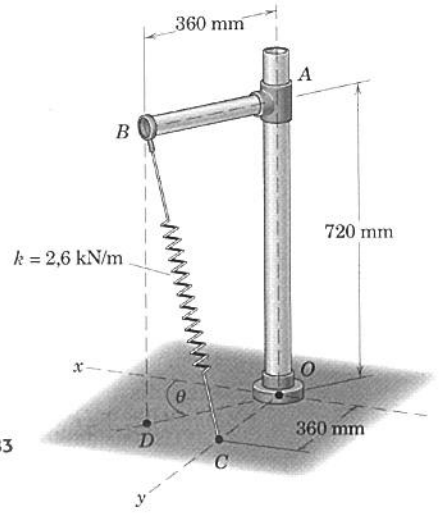
Problema 2/182

***2/183** O braço AB gira na faixa $0 \leq \theta \leq 180°$ e a mola não está esticada quando $\theta = 90°$. Determine, em função de θ, o momento em torno de O causado pela força aplicada pela mola em B. Faça um gráfico das três componentes escalares de $\mathbf{M}_O$ e calcule o valor máximo absoluto de cada componente.

Resp. $\mathbf{M}_O = \dfrac{\sqrt{1{,}5 - 0{,}5 \operatorname{sen}\theta} - 1}{\sqrt{1{,}5 - 0{,}5 \operatorname{sen}\theta}} [-674\mathbf{i} + 337 \cos\theta\mathbf{k}]$ N·m

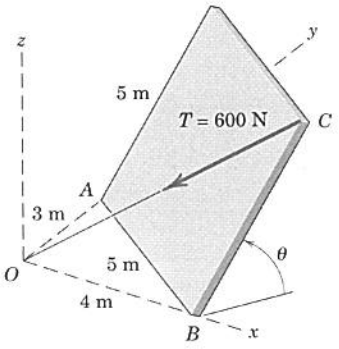
$(M_{O_x})_{máx} = 123{,}7$ N·m para $\theta = 0, 180°$

$(M_{O_z})_{máx} = 61{,}8$ N·m para $\theta = 0, 180°$



Problema 2/183

***2/184** A placa retangular está inclinada em relação a sua borda inferior por um cabo sob tração constante de 600 N. Determine e faça um gráfico do momento desta força trativa em relação à borda inferior AB da placa, para a faixa $0 \leq \theta \leq 90°$.



Problema 2/184

©Peter Bialobrzeski/laif/Redux

Em muitas aplicações em mecânica, o somatório das forças atuando em um corpo vale zero, gerando um estado de equilíbrio. Esse equipamento é projetado para manter um carro em equilíbrio em uma vasta faixa de orientações durante a fabricação do veículo.

3 EQUILÍBRIO

DESCRIÇÃO DO CAPÍTULO

3/1 Introdução

SEÇÃO A EQUILÍBRIO EM DUAS DIMENSÕES

3/2 Isolamento de um Sistema e o Diagrama de Corpo Livre

3/3 Condições de Equilíbrio

SEÇÃO B EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

3/4 Condições de Equilíbrio

3/5 Revisão do Capítulo

3/1 Introdução

A estática lida principalmente com a descrição das condições necessárias e suficientes para manter o equilíbrio de forças em estruturas de engenharia. Desse modo, esse capítulo sobre equilíbrio constitui a parte mais importante da estática e os procedimentos desenvolvidos aqui formam a base para a resolução de problemas tanto em estática quanto em dinâmica. Faremos uso contínuo dos conceitos desenvolvidos no Capítulo 2 envolvendo forças, momentos, binários e resultantes à medida que aplicamos os princípios de equilíbrio.

Quando um corpo está em equilíbrio, a resultante de *todas* as forças atuando nele é nula. Assim, a força resultante $\mathbf{R}$ e o momento resultante $\mathbf{M}$ valem ambos zero e temos as equações de equilíbrio

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0} \tag{3/1}$$

Essas equações são tanto as condições necessárias quanto suficientes para o equilíbrio.

Todos os corpos são tridimensionais, mas podemos tratar muitos deles como bidimensionais quando as forças as quais eles estão submetidos atuam em um único plano ou podem ser projetadas em um único plano. Quando essa simplificação não é possível, o problema deve ser tratado como tridimensional. Seguiremos a metodologia usada no Capítulo 2 e discutiremos na Seção A o equilíbrio de corpos submetidos a sistemas de forças bidimensionais e na Seção B o equilíbrio de corpos submetidos a sistemas de forças tridimensionais.

SEÇÃO A EQUILÍBRIO EM DUAS DIMENSÕES

3/2 Isolamento de um Sistema e o Diagrama de Corpo Livre

Antes de aplicarmos as Eqs. 3/1 devemos definir, sem qualquer ambigüidade, o corpo ou o sistema mecânico específico a ser analisado e representar clara e completamente *todas* as forças atuando *no* corpo. A omissão de uma força que atua *no* corpo em questão, ou a inclusão de uma força que não atua *no* corpo, fornecerá resultados errados.

Um *sistema mecânico* é definido como um corpo ou grupo de corpos que podem ser conceitualmente isolados de todos os outros corpos. Um sistema pode ser um único corpo ou uma combinação de corpos interligados. Os corpos podem ser rígidos ou não rígidos. O sistema pode ser também uma massa fluida identificável, tanto líquida quanto gasosa, ou uma combinação de fluidos e sólidos. Em estática estudamos principalmente forças que atuam em corpos rígidos em repouso, embora estudemos também forças atuando em fluidos em equilíbrio.

Uma vez decidido o corpo ou conjunto de corpos a analisar, tratamos, então, esse corpo ou o conjunto de corpos como um único corpo *isolado* de todos os outros corpos vizinhos. Esse isolamento é obtido por intermédio do ***diagrama de corpo livre***, que é uma representação esquemática do sistema isolado, tratado como um único corpo. O diagrama mostra todas as forças aplicadas ao sistema por contato mecânico com outros corpos, que se imagina serem removidos. Se forças apreciáveis de corpo estiverem presentes, tal como a força da gravidade ou atração magnética, então essas forças também devem ser mostradas no diagrama de corpo livre do sistema isolado. Apenas depois de tal diagrama ter sido cuidadosamente construído é que as equações de equilíbrio devem ser escritas. Devido à sua importância crítica, enfatizamos aqui que

o diagrama de corpo livre é o passo mais importante na solução de problemas em mecânica.

Antes de tentarmos construir um diagrama de corpo livre, devemos relembrar as características básicas de uma força. Estas características foram descritas na Seção 2/2, dando-se atenção especial às propriedades vetoriais da força. Forças po-

dem ser aplicadas tanto por contato físico direto ou por ação remota. Forças podem ser tanto internas quanto externas ao sistema sob consideração. A aplicação de uma força é acompanhada por uma força de reação, e tanto as forças aplicadas quanto as reativas podem ser concentradas ou distribuídas. O princípio da transmissibilidade permite o tratamento da força como um vetor móvel enquanto os seus efeitos externos sobre um corpo rígido estiverem sendo considerados.

Usaremos agora essas características das forças para desenvolver modelos conceituais para sistemas mecânicos isolados. Esses modelos nos permitem escrever as equações de equilíbrio apropriadas, que podem, então, ser analisadas.

Modelando a Ação de Forças

A Fig. 3/1 mostra os tipos comuns de aplicação de forças em sistemas mecânicos, para a análise em duas dimensões. Cada exemplo mostra a força exercida *no* corpo a ser *isolado, pelo* corpo a ser *removido.* A terceira lei de Newton, que indica a existência de uma reação igual e oposta para cada ação, deve ser cuidadosamente observada. A força exercida *no* corpo em questão *por* um elemento de contato ou de apoio é sempre no sentido de se opor ao movimento do corpo isolado, que ocorreria se o corpo de contato ou de apoio fosse removido.

Na Fig. 3/1, o Exemplo 1 mostra a ação de um cabo flexível, de uma correia, corda ou corrente sobre o corpo ao qual ele está preso. Devido a sua flexibilidade, uma corda ou um cabo é incapaz de oferecer qualquer resistência à flexão, cisalhamento ou compressão e, assim, exerce apenas uma força de tração, em uma direção tangente ao cabo, no seu ponto de conexão. A força exercida *pelo* cabo *sobre* o corpo ao qual ele está preso é sempre *para longe* do corpo. Quando a força trativa T for grande comparada com o peso do cabo, podemos considerar que o cabo forma uma linha reta. Quando o peso do cabo não for desprezível comparado com a força trativa, a curvatura do cabo se torna importante, e a força trativa no cabo muda de direção e de módulo ao longo de seu comprimento.

Quando as superfícies lisas de dois corpos estão em contato, como no Exemplo 2, a força exercida por um corpo no outro é *normal* à tangente às superfícies e é compressiva. Embora nenhuma superfície real seja perfeitamente lisa, para propósitos práticos podemos fazer essa consideração em muitas situações.

MODELAGEM DA AÇÃO DE FORÇAS NA ANÁLISE BIDIMENSIONAL

Tipo de Contato e Origem da Força	Ação sobre o Corpo a Ser Isolado
1. Cabo flexível, correia, corrente ou corda O peso do cabo é desprezível O peso do cabo não é desprezível	A força exercida por um cabo flexível é sempre trativa e direcionada do corpo para a direção do cabo.
2. Superfícies lisas	A força de contato é compressiva e normal à superfície.
3. Superfícies rugosas	Superfícies rugosas são capazes de suportar um componente tangencial F (força de atrito), assim como um componente normal N da força de contato resultante R.
4. Suporte deslizante	Apoios de rolete, oscilantes ou de esfera transmitem uma força compressiva normal à superfície de apoio.
5. Guia com deslizamento livre	Buchas com movimentos livres ao longo de guias lisas só podem suportar forças normais à guia.

Figura 3/1

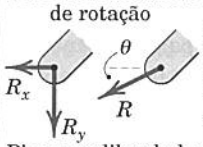
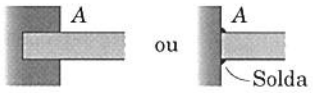
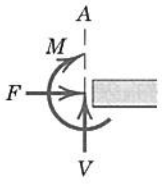
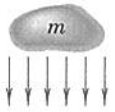
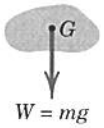
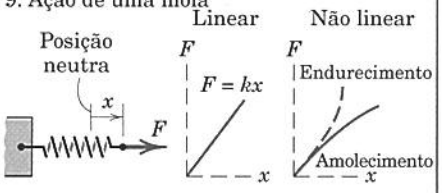
MODELAGEM DA AÇÃO DE FORÇAS NA ANÁLISE BIDIMENSIONAL (*cont.*)	
Tipo de Contato e Origem da Força	Ação sobre o Corpo a Ser Isolado
6. Conexão com pino	Pino com liberdade de rotação  Pino sem liberdade de rotação Uma conexão com pino, com articulação, é capaz de suportar uma força em qualquer direção no plano normal ao eixo do pino. Podemos mostrar ou duas componentes, R_x e R_y, ou um módulo R e uma direção θ. Uma conexão com pino sem liberdade de rotação também suporta um momento M.
7. Suporte fixo ou engastado 	 Um suporte engastado ou fixo é capaz de sustentar uma força axial F, uma força transversal V (força cisalhante ou cortante) e um momento M (momento fletor) para prevenir rotação.
8. Atração gravitacional 	 A resultante da atração gravitacional sobre todos os elementos de um corpo de massa m é o peso $W = mg$ e atua na direção do centro da Terra passando pelo centro de massa G.
9. Ação de uma mola 	A força da mola é trativa se a mola estiver distendida e compressiva se estiver comprimida. Para uma mola linear elástica, a rigidez k é a força necessária para deformar a mola de uma unidade de distância.

Figura 3/1, continuação

Quando as superfícies de corpos que se tocam são rugosas, como no Exemplo 3, a força de contato não é necessariamente normal à tangente às superfícies, mas pode ser rebatida em uma *componente tangencial* ou *de fricção* F e em uma *componente normal* N.

O Exemplo 4 ilustra diversas formas de apoios mecânicos que efetivamente eliminam forças de fricção tangenciais. Nesses casos a reação resultante é normal à superfície de apoio.

O Exemplo 5 mostra a ação de uma guia lisa sobre o corpo que ela sustenta. Não pode existir qualquer resistência paralela à guia.

O Exemplo 6 ilustra a ação de uma conexão com um pino. Tal tipo de conexão pode sustentar uma força em qualquer direção normal ao eixo do pino. Normalmente representamos essa ação em termos de duas componentes retangulares. O sentido correto dessas componentes em um determinado problema depende de como o elemento está carregado. Quando o sentido não for conhecido inicialmente, ele é arbitrariamente especificado e as equações de equilíbrio são então escritas. Se a solução dessas equações levar a um sinal algébrico positivo para a componente de força, o sentido atribuído estava correto. Um sinal negativo indica que o sentido é o oposto àquele inicialmente assumido.

Se a junta for livre para girar em torno do pino, a conexão pode suportar apenas a força R. Se a junta não puder girar, a conexão pode suportar também um momento de reação M. O sentido de M está arbitrariamente mostrado aqui, mas o sentido verdadeiro depende de como o elemento está carregado.

O Exemplo 7 mostra as resultantes da distribuição de forças bastante complexas, na seção transversal de uma barra esbelta, ou de uma viga, engastada ou com um apoio rígido. O sentido das reações F e V e do momento fletor M em um dado problema depende, evidentemente, de como o elemento está carregado.

Uma das forças mais comuns é aquela devida à atração gravitacional, Exemplo 8. Essa força afeta todos os elementos de massa em um corpo e é, portanto, distribuída por todo

o corpo. A resultante da força gravitacional em todos os elementos é o peso $W = mg$ do corpo, que passa pelo centro de massa G e está direcionada para o centro da Terra, para as estruturas associadas à Terra. A posição de G é freqüentemente óbvia a partir da geometria do corpo, particularmente quando existir simetria. Quando a localização não é aparente de imediato, ela deve ser determinada experimentalmente ou por meio de cálculos.

Observações semelhantes se aplicam à ação remota de forças magnéticas e elétricas. Essas forças de ação remota têm o mesmo efeito geral em um corpo rígido que forças de módulo e direção iguais aplicadas por contato externo direto.

O Exemplo 9 ilustra a ação de uma mola *linear* elástica e de uma mola *não linear* com características de endurecimento ou de amolecimento. A força exercida por uma mola linear, em tração ou em compressão, é dada por $F = kx$, onde k é a *rigidez* da mola e x é sua deformação, medida a partir da posição neutra ou não deformada.

As representações na Fig. 3/1 *não* são diagramas de corpo livre, são apenas elementos usados para construir diagramas de corpo livre. Estude essas nove condições e identifique-as nos problemas, de modo que você possa construir os diagramas de corpo livre corretos.

A execução dos quatro passos anteriores produzirá um diagrama de corpo livre correto a ser usado na aplicação das equações que governam o problema, tanto em estática quanto em dinâmica. Seja cuidadoso para não omitir do diagrama de corpo livre certas forças que, à primeira vista, podem parecer desnecessárias aos cálculos. Apenas por meio do isolamento *completo* e de uma representação sistemática de *todas*

© Peter Bialobrzeski/Laif/Redux

Outra vista do equipamento de sustentação para carros mostrado na figura de abertura do capítulo.

Construção dos Diagramas de Corpo Livre

O procedimento completo para desenhar um diagrama de corpo livre que isola um corpo ou um sistema consiste nos seguintes passos.

Passo 1. Decida qual sistema deve ser isolado. O sistema escolhido deve, normalmente, envolver uma ou mais das incógnitas que se quer determinar.

Passo 2. Em seguida, isole o sistema escolhido desenhando um diagrama que represente *completamente seu contorno externo.* Esse contorno define o isolamento do sistema de *todos* os outros corpos em contato ou que exerçam atração, que serão considerados removidos. Esse passo é freqüentemente o mais crucial de todos. Tenha certeza de que você *isolou completamente* o sistema antes de prosseguir com o próximo passo.

Passo 3. Identifique todas as forças que atuam *no* sistema isolado devidas *aos* corpos removidos, que façam contato, ou que exerçam atração, e as represente em suas posições adequadas no diagrama do sistema isolado. Percorra sistematicamente todo o contorno para identificar todas as forças de contato. Inclua forças de corpo tal como os pesos, quando forem relevantes. Represente todas as forças conhecidas por vetores, cada um com seu módulo, direção e sentido adequados indicados. Cada força incógnita deve ser representada por um vetor com o módulo ou a direção desconhecida indicada por um símbolo. Se o sentido do vetor for também desconhecido, você deve atribuir um sentido arbitrário. Os cálculos subseqüentes com as equações de equilíbrio fornecerão um valor positivo, se o sentido correto tiver sido atribuído e um valor negativo, se o sentido incorreto tiver sido considerado. É preciso ser *consistente*, durante todos os cálculos, com as características atribuídas às forças incógnitas. Se você for consistente, a solução das equações de equilíbrio revelará os sentidos corretos.

Passo 4. Mostre a escolha dos eixos coordenados diretamente no diagrama. Por conveniência, dimensões pertinentes podem também ser representadas. Observe, entretanto, que o diagrama de corpo livre serve para o propósito de focalizar a atenção na ação das forças externas e, portanto, o diagrama não deve ser carregado com informação excessiva. Distinga claramente os vetores das forças de setas representando outras quantidades diferentes. Um lápis colorido pode ser usado com esse propósito.

as forças externas pode-se fazer uma análise confiável dos efeitos de todas as forças aplicadas e reativas. Muito freqüentemente uma força que, à primeira vista, parece não influenciar um resultado desejado pode, de fato, ter uma influência. Assim, o único procedimento seguro é incluir no diagrama de corpo livre todas as forças cujos valores não sejam obviamente desprezíveis.

O método do corpo livre é extremamente importante em mecânica, porque ele assegura uma definição precisa de um sistema mecânico e focaliza a atenção no significado exato e na aplicação das leis sobre forças da estática e da dinâmica. Revise os quatro passos anteriores para a construção de um diagrama de corpo livre, enquanto estiver estudando os exemplos dos diagramas de corpo livre mostrados na Fig. 3/2 e nos Exemplos que aparecem ao final do próximo item.

Exemplos de Diagramas de Corpo Livre

A Fig. 3/2 dá quatro exemplos de mecanismos e estruturas juntamente com seus diagramas de corpo livre corretos. Dimensões e valores são omitidos por clareza. Em cada caso tratamos todo o sistema como um único corpo, de modo que as forças internas não estão mostradas. As características dos vários tipos de forças de contato ilustradas na Fig. 3/1 são usadas, quando aplicáveis, nos quatro exemplos.

No Exemplo 1 a treliça é composta por elementos estruturais que, considerados em conjunto, constituem um arcabouço rígido. Assim, podemos remover toda a treliça de sua fundação de apoio e tratá-la como um único corpo rígido. Além da força externa aplicada P, o diagrama de corpo livre deve incluir as reações na treliça em A e B. O suporte oscilante em B pode suportar apenas uma força vertical, e essa força é transmitida à estrutura em B (Exemplo 4 da Fig. 3/1). A conexão com pino em A (Exemplo 6 da Fig. 3/1) é capaz de gerar componentes de força tanto horizontal quanto vertical na treliça. Se o peso total dos elementos da treliça for apreciável em comparação com P e com as forças em A e B, então os pesos dos elementos devem ser incluídos no diagrama de corpo livre como forças externas.

Nesse exemplo relativamente simples está claro que a componente vertical A_y deve ser direcionada para baixo para

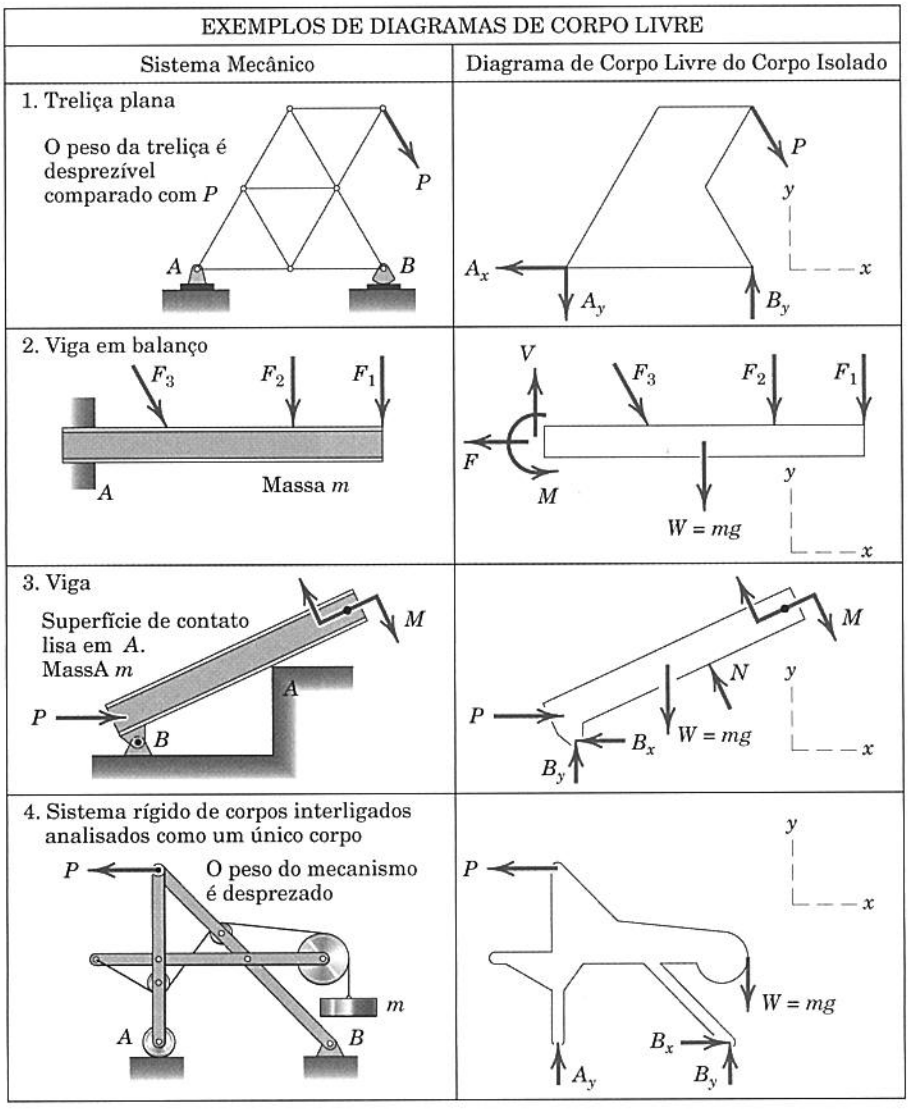


Figura 3/2

prevenir que a treliça gire no sentido horário em torno de B. Da mesma forma, a componente horizontal A_x apontará para a esquerda para evitar que a treliça se mova para a direita sob a influência da componente horizontal de P. Assim, na construção do diagrama de corpo livre para essa treliça simples, podemos perceber facilmente o sentido correto de cada um dos componentes de força exercidos *na* treliça *pela* fundação em A e podemos, portanto, representar seus sentidos físicos corretos no diagrama. Quando o sentido físico correto de uma força ou de seus componentes não é facilmente reconhecido por observação direta, ele deve ser arbitrariamente atribuído, e o acerto ou erro do sentido atribuído será determinado pelo sinal algébrico do seu valor calculado.

No Exemplo 2 a viga em balanço está presa à parede e está submetida a três cargas aplicadas. Quando isolamos aquela parte da viga à direita da seção em A, devemos incluir as forças de reação aplicadas *à* viga *pela* parede. As resultantes dessas forças de reação são mostradas atuando na seção da viga (Exemplo 7 da Fig. 3/1). Uma força vertical V, para contrabalançar a força aplicada para baixo, está mostrada e uma força trativa F, para equilibrar as forças aplicadas para a direita, deve também ser incluída. Além disso, para prevenir que a viga gire em torno de A, um momento anti-horário M também é necessário. O peso mg da viga deve ser representado passando pelo seu centro de massa (Exemplo 8 da Fig. 3/1).

No diagrama de corpo livre do Exemplo 2, representamos o sistema de forças um tanto complexo que realmente atua na seção transversal da viga pelo sistema equivalente força-momento, no qual a força é decomposta em sua componente vertical V (força cisalhante ou cortante) e em sua componente horizontal F (força trativa). O momento M é o momento fletor na viga. O diagrama de corpo livre agora está completo e mostra a viga em equilíbrio sob a ação de seis forças e um momento.

No Exemplo 3 mostra-se o peso $W = mg$ atuando através do centro de massa da viga, cuja posição é considerada conhecida (Exemplo 8 da Fig. 3/1). A força exercida pela extremidade A na viga é normal à superfície lisa da viga (Exemplo 2 da Fig. 3/1). Para perceber essa ação mais claramente, visualize uma ampliação do ponto de contato A, que apareceria ligeiramente arredondado, e considere a força exercida por esse vértice arredondado na superfície reta da viga, que se supõe lisa. Se as superfícies de contato no vértice não fossem lisas, uma componente de força de atrito tangencial poderia existir. Além da força aplicada P e do momento M, existe o pino de conexão em B, que exerce na viga componentes de força tanto em x quanto em y. Os sentidos positivos dessas componentes estão arbitrariamente atribuídos.

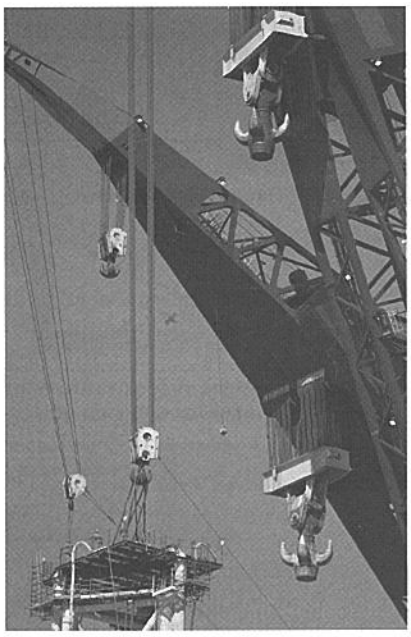
No Exemplo 4, o diagrama de corpo livre de todo o mecanismo isolado contém três forças incógnitas, se as cargas mg e P forem conhecidas. Qualquer uma das inúmeras configurações internas para fixar o cabo que prende a massa m seria possível sem alterar a resposta externa do mecanismo como um todo, e esse fato é realçado pelo diagrama de corpo livre. Esse exemplo hipotético é usado para mostrar que as forças internas a um conjunto de elementos rígidos não influenciam os valores das reações externas.

Usamos o diagrama de corpo livre para escrever as equações de equilíbrio, que são discutidas no próximo item. Quando essas equações são resolvidas, alguns dos valores calculados para as forças podem valer zero. Isso indicaria que as forças consideradas não existem. No Exemplo 1 da Fig. 3/2, qualquer das reações A_x, A_y ou B_y pode ser zero para valores específicos da geometria da treliça e do módulo, direção e sentido da carga aplicada P. Uma força de reação nula é freqüentemente difícil de identificar por inspeção, mas pode ser determinada resolvendo as equações de equilíbrio.

Comentários semelhantes se aplicam para forças com valores calculados negativos. Tal resultado indica que o sentido real é o oposto ao que foi considerado. O sentido positivo considerado para B_x e B_y no Exemplo 3, e para B_y no Exemplo 4, está mostrado nos diagramas de corpo livre. A verificação dessas suposições é provada, ou não, em função dos sinais algébricos das forças calculadas serem positivos ou negativos, quando os cálculos são feitos em um problema real.

O isolamento do sistema mecânico sob consideração é um passo crucial na formulação do modelo matemático. O aspecto mais importante para a construção correta do sempre importante diagrama de corpo livre é a decisão, clara e sem ambigüidades, daquilo que deve ser incluído e daquilo que deve ser excluído. Essa decisão se torna clara apenas quando o contorno do diagrama de corpo livre representa um percurso completo que envolve todo o corpo ou sistema de corpos a ser isolado, começando em algum ponto arbitrário no contorno e retornando a este mesmo ponto. O sistema dentro desse contorno fechado é o corpo livre isolado e todas as forças de contato e todas as forças de corpo transmitidas ao sistema por meio do contorno, devem ser consideradas.

Os exercícios a seguir ajudam a praticar a construção de diagramas de corpo livre. Essa prática é útil antes de usar esses diagramas na aplicação dos princípios de equilíbrio de forças no próximo item.



© Digital Vision/Getty Images

Mesmo sistemas complexos de polias, como os vistos aqui, podem ser tratados com facilidade com uma análise sistemática de equilíbrio.

EXERCÍCIOS SOBRE DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE

3/A Em cada um dos cinco exemplos a seguir, o corpo a ser isolado está mostrado no diagrama da esquerda e um diagrama de corpo livre (DCL) *incompleto* do corpo isolado está mostrado à direita. Acrescente, em cada caso, quaisquer forças que sejam necessárias para obter um diagrama de corpo livre completo. Os pesos dos corpos são desprezíveis a menos que seja indicado o contrário. Por simplicidade, as dimensões e os valores numéricos estão omitidos.

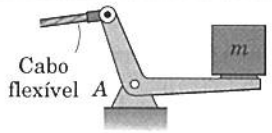
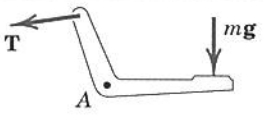
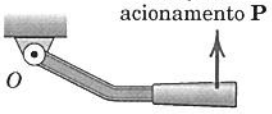
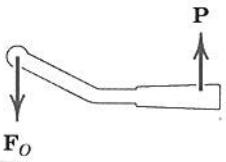
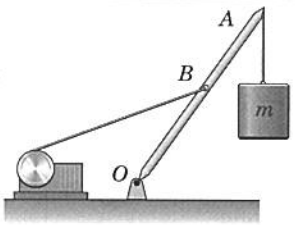
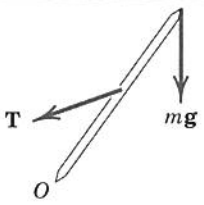
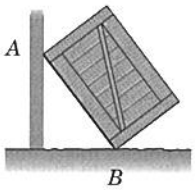
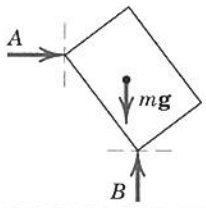
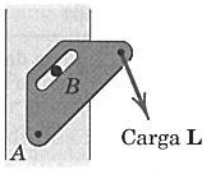
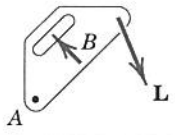
	Corpo	DCL Incompleto
1. Alavanca em cotovelo com pino em A, sustentando uma massa m.		
2. Alavanca de controle aplicando um torque ao eixo em O.		
3. Mastro OA, de massa desprezível se comparada com a massa m. O mastro tem uma dobradiça em O e está preso por um cabo de içamento em B.		
4. Caixote uniforme de massa m apoiado contra a parede vertical lisa e sobre uma superfície horizontal rugosa.		
5. Suporte carregado sustentado por uma conexão com pino em A e por um pino fixo na ranhura lisa em B.		

Figura 3/A

3/B Em cada um dos cinco exemplos a seguir, o corpo a ser isolado está mostrado no diagrama da esquerda e um diagrama de corpo livre (DCL) *errado* ou *incompleto* está mostrado à direita. Faça, em cada caso, quaisquer modificações ou adições necessárias para obter um diagrama de corpo livre correto e completo. Os pesos dos corpos são desprezíveis a menos que seja indicado o contrário. Por simplicidade, as dimensões e os valores numéricos estão omitidos.

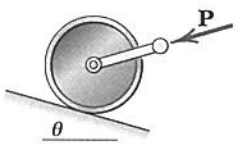
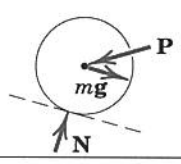
	Corpo	DCL Errado ou Incompleto
1. Cortador de grama, de massa m, sendo empurrado para cima em um aclive de inclinação θ.		

Figura 3/B

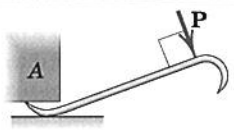
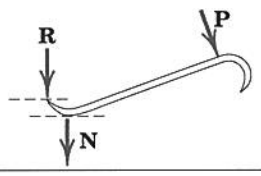
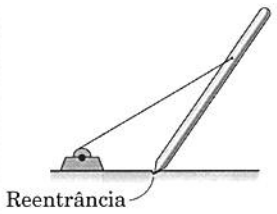
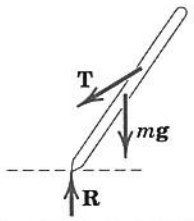
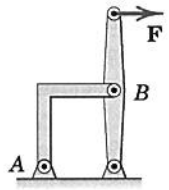
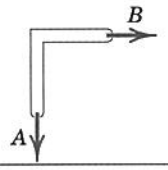
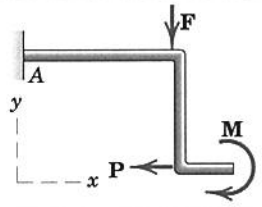
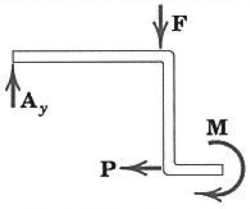
2. Pé-de-cabra levantando o corpo A que tem uma superfície horizontal lisa. O pé-de-cabra se apóia sobre uma superfície horizontal rugosa.		
3. Poste uniforme de massa m sendo içado à sua posição por uma manivela. A superfície horizontal de apoio tem uma reentrância para evitar que o poste deslize.		
4. Suporte articulado para estrutura; conexões por pinos.		
5. Barra dobrada, soldada ao suporte em A e submetida a duas forças e a um momento.		

Figura 3/B, continuação

3/C Desenhe um diagrama de corpo livre correto e completo de cada um dos corpos descritos nos enunciados. Os pesos dos corpos são significativos apenas se a massa for dada. Todas as forças, conhecidas ou incógnitas, devem ser identificadas. (*Nota*: O sentido de alguns componentes de reação nem sempre pode ser determinado sem cálculo.)

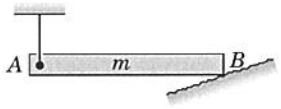
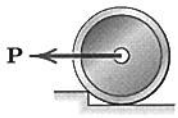
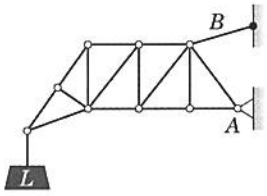
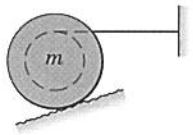
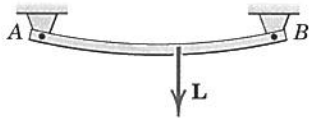
1. Barra uniforme horizontal de massa m suspensa por um cabo vertical em A e sustentada por uma superfície inclinada rugosa em B. 	2. Roda de massa m na iminência de subir o meio-fio devido à força **P**. 
3. Treliça carregada, sustentada por conexão com pino em A e por um cabo em B. 	4. Barra uniforme de massa m e rolete de massa m_0, considerados em conjunto. Submetidos a um momento M e sustentados como mostrado. O rolete é livre para girar.

Figura 3/C

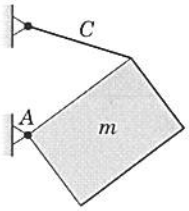
5. Roda uniforme de massa m, com sulco, sustentada por uma superfície rugosa e pela ação de um cabo horizontal.



6. Barra, inicialmente horizontal, mas defletida sob a carga **L**. Presa por pinos a suportes rígidos em cada extremidade.



7. Placa uniforme e pesada, de massa m, sustentada em um plano vertical pelo cabo C e pela dobradiça A.



8. Conjunto de armação, polias e cabo, que deve ser isolado como um único corpo.

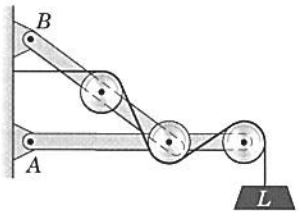


Figura 3/C, continuação

3/3 Condições de Equilíbrio

Na Seção 3/1 definimos equilíbrio como a condição na qual a resultante de todas as forças e momentos atuando em um corpo é nula. Enunciado de outro modo, um corpo está em equilíbrio se todas as forças e momentos aplicados nele estiverem em equilíbrio. Esses requisitos estão contidos nas equações vetoriais de equilíbrio, Eqs. 3/1, que, para duas dimensões, podem ser escritas em forma escalar como

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0 \tag{3/2}$$

A terceira equação representa o somatório nulo dos momentos de todas as forças em relação a qualquer ponto O sobre o corpo ou fora dele. As Eqs. 3/2 são as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio total em duas dimensões. Elas são condições necessárias porque, se elas não forem satisfeitas, não pode existir equilíbrio de força ou de momento. Elas são suficientes porque, uma vez satisfeitas, não pode existir desequilíbrio e o equilíbrio está assegurado.

As equações relacionando força e aceleração, para o movimento de corpos rígidos, são desenvolvidas no *Vol. 2 Dinâmica*, a partir da segunda lei de Newton para movimento. Essas equações mostram que a aceleração do centro de massa de um corpo é proporcional à força resultante $\Sigma\mathbf{F}$ atuando no corpo. Conseqüentemente, se um corpo se move com velocidade constante (aceleração nula), a força resultante sobre ele tem que ser nula e o corpo pode ser tratado como em estado de equilíbrio translacional.

Para o equilíbrio completo em duas dimensões, todas as três Eqs. 3/2 devem ser satisfeitas. Entretanto, essas condições são independentes e uma pode ser satisfeita sem que a outra o seja. Pegue, por exemplo, um corpo que desliza ao longo de uma superfície horizontal com velocidade crescente sob a ação de forças aplicadas. As equações de equilíbrio das forças serão satisfeitas na direção vertical onde a aceleração vale zero, mas não na direção horizontal. Da mesma forma, um corpo, tal como um rotor, que gira em torno de seu centro de massa estacionário com velocidade angular crescente não está em equilíbrio rotacional, mas as duas equações de equilíbrio relativas às forças serão satisfeitas.

Categorias de Equilíbrio

Aplicações das Eqs. 3/2 caem, naturalmente, em diversas categorias que são facilmente identificáveis. As categorias dos sistemas de força atuando sobre corpos em equilíbrio bidimensional estão resumidas na Fig. 3/3 e são mais detalhadas a seguir.

Categoria 1, o equilíbrio de forças colineares requer, claramente, apenas uma equação de força na direção das forças (direção x), pois todas as outras equações estão automaticamente satisfeitas.

Categoria 2, o equilíbrio de forças que estejam em um plano (plano x-y) e sejam concorrentes em um ponto O, requer apenas as duas equações de força, pois o somatório dos momentos em relação a O, ou seja, em torno de um eixo z que passa por O, é necessariamente igual a zero. Nessa categoria está incluída a situação do equilíbrio de uma partícula.

Categoria 3, o equilíbrio de forças paralelas, que estejam em um plano, requer a equação de forças na direção das forças (direção x) e uma equação de momentos em relação a um eixo (eixo z), normal ao plano das forças.

Categoria 4, o equilíbrio de um sistema geral de forças em um plano (x-y) requer as duas equações de força no plano e uma equação de momento em relação a um eixo (eixo z) normal ao plano.

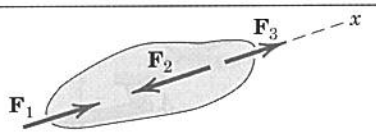
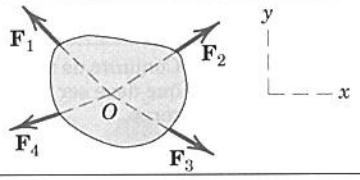
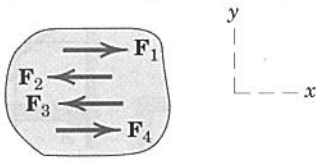
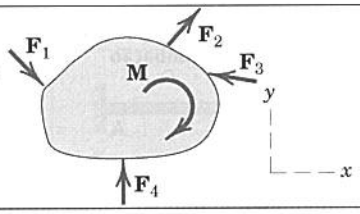
CATEGORIAS DE EQUILÍBRIO EM DUAS DIMENSÕES		
Sistema de Força	Diagrama de Corpo Livre	Equações Independentes
1. Colineares		$\Sigma F_x = 0$
2. Concorrentes em um ponto		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
3. Paralelas		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. Geral		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_y = 0$

Figura 3/3

Elementos de Duas e Três Forças

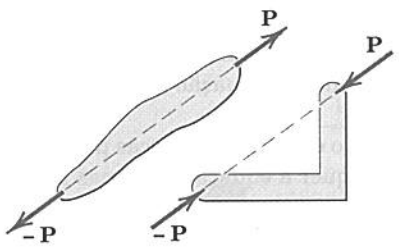
O leitor deve ficar atento a duas situações de equilíbrio que ocorrem com freqüência. A primeira situação é o equilíbrio de um corpo sob a ação de apenas duas forças. Dois exemplos estão mostrados na Fig. 3/4, e vemos que para um *elemento de duas forças* como esse estar em equilíbrio, as forças devem ser *iguais, opostas e colineares.* A forma do elemento não afeta essa condição simples. Nas ilustrações citadas, consideramos desprezíveis os pesos dos elementos em comparação com as forças aplicadas.

A segunda situação é um *elemento de três forças*, que é um corpo sob a ação de três forças, Fig. 3/5*a*. Vemos que o equilíbrio requer que as linhas de ação das três forças sejam *concorrentes*. Se elas não fossem concorrentes, então uma das forças exerceria um momento resultante em torno do ponto de interseção das outras duas, o que violaria a condição do momento ser zero em relação a todos os pontos. A única exceção ocorre quando as três forças são paralelas. Nesse caso podemos considerar o ponto de concorrência como estando no infinito.

O princípio da convergência de três forças em equilíbrio tem um uso importante na elaboração de uma solução gráfica das equações de força. Nesse caso o polígono de forças é desenhado como um circuito fechado, como mostrado na Fig. 3/5*b*. Freqüentemente, um corpo em equilíbrio sob a ação de mais de três forças pode ser reduzido a um elemento de três forças pela combinação de duas ou mais das forças conhecidas.

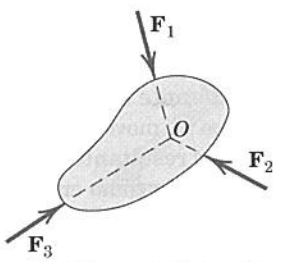
Equações de Equilíbrio Alternativas

Além das Eqs. 3/2, existem duas outras maneiras de expressar as condições gerais para o equilíbrio de forças em

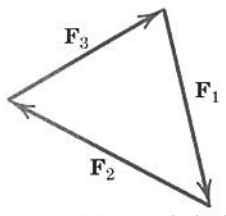


Elementos de duas forças

Figura 3/4



(*a*) Elemento de três forças



(*b*) O polígono fechado satisfaz $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$

Figura 3/5

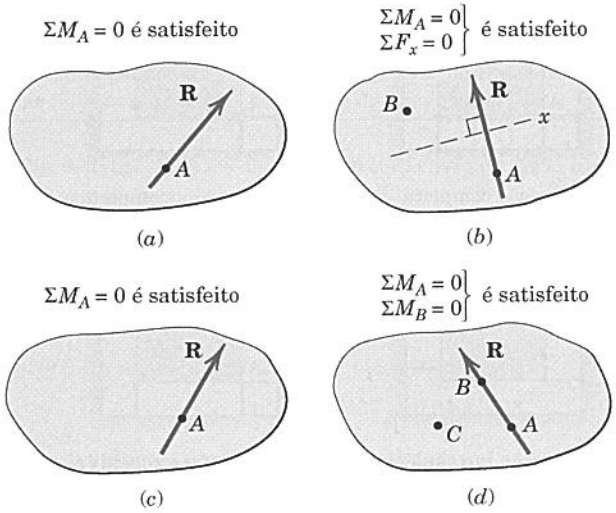


Figura 3/6

duas dimensões. O primeiro modo está ilustrado na Fig. 3/6, partes (*a*) e (*b*). Para o corpo mostrado na Fig. 3/6*a*, se $\Sigma M_A = 0$, então a resultante, se ela ainda existir, não pode ser um momento, mas deve ser a força **R** passando por *A*. Se agora a equação $\Sigma F_x = 0$ é válida, onde a direção *x* é arbitrária, da Fig. 3/6*b* vê-se que a força resultante **R**, se ela ainda existir, não só passa por *A*, mas também deve ser perpendicular à direção *x*, como mostrado. Agora, se $\Sigma M_B = 0$, onde *B* é qualquer ponto tal que a linha *AB* não seja perpendicular à direção *x*, vemos que **R** deve ser zero e, assim, o corpo está em equilíbrio. Desse modo, um conjunto alternativo de equações de equilíbrio é

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0$$

onde os dois pontos *A* e *B* não podem estar situados em uma linha perpendicular à direção *x*.

Uma terceira formulação das condições de equilíbrio pode ser feita para um sistema de forças coplanares. Esse caso está ilustrado na Fig. 3/6, partes (*c*) e (*d*). Novamente, se $\Sigma M_A = 0$ para qualquer corpo, como o mostrado na Fig. 3/6*c*, a resultante, se existir, deve ser uma força **R** passando por *A*. Além disso, se $\Sigma M_B = 0$, a resultante, se ainda existir alguma, deve passar por *B*, como mostrado na Fig. 3/6*d*. Tal força não poderá existir, entretanto, se $\Sigma M_C = 0$, onde *C* não é colinear com *A* e *B*. Assim, podemos escrever as equações de equilíbrio como

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$

onde *A*, *B* e *C* são três pontos quaisquer que não estejam na mesma linha reta.

Quando se escreve equações de equilíbrio que não sejam independentes, obtém-se informação redundante e uma solução correta das equações levará a $0 = 0$. Por exemplo, para um problema geral em duas dimensões com três incógnitas, três equações de momento, escritas em relação a três pontos que se situem sobre a mesma linha reta, não são independentes. Tais equações conterão duplicação de informação e a solução de duas delas pode determinar no máximo duas incógnitas, com a terceira equação verificando, meramente, a identidade $0 = 0$.

Restrições e Determinação Estática

As equações de equilíbrio desenvolvidas nesse item são condições tanto necessárias quanto suficientes para estabelecer o equilíbrio de um corpo. Entretanto, elas não fornecem necessariamente todas as informações requeridas para calcular todas as forças incógnitas que podem atuar em um corpo em equilíbrio. Se as equações são adequadas ou não para determinar todas as incógnitas depende das características das restrições impostas pelos apoios contra um possível movimento do corpo. Por *restrições* entendemos restrição ao movimento.

No Exemplo 4 da Fig. 3/1 o suporte de rolete, de esfera ou oscilante acarreta restrição normal à superfície de contato, mas nenhuma restrição tangente à superfície. Assim, uma força tangencial não pode ser sustentada. Para as buchas do Exemplo 5, existe restrição apenas normal à guia. No Exemplo 6 a conexão com pino acarreta restrição em ambas as direções, mas não oferece resistência à rotação em torno do pino, a menos que o pino não seja livre para girar. O suporte fixo do Exemplo 7, entretanto, oferece restrição contra rotação e também ao movimento lateral.

Se o suporte oscilante que apóia a treliça do Exemplo 1 da Fig. 3/2 fosse substituído por uma conexão com pinos, como em *A*, existiria uma restrição adicional, além daquelas necessárias para sustentar uma configuração de equilíbrio sem liberdade de movimento. As três condições escalares de equilíbrio, Eqs. 3/2, não forneceriam informações suficientes para determinar todas as quatro incógnitas, pois A_x e B_x não poderiam ser resolvidas separadamente; apenas a soma delas poderia ser determinada. Essas duas componentes de força seriam dependentes da deformação dos elementos da treliça, que é influenciada pela rigidez deles. As reações horizontais A_x e B_x seriam também dependentes de qualquer deformação inicial necessária para ajustar as dimensões da estrutura àquelas da fundação entre *A* e *B*. Assim, não podemos determinar A_x e B_x por uma análise de corpo rígido.

Referindo-nos novamente à Fig. 3/2, vemos que se o pino *B* no Exemplo 3 não pudesse girar, o apoio poderia transmitir um momento à viga através do pino. Assim sendo, existiriam quatro reações incógnitas atuando na viga, devidas aos apoios. Nominalmente, a força em *A*, as duas componentes de força em *B* e o momento em *B*. Conseqüentemente, as três equações de equilíbrio escalares independentes não forneceriam informação suficiente para calcular todas as quatro incógnitas.

Um corpo rígido, ou uma combinação rígida de elementos tratada como um único corpo, que possui mais apoios externos ou restrições do que os necessários para manter uma posição de equilíbrio é chamado *estaticamente indeterminado.* Apoios que podem ser removidos sem destruir a condição de equilíbrio do corpo são denominados *redundantes*. O número de elementos de apoio redundantes presente corresponde ao *grau de indeterminação estática* e é igual ao número total de forças externas incógnitas menos o número de equações de equilíbrio independentes disponíveis. Por outro lado, corpos que são apoiados pelo número mínimo de restrições necessário para assegurar uma configuração de equilíbrio são chamados *estaticamente determinados*, e para esses corpos as equações de equilíbrio são suficientes para determinar as forças externas incógnitas.

Os problemas sobre equilíbrio nesse item e por todo o *Vol. 1 Estática* são geralmente restritos a corpos estaticamente determinados, onde as restrições são apenas suficientes para as-

segurar uma configuração de equilíbrio estável e onde as forças de apoio incógnitas podem ser totalmente determinadas pelas equações de equilíbrio independentes disponíveis.

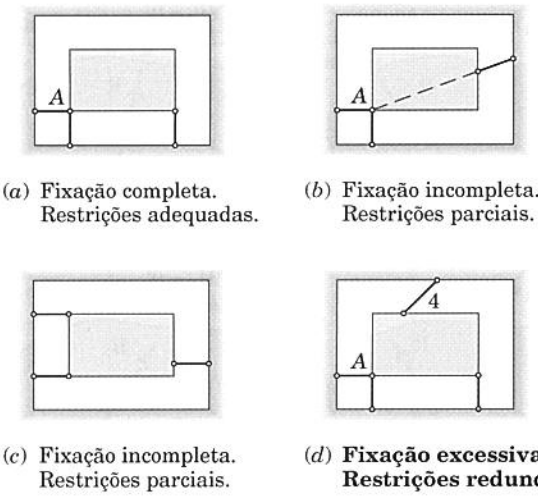
Devemos estar atentos à natureza das restrições antes de tentar resolver um problema de equilíbrio. Um corpo pode ser reconhecido como estaticamente indeterminado quando existem mais reações externas incógnitas do que equações de equilíbrio independentes para o sistema de forças envolvido. É sempre bom contar o número de variáveis incógnitas em um dado corpo e ter certeza de que um número igual de equações independentes pode ser escrito; caso contrário, pode-se desperdiçar esforço tentando-se uma solução impossível com a ajuda somente das equações de equilíbrio. As variáveis incógnitas podem ser forças, momentos, distâncias ou ângulos.

Validade das Restrições

Ao discutir as relações entre restrições e equilíbrio, devemos nos aprofundar na questão da validade das restrições. A existência de três restrições para um problema bidimensional nem sempre garante uma configuração de equilíbrio estável. A Fig. 3/7 mostra quatro tipos diferentes de restrições. Na parte *a* da figura, o ponto *A* do corpo rígido está fixo por dois vínculos e não pode se mover, e o terceiro vínculo previne qualquer rotação em torno de *A*. Assim, esse corpo está *completamente imóvel* com três *restrições adequadas*.

Na parte *b* da figura, o terceiro vínculo está posicionado de modo que a força transmitida por ele passa pelo ponto *A*, onde as outras duas forças de restrição atuam. Assim, essa configuração de restrições não pode oferecer uma resistência inicial à rotação em torno de *A*, o que poderia ocorrer quando cargas externas fossem aplicadas ao corpo. Concluímos, portanto, que esse corpo está *preso de modo incompleto* sob *restrições parciais*.

A configuração na parte *c* da figura nos dá uma condição semelhante de fixação incompleta, porque os três vínculos paralelos não podem oferecer resistência inicial a um pequeno movimento vertical do corpo como resultado de cargas externas aplicadas ao corpo nessa direção. As restrições nesses dois exemplos são freqüentemente denominadas *impróprias*.



(*a*) Fixação completa. Restrições adequadas.

(*b*) Fixação incompleta. Restrições parciais.

(*c*) Fixação incompleta. Restrições parciais.

(*d*) **Fixação excessiva. Restrições redundantes.**

Figura 3/7

Na parte *d* da Fig. 3/7 temos uma condição de fixação completa, com o vínculo 4 atuando como uma quarta restrição que é desnecessária para manter uma posição fixa. Assim, o vínculo 4, é uma *restrição redundante* e o corpo é estaticamente indeterminado.

Do mesmo modo que nos quatro exemplos da Fig. 3/7, é normalmente possível concluir por observação direta quando as restrições em um corpo em equilíbrio bidimensional são adequadas, parciais (inadequadas) ou redundantes. Como indicado antes, a grande maioria dos problemas nesse livro é estaticamente determinada, com restrições adequadas.

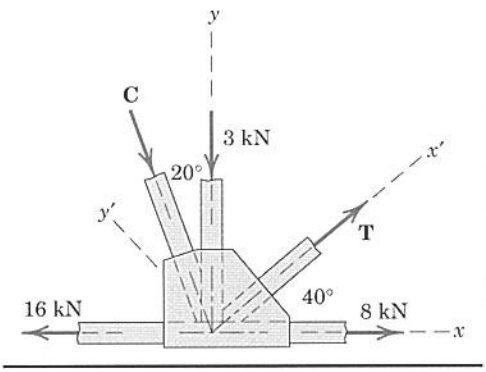
Enfoque para a Resolução de Problemas

Os exemplos ao final deste item mostram a aplicação dos diagramas de corpo livre e das equações de equilíbrio a problemas típicos em estática. Essas soluções devem ser estudadas em profundidade. Nos problemas desse capítulo e em toda a mecânica é importante desenvolver um enfoque lógico e sistemático que inclua os seguintes passos:

1. Identifique claramente as variáveis que são conhecidas e as incógnitas.
2. Faça uma escolha inequívoca do corpo (ou do sistema de corpos unidos tratado como um único corpo) a ser isolado e desenhe todo o seu diagrama de corpo livre, indicando todas as forças e momentos externos identificáveis, conhecidos ou incógnitos, que atuam no corpo.
3. Escolha um sistema de eixos de referência conveniente, sempre de acordo com a regra da mão direita quando produtos vetoriais forem usados. Escolha os centros de momento visando a uma simplificação nos cálculos. Geralmente a melhor escolha é aquela pela qual passam tanto mais forças incógnitas quanto possível. Soluções simultâneas de equações de equilíbrio são freqüentemente necessárias, mas podem ser minimizadas ou evitadas por uma escolha cuidadosa dos eixos de referência e dos centros de momento.
4. Identifique e estabeleça os princípios ou as equações de força e de momento aplicáveis, que governam as condições de equilíbrio do problema. Nos exemplos a seguir essas relações estão mostradas entre parênteses e antecedem cada cálculo principal.
5. Equipare o número de equações independentes com o número de incógnitas em cada problema.
6. Solucione e verifique os resultados. Em muitos problemas pode-se desenvolver o senso de engenharia fazendo-se inicialmente uma suposição ou estimativa adequada do resultado antes de fazer os cálculos e, então, comparando-se a estimativa com o valor calculado.

Exemplo 3/1

Determine os módulos das forças **C** e **T**, que juntamente com as outras três forças mostradas, atuam no nó de uma treliça de uma ponte.



Solução. A figura dada é o diagrama de corpo livre da seção isolada do nó em questão ① e mostra as cinco forças que estão em equilíbrio.

Solução I (álgebra escalar). Para os eixos x-y, como mostrado, temos

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad 8 + T\cos 40° + C \operatorname{sen} 20° - 16 = 0$$

$$0{,}766T + 0{,}342C = 8 \qquad (a)$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad T \operatorname{sen} 40° - C\cos 20° - 3 = 0$$

$$0{,}643T - 0{,}940C = 3 \qquad (b)$$

A solução simultânea das Eqs. (a) e (b) resulta em

$$T = 9{,}09 \text{ kN} \qquad C = 3{,}03 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Solução II (álgebra escalar). Para evitar a solução simultânea, podemos usar os eixos ② x'-y' fazendo o primeiro somatório na direção y' para eliminar referência à T. Assim,

$$[\Sigma F_{y'} = 0] \qquad -C\cos 20° - 3\cos 40° - 8 \operatorname{sen} 40° + 16 \operatorname{sen} 40° = 0$$

$$C = 3{,}03 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_{x'} = 0] \qquad T + 8\cos 40° - 16\cos 40° - 3 \operatorname{sen} 40° - 3{,}03 \operatorname{sen} 20° = 0$$

$$T = 9{,}09 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Solução III (álgebra vetorial). Com os vetores unitários **i** e **j** nas direções x e y, respectivamente, o somatório nulo de forças para que haja equilíbrio leva à equação vetorial

$$[\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}] \qquad 8\mathbf{i} + (T\cos 40°)\mathbf{i} + (T \operatorname{sen} 40°)\mathbf{j} - 3\mathbf{j} + (C \operatorname{sen} 20°)\mathbf{i}$$

$$- (C\cos 20°)\mathbf{j} - 16\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Igualando os coeficientes dos termos em **i**- e **j**- obtém-se

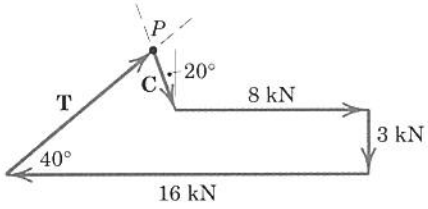
$$8 + T\cos 40° + C \operatorname{sen} 20° - 16 = 0$$

$$T \operatorname{sen} 40° - 3 - C\cos 20° = 0$$

que, claro, são idênticas às Eqs. (a) e (b) resolvidas anteriormente.

Solução IV (geométrica). O polígono representando a soma vetorial nula das cinco forças está mostrado. Pode-se ver imediatamente que as Eqs. (a) e (b) dão as projeções dos vetores nas direções x e y. Do mesmo modo, projeções sobre as direções x' e y' dão as equações alternativas da Solução II.

Uma solução gráfica é facilmente obtida. Os vetores conhecidos são colocados em ③ seqüência, em alguma escala conveniente, e as direções de **T** e **C** são, então, traçadas para fechar o polígono. A interseção resultante no ponto P completa a solução, permitindo a medida dos módulos de **T** e **C** diretamente do diagrama, com o grau de exatidão que tenhamos empregado na sua construção.



Sugestões Úteis

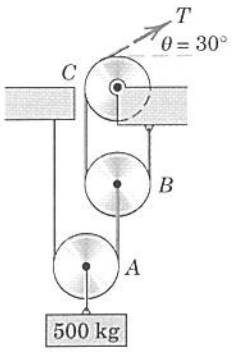
① Como esse é um problema de forças concorrentes, nenhuma equação de momento é necessária.

② A seleção dos eixos de referência para facilitar os cálculos é sempre uma consideração importante. Nesse exemplo, alternativamente, poderíamos pegar um sistema com eixos paralelo e normal à direção de **C**, e fazer um somatório de forças normal a **C** para eliminá-lo.

③ Os vetores conhecidos podem ser somados em qualquer ordem desejada, mas eles devem ser somados antes dos vetores incógnitas.

Exemplo 3/2

Calcule a força trativa T no cabo que sustenta a massa de 500 kg, com o arranjo de polias mostrado. Cada polia pode girar livremente em torno de seu mancal e os pesos de todas as peças são pequenos em comparação com a carga. Ache o módulo da força total no mancal da polia C.



Solução. O diagrama de corpo livre de cada polia está desenhado em suas posições relativas com os outros. Começamos pela polia A, que inclui a única força conhecida. Designando por r o raio da polia, que não foi especificado no problema, o equilíbrio dos momentos em relação a seu centro O e o equilíbrio de forças na direção vertical requerem

① $[\Sigma M_O = 0]$ $\quad T_1 r - T_2 r = 0 \quad T_1 = T_2$

$[\Sigma F_y = 0] \quad T_1 + T_2 - 500(9{,}81) = 0 \quad 2T_1 = 500(9{,}81) \quad T_1 = T_2 = 2450 \text{ N}$

A partir do exemplo da polia A podemos escrever, por inspeção, as forças de equilíbrio na polia B como

$$T_3 = T_4 = T_2/2 = 1226 \text{ N}$$

Para a polia C o ângulo $\theta = 30°$ não afeta de nenhum modo o momento de T em relação ao centro da polia, de modo que o equilíbrio de momentos requer que

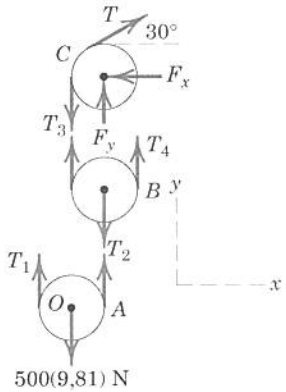
$$T = T_3 \quad \text{ou} \quad T = 1226 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

O equilíbrio da polia nas direções x e y requer

$[\Sigma F_x = 0] \quad 1226 \cos 30° - F_x = 0 \quad F_x = 1062 \text{ N}$

$[\Sigma F_y = 0] \quad F_y + 1226 \text{ sen } 30° - 1226 = 0 \quad F_y = 613 \text{ N}$

$[F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}] \quad F = \sqrt{(1062)^2 + (613)^2} = 1226 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$

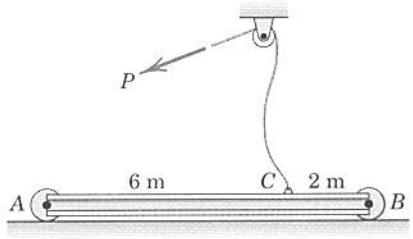


Sugestão Útil

① O raio r, claramente, não influencia os resultados. Uma vez que uma polia tenha sido analisada, os resultados devem ficar completamente claros por inspeção.

Exemplo 3/3

A viga em I uniforme, com 100 kg, está inicialmente apoiada por roletes, em suas extremidades A e B, sobre um plano horizontal. Por meio de um cabo em C deseja-se levantar a extremidade B para uma posição 3 m acima da extremidade A. Determine a força trativa necessária P, a força de reação em A e o ângulo θ feito pela viga com a horizontal quando estiver na posição elevada.



Solução. Ao construirmos o diagrama de corpo livre, notamos que a força de reação no rolete em A e o peso são forças verticais. Conseqüentemente, na ausência de outras forças horizontais, P também deve ser vertical. Do Exemplo 3/2 vemos imediatamente que a força trativa P no cabo é igual à força trativa P aplicada à viga em C.

O equilíbrio dos momentos em relação a A elimina a força R e leva a

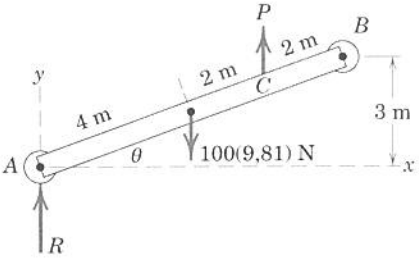
① $[\Sigma M_A = 0] \quad P(6 \cos \theta) - 981(4 \cos \theta) = 0 \quad P = 654 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$

O equilíbrio das forças verticais requer que

$[\Sigma F_y = 0] \quad 654 + R - 981 = 0 \quad R = 327 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$

O ângulo θ depende apenas da geometria dada e vale

$$\text{sen } \theta = 3/8 \quad \theta = 22{,}0° \qquad \textit{Resp.}$$

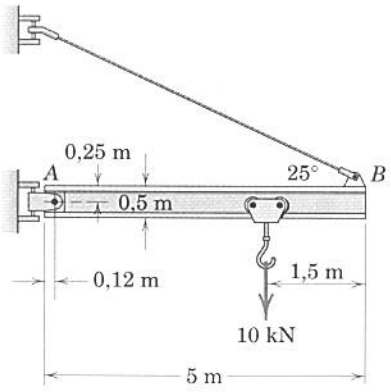


Sugestão Útil

① O equilíbrio desse sistema de forças paralelas é, claramente, independente de θ.

Exemplo 3/4

Para a grua mostrada na figura, determine o módulo T da força trativa no cabo de sustentação e o módulo da força no pino em A. A viga AB é uma viga em I padrão, com 0,5 m de espessura e com uma massa de 95 kg por metro.



Solução algébrica. O sistema é simétrico em relação ao plano x-y, que passa pelo centro da viga. Desse modo o problema pode ser analisado como sendo o de equilíbrio de um sistema de forças coplanares. O diagrama de corpo livre da viga é mostrado na figura, com a reação no pino em A representada em termos de suas duas componentes retangulares. O peso da viga vale $95(10^{-3})(5)9{,}81 = 4{,}66$ kN e atua no seu centro. Observe que existem três incógnitas A_x, A_y e T que podem ser determinadas pelas três equações de equilíbrio. Começamos com uma equação de momentos em relação a A, que elimina duas das três incógnitas da equação. Ao aplicar a equação dos momentos em torno de A, é mais simples considerar os momentos das componentes de $\mathbf{T}$ em x e em y, do que calcular a distância perpendicular de $\mathbf{T}$ até A. Assim, com o sentido anti-horário como positivo, temos

$$[\Sigma M_A = 0] \qquad (T\cos 25°)0{,}25 + (T \operatorname{sen} 25°)(5 - 0{,}12) - 10(5 - 1{,}5 - 0{,}12) - 4{,}66(2{,}5 - 0{,}12) = 0$$

da qual $$T = 19{,}61 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Igualando os somatórios das forças nas direções x e y a zero tem-se

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad A_x - 19{,}61\cos 25° = 0 \qquad A_x = 17{,}77 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad A_y + 19{,}61 \operatorname{sen} 25° - 4{,}66 - 10 = 0 \qquad A_y = 6{,}37 \text{ kN}$$

$$[A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}] \qquad A = \sqrt{(17{,}77)^2 + (6{,}37)^2} = 18{,}88 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

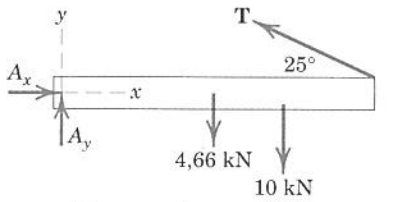


Diagrama de corpo livre

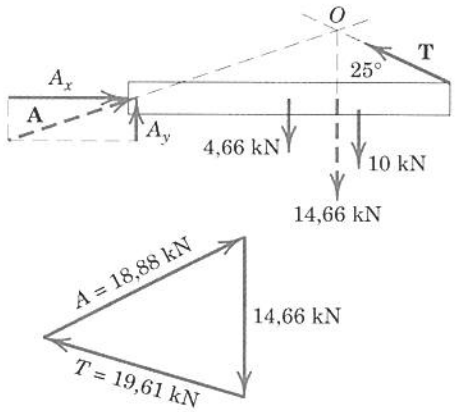
Solução gráfica. O princípio de que três forças em equilíbrio devem ser concorrentes é utilizado para uma solução gráfica, combinando as duas forças verticais conhecidas de 4,66 kN e 10 kN em uma única força de 14,66 kN, localizada como mostrado no diagrama de corpo livre modificado da viga, na figura de baixo. A posição dessa carga resultante pode ser facilmente determinada gráfica ou algebricamente. A interseção da força de 14,66 kN com a linha de ação da força trativa incógnita $\mathbf{T}$ define o ponto de concorrência O pelo qual a força de reação $\mathbf{A}$, do pino, deve passar. Os módulos desconhecidos de $\mathbf{T}$ e $\mathbf{A}$ podem ser agora determinados, somando-se as forças em seqüência para formar o polígono fechado de forças em equilíbrio, satisfazendo assim a soma vetorial igual a zero. Após a força vertical conhecida ser representada em uma escala conveniente, como mostrado na parte inferior da figura, uma linha representando a direção dada da força trativa $\mathbf{T}$ é construída a partir da extremidade do vetor de 14,66 kN. Do mesmo modo, uma linha representando a direção da força de reação $\mathbf{A}$ do pino, determinada a partir da concorrência estabelecida com diagrama de corpo livre, é construída passando pelo ponto de partida do vetor de 14,66 kN. A interseção das linhas representando os vetores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{A}$ estabelece os módulos de T e de A necessários para fazer a soma vetorial das forças valer zero. Esses módulos são medidos do diagrama. As componentes x e y de $\mathbf{A}$ podem, se desejado, ser construídas no polígono de forças.

Sugestões Úteis

① A justificativa para esse passo é o teorema de Varignon, explicado na Seção 2/4. Esteja pronto para tirar vantagem desse princípio freqüentemente.

② O cálculo dos momentos em problemas bidimensionais é geralmente mais simples de realizar usando álgebra escalar do que pelo produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Em três dimensões, como veremos posteriormente, o inverso é freqüentemente verdade.

③ Se desejado, a direção da força em A poderia ser facilmente calculada. Entretanto, ao projetar o pino A ou ao verificar sua resistência, é apenas o módulo da força que importa.



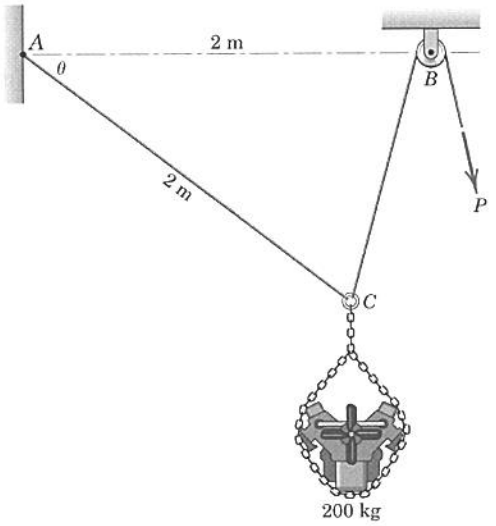
Solução gráfica

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

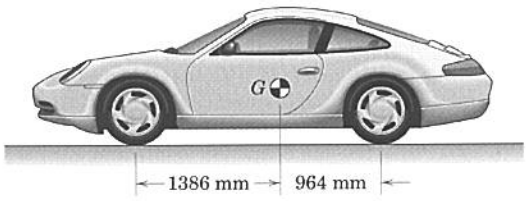
3/1 Determine a força P necessária para manter o motor de 200 kg na posição para a qual $\theta = 30°$. O diâmetro da polia em B é desprezível.

Resp. $P = 1759$ N



Problema 3/1

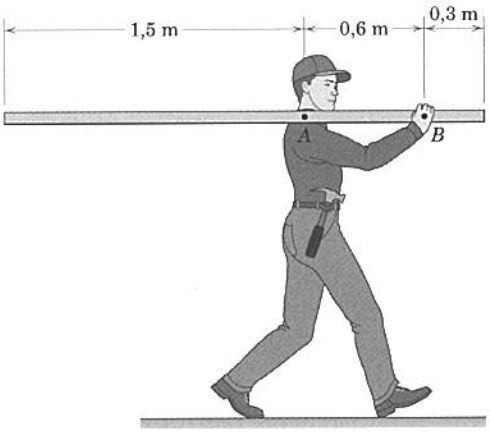
3/2 O centro de massa G do carro de motor traseiro e com 1400 kg está localizado como mostrado na figura. Determine a força normal sob cada pneu quando o carro está em equilíbrio. Descreva qualquer hipótese feita.



Problema 3/2

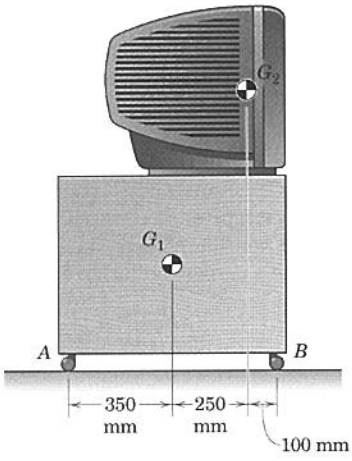
3/3 Um carpinteiro carrega uma tábua uniforme com 6 kg, como mostrado. Qual é o valor da força direcionada para baixo que ele sente em seu ombro em A?

Resp. $N_A = 88{,}3$ N



Problema 3/3

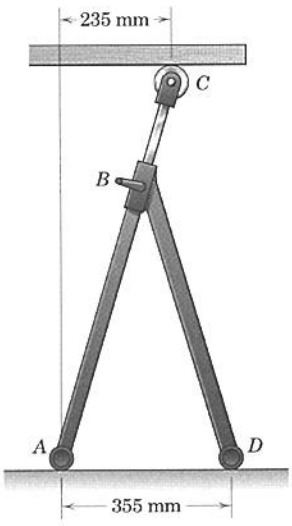
3/4 Na vista lateral de um televisor de 70 kg apoiado em uma estante de 24 kg, os centros de massa estão marcados como G_1 e G_2. Determine as forças de reação em A e B. (Note que o centro de massa da maioria dos televisores é localizado bem à frente devido ao peso da parte da frontal dos tubos de imagem.)



Problema 3/4

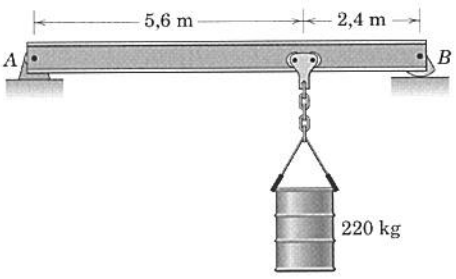
3/5 O suporte deslizante é usado para apoiar partes de chapas longas enquanto elas são cortadas por uma serra de bancada. Se a chapa exerce uma force direcionada para baixo de 25 N no rolete C, determine as reações verticais em A e D. Note que a conexão em B é rígida e que os pés A e D são tubos horizontais razoavelmente longos, com recobrimento antideslizante.

Resp. $N_A = 8{,}45$ N, $N_D = 16{,}55$ N



Problema 3/5

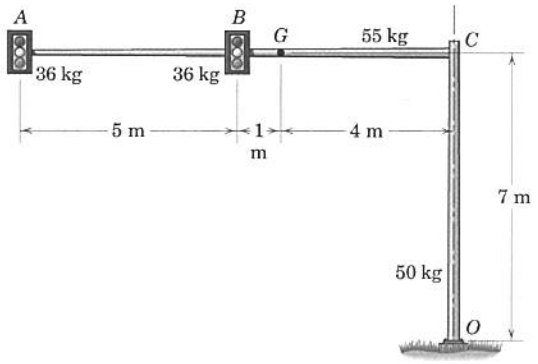
3/6 A viga em I uniforme e com 450 kg sustenta a carga mostrada. Determine as reações nos apoios.



Problema 3/6

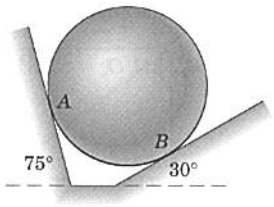
3/7 Calcule as forças e o momento de reação na base aparafusada O da estrutura de sinal de trânsito suspenso. Cada sinal tem uma massa de 36 kg, enquanto as massas dos elementos OC e AC são 50 e 55 kg, respectivamente.

Resp. $O_x = 0$, $O_y = 1736$ N, $M_O = 7460$ N · m no sentido horário



Problema 3/7

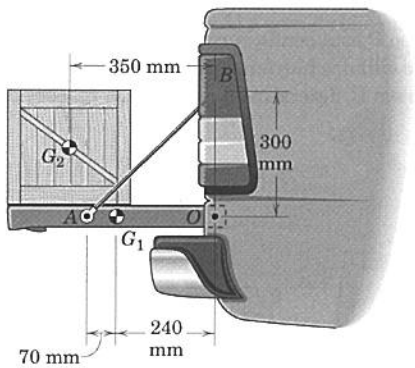
3/8 A esfera lisa e homogênea de 20 kg está apoiada nos dois planos inclinados como mostrado. Determine as forças de contato em A e B.



Problema 3/8

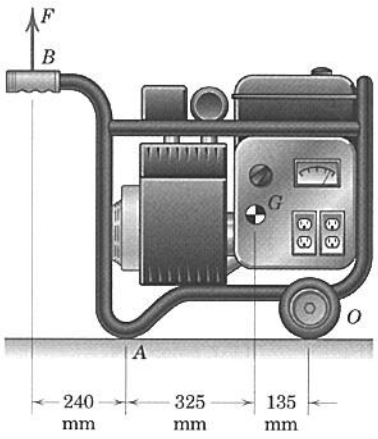
3/9 Um caixote de 54 kg está apoiado na porta de 27 kg da caçamba de uma picape. Calcule a força trativa T em cada um dos dois cabos de sustentação, um dos quais é mostrado. Os centros de gravidade estão em G_1 e G_2. O caixote está localizado a meia distância entre os dois cabos.

Resp. $T = 577$ N



Problema 3/9

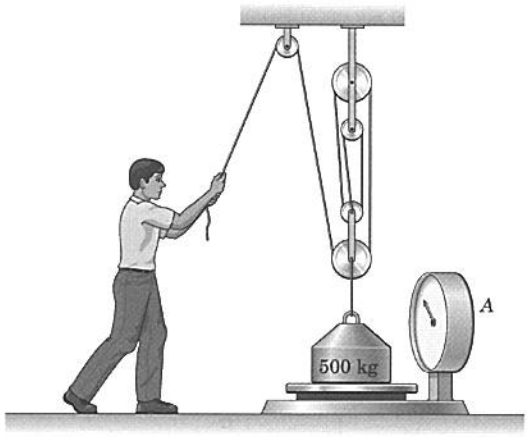
3/10 Um gerador elétrico portátil tem uma massa de 160 kg, com centro de massa em G. Determine a força direcionada para cima F necessária para reduzir a força normal em A para metade do seu valor nominal (quando $F = 0$).



Problema 3/10

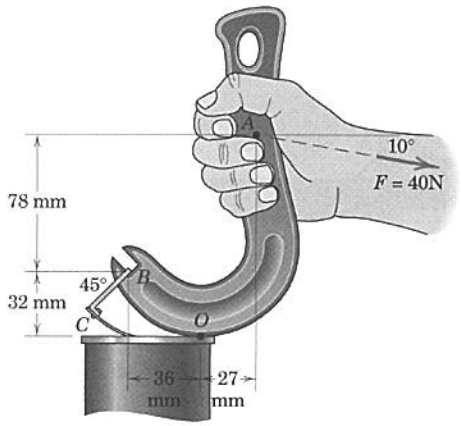
3/11 Que força de módulo T deve a pessoa aplicar no cabo, para fazer com que a leitura na balança A seja de 2000 N? Os pesos das polias e cabos são desprezíveis. Descreva qualquer hipótese feita.

Resp. $T = 581$ N



Problema 3/11

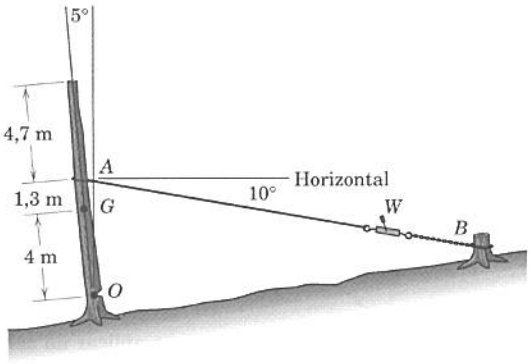
3/12 A ferramenta mostrada é projetada para ajudar a remover tampas de latas com argolas. Se o usuário exerce uma força de 40 N em A, determine a força trativa T na parte BC da argola.



Problema 3/12

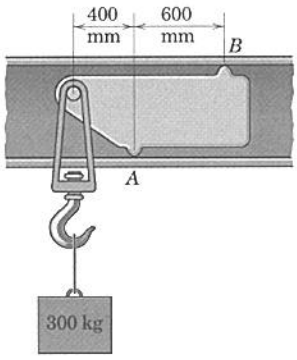
3/13 Um lenhador deseja fazer o tronco da árvore cair para cima do morro, apesar do tronco estar inclinado para baixo. Com a ajuda do guincho W, qual será a força trativa T necessária no cabo? O tronco de 600 kg tem centro de massa em G. O corte em O é suficientemente profundo, de modo que o momento de reação nesse ponto é desprezível.

Resp. $T = 401$ N



Problema 3/13

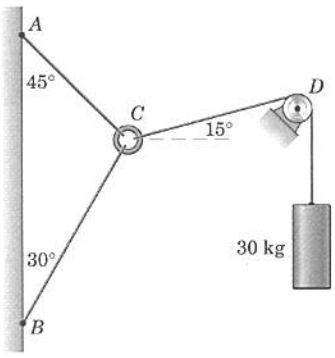
3/14 Para facilitar a mudança de posição de um gancho para levantar carga quando ele está descarregado, usa-se o suporte deslizante mostrado. Os ressaltos em A e B se prendem aos flanges de uma viga caixão quando uma carga é aplicada, e o gancho se projeta através de uma fenda horizontal na viga. Calcule as forças em A e B quando o gancho sustenta uma massa de 300 kg.



Problema 3/14

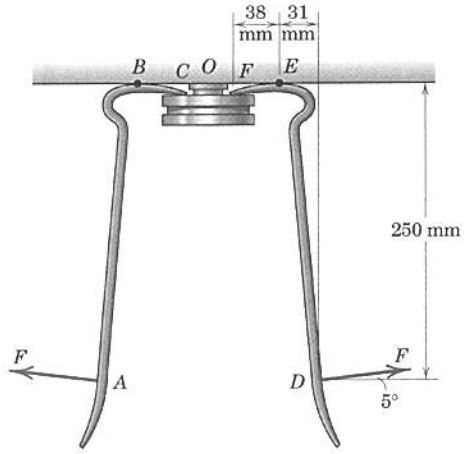
3/15 Três cabos estão unidos no anel de junção C. Determine as forças trativas nos cabos AC e BC causadas pelo peso do cilindro de 30 kg.

Resp. $T_{AC} = 215$ N, $T_{BC} = 264$ N



Problema 3/15

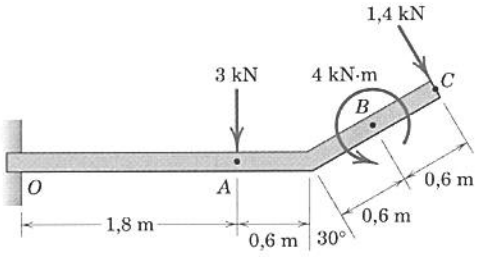
3/16 Uma força axial de 700 N é necessária para remover a polia de seu eixo. Que força F deve ser exercida nos cabos dos dois pés-de-cabra? O atrito nos pontos de contato B e E é suficiente para impedir deslizamento; o atrito nos pontos de contato C e F com a polia é desprezível.



Problema 3/16

3/17 A viga uniforme tem massa de 50 kg por metro de comprimento. Calcule as reações no apoio O. As cargas mostradas estão em um plano vertical.

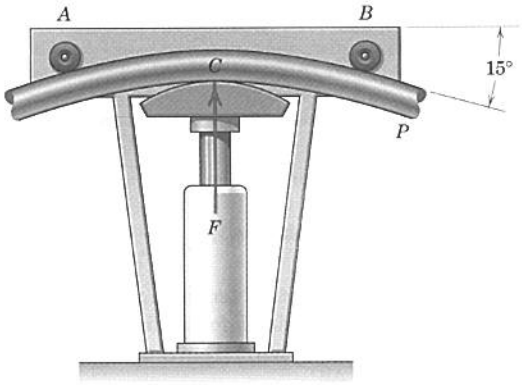
Resp. $O_x = -0{,}7$ kN, $O_y = 5{,}98$ kN, $M_O = 9{,}12$ kN · m



Problema 3/17

Problemas Representativos

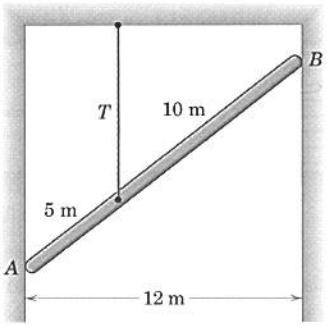
3/18 Um tubo P está sendo curvado pela calandra de tubos, como mostrado. Se o cilindro hidráulico aplica uma força com módulo F = 24 kN ao tubo em C, determine o módulo das reações dos roletes em A e B.



Problema 3/18

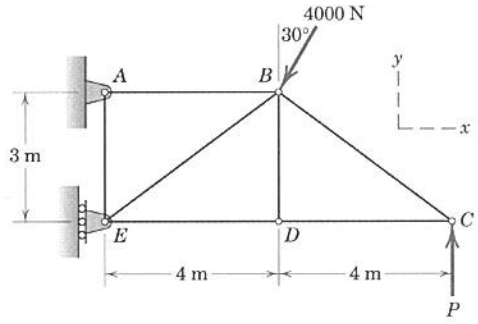
3/19 O poste uniforme com 15 m de comprimento tem uma massa de 150 kg e está apoiado em suas extremidades lisas contra as paredes verticais e sustentado pela força trativa T do cabo vertical. Calcule as reações em A e B.

Resp. $A = B = 327$ N



Problema 3/19

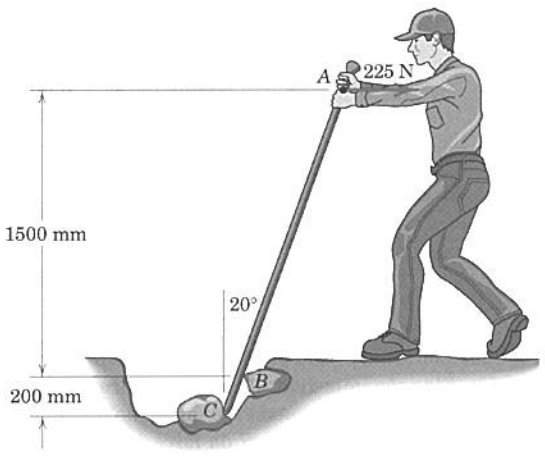
3/20 Determine as reações em A e E se $P = 500$ N. Qual é o valor máximo que P pode ter para haver equilíbrio estático? Despreze o peso da estrutura comparado às cargas aplicadas.



Problema 3/20

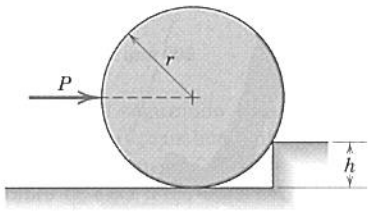
3/21 Ao cavar um pequeno buraco antes de plantar uma árvore, uma pessoa encontra algumas pedras. Se ela exerce uma força horizontal de 225 N na alavanca, como mostrado, qual é a força horizontal exercida na pedra C? Note que uma pequena reentrância na pedra C suporta uma força de reação vertical nesse ponto. Despreze o atrito em B. Complete as soluções *(a)* incluindo e *(b)* excluindo o peso da alavanca de 18 kg.

Resp. (a) $F_C = 1705$ N, *(b)* $F_C = 1464$ N



Problema 3/21

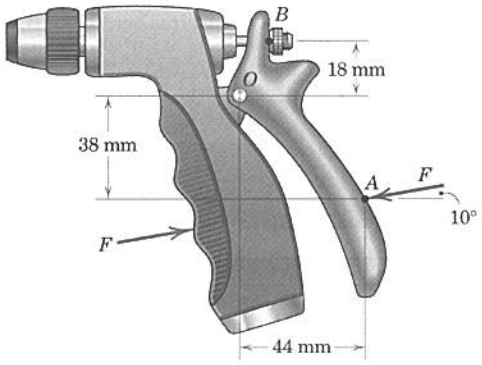
3/22 Determine a força P necessária para começar a rolar o cilindro uniforme de massa m sobre o degrau de altura h.



Problema 3/22

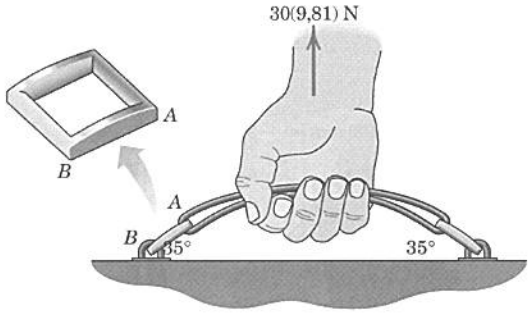
3/23 Uma força axial de 35 N em B é necessária para abrir o êmbolo acionado por mola da pistola d'água. Determine a força necessária F a ser aplicada ao manete em A e o módulo da reação no pino em O. Note que o êmbolo passa por um furo alongado na vertical em B, de forma que a força vertical transmitida nesse ponto é desprezível.

Resp. $F = 13{,}98$ N, $O = 48{,}8$ N



Problema 3/23

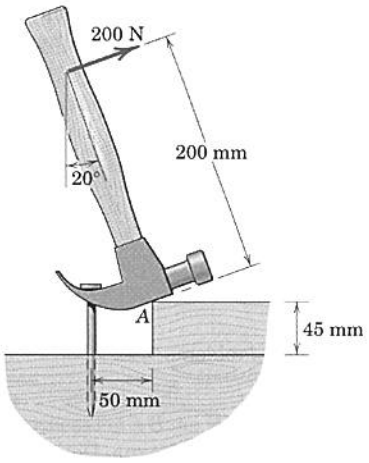
3/24 Uma pessoa segura uma mala de 30 kg pela alça como indicado na figura. Determine a força trativa em cada uma das quatro argolas idênticas AB.



Problema 3/24

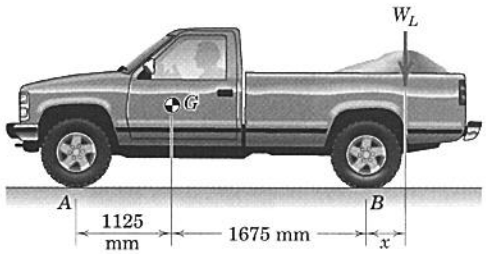
3/25 A colocação de um bloco sob a cabeça de um martelo, como mostrado, facilita muito a extração do prego. Se um puxão de 200 N no cabo do martelo for necessário para puxar o prego, calcule a força trativa T no prego e o módulo A da força exercida pela cabeça do martelo no bloco. As superfícies de contato em A são suficientemente ásperas para prevenir escorregamento.

Resp. $T = 800$ N, $A = 755$ N



Problema 3/25

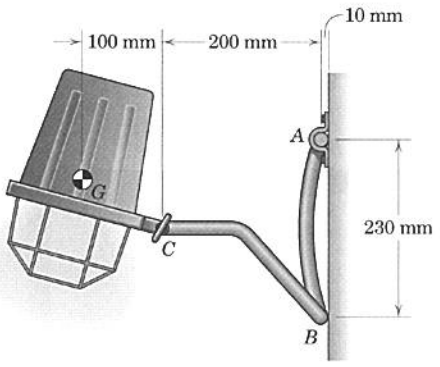
3/26 A posição indicada para o centro de massa da caminhonete de 1600 kg é para quando ela está descarregada. Se uma carga cujo centro de massa fica em $x = 400$ mm atrás do eixo traseiro for colocada na caminhonete, determine a massa m_L para a qual as forças normais sob as rodas dianteiras e traseiras serão iguais.



Problema 3/26

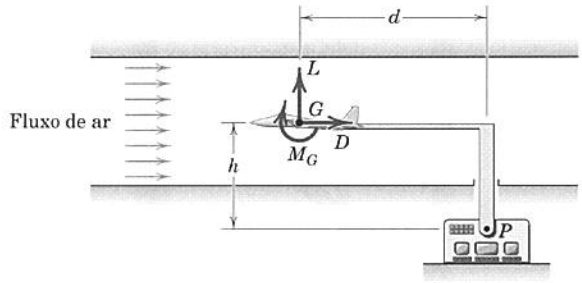
3/27 A luminária de parede de 2,5 kg tem seu centro de massa em G. Determine as reações em A e B e também calcule o momento suportado pelo parafuso de ajuste em C. (Note que a estrutura leve ABC tem cerca de 250 mm de tubo, orientado para dentro e para fora do papel, tanto em A quanto em B.)

Resp. $B_x = 32{,}0$ N
$A_x = 32{,}0$ N, $A_y = 24{,}5$ N
$M_C = 2{,}45$ N · m no sentido horário.



Problema 3/27

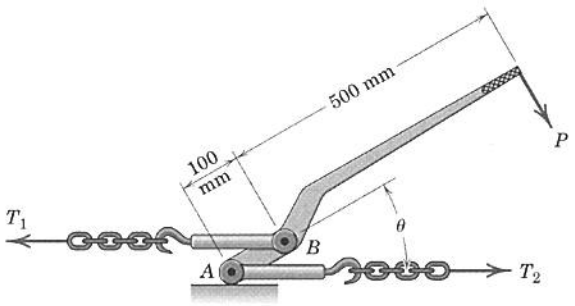
3/28 Para comprovar a validade das hipóteses aerodinâmicas feitas no projeto de um avião, seu modelo está sendo testado em um túnel de vento. O suporte está conectado a um dispositivo para equilibrar forças e momentos, que é zerado quando não existe fluxo de ar. Sob as condições de teste o empuxo vertical L, o arraste D e o momento de arfagem M_G atuam como mostrado. O dispositivo de equilíbrio marca o empuxo, o arraste e o momento M_P. Determine M_G em função de L, D e M_P.



Problema 3/28

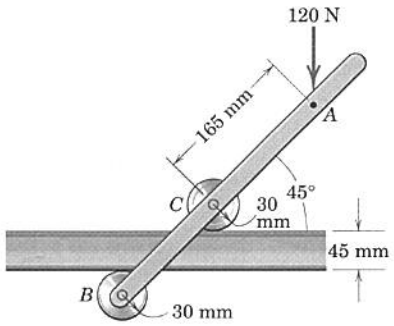
3/29 O conector de correntes é utilizado para segurar cargas de troncos, madeira, tubos e congêneres. Se a força trativa T_1 vale 2 kN quando $\theta = 30°$, determine a força P necessária na alavanca e a força trativa correspondente T_2 para essa posição. Admita que a superfície sob A é perfeitamente lisa.

Resp. $P = 166{,}7$ N, $T_2 = 1{,}917$ kN



Problema 3/29

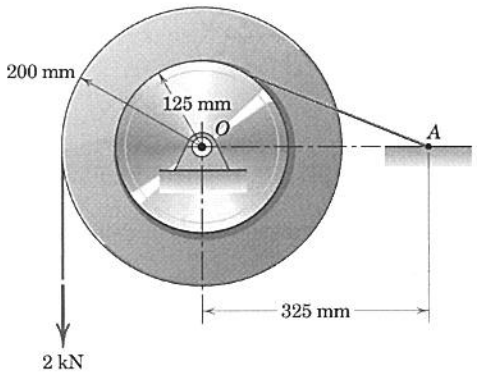
3/30 O dispositivo mostrado é projetado para aplicar pressão dos dois lados de uma bancada, durante a colagem do laminado próximo à borda. Se uma força de 120 N é aplicada à barra, determine força que cada rolete exerce sobre a sua superfície correspondente.



Problema 3/30

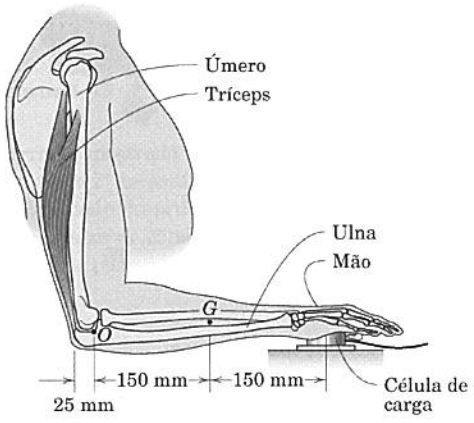
3/31 As duas polias leves são presas uma à outra e formam uma unidade única. Elas são impedidas de girar em torno de seu mancal em O por um cabo enrolado firmemente em torno da polia menor e preso ao ponto A. Calcule o módulo R da força suportada pelo mancal em O para a carga aplicada de 2 kN.

Resp. $R = 4{,}38$ kN



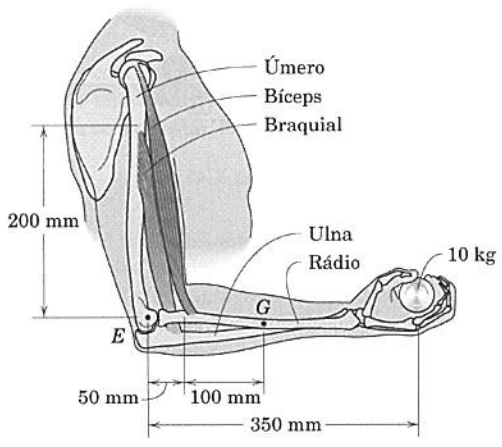
Problema 3/31

3/32 Em um procedimento para avaliar a resistência do músculo tríceps, uma pessoa força para baixo uma célula de carga com a palma da mão, como mostrado na figura. Se a leitura da célula de carga é de 160 N, determine a força trativa vertical F gerada pelo músculo tríceps. A massa do antebraço é 1,5 kg e tem centro de massa em G. Descreva qualquer hipótese feita.



Problema 3/32

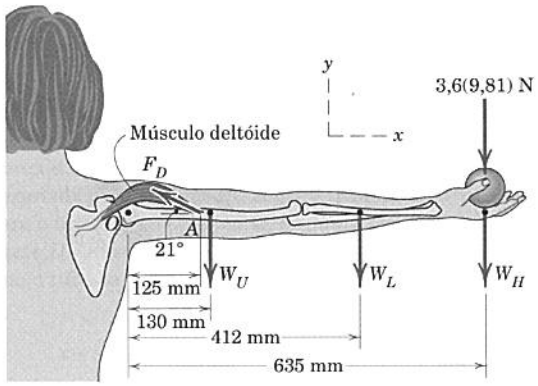
3/33 Uma pessoa está flexionando lentamente seu braço com um peso de 10 kg, como indicado na figura. O grupo de músculos braquiais (formado pelos músculos bíceps e braquial) é o principal fator nesse exercício. Determine o módulo F da força do grupo de músculos braquiais e o módulo E da reação do cotovelo no ponto E, para a posição do antebraço mostrada na figura. Use as dimensões mostradas para localizar os pontos efetivos de aplicação dos dois grupos de músculos; esses pontos estão 200 mm diretamente acima de E e 50 mm diretamente à direita de E. Inclua o efeito da massa de 1,5 kg do antebraço, que tem centro de massa no ponto G. Descreva qualquer hipótese feita.



Problema 3/33

Resp. $F = 753$ N, $E = 644$ N

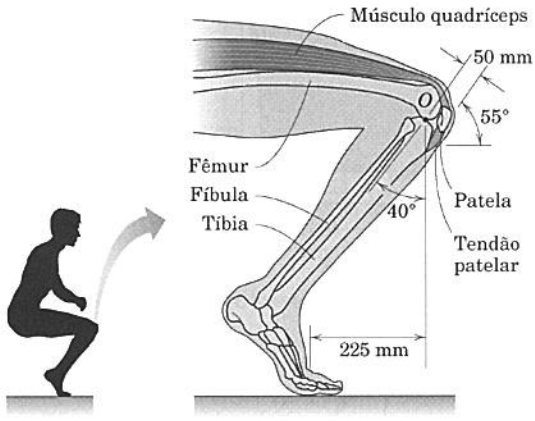
3/34 Uma mulher está segurando uma esfera de 3,6 kg em sua mão, mantendo todo seu braço na horizontal, como mostrado na figura. Uma força trativa no músculo deltóide impede o braço de girar em torno do ombro O; essa força atua no ângulo de 21° mostrado. Determine a força exercida pelo músculo deltóide no braço, em A, e as componentes x e y da força de reação no ombro, em O. A massa do braço é $m_U = 1{,}9$ kg, a massa do antebraço é $m_L = 1{,}1$ kg e a massa da mão é $m_H = 0{,}4$ kg; com os pesos correspondentes atuando nas posições mostradas na figura.



Problema 3/34

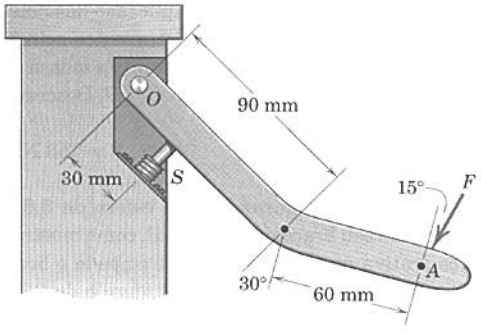
3/35 Com seu peso W igualmente distribuído em ambos os pés, um homem começa a levantar-se lentamente da posição de cócoras como indicado na figura. Determine a força trativa F no tendão patelar e o módulo da força de reação no ponto O, que é a área de contato entre a tíbia e o fêmur. Observe que a linha de ação da força do tendão patelar ocorre ao longo de sua mediatriz. Despreze o peso da parte inferior da perna.

Resp. $F = 2{,}25W$, $O = 2{,}67W$



Problema 3/35

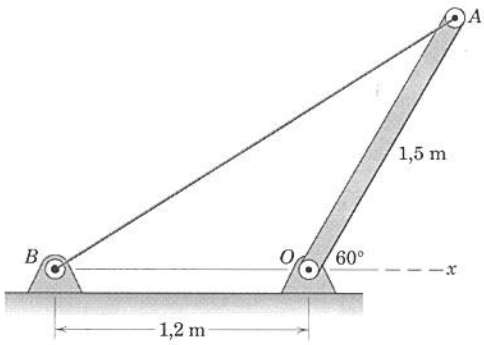
3/36 Os elementos de um mecanismo liga-desliga de uma luminária de bancada são mostrados na figura. O interruptor S requer uma força de 4 N para ser pressionado. Que força correspondente F deve ser exercida na alavanca em A?



Problema 3/36

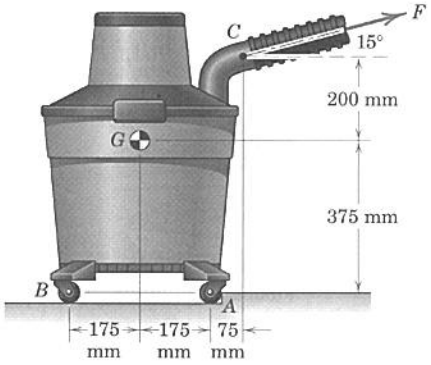
3/37 A barra uniforme OA com 18 kg é mantida na posição mostrada por um pino liso em O e pelo cabo AB. Determine a força trativa T no cabo e o módulo e a direção da reação externa no pino em O.

Resp. $T = 99{,}5$ N, $O = 246$ N, 70,3° no sentido anti-horário a partir do eixo x



Problema 3/37

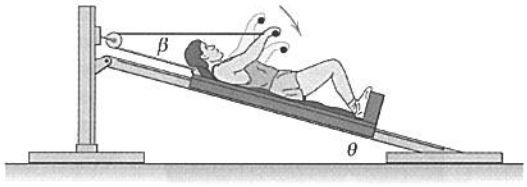
3/38 Uma pessoa tenta deslocar um aspirador de pó de 20 kg puxando pela mangueira, como indicado. Se a roda A está obstruída, que força fará com que a unidade tombe no sentido horário?



Problema 3/38

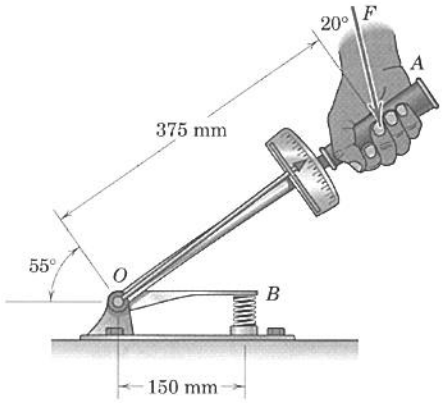
3/39 O equipamento de ginástica foi projetado com um carrinho leve, que está montado sobre pequenos rolamentos, de modo que ele se move livremente pela rampa inclinada. Dois cabos estão presos ao carrinho – um para cada mão. Se as mãos estão juntas, de modo que os cabos estão paralelos e se cada cabo está essencialmente em um plano vertical, determine a força P que cada mão deve exercer sobre o seu cabo para manter uma posição de equilíbrio. A massa da pessoa é 70 kg, o ângulo θ da rampa é 15°, e o ângulo β é 18°. Além disso, calcule a força R que a rampa exerce sobre o carrinho.

Resp. $P = 45{,}5$ N, $R = 691$ N



Problema 3/39

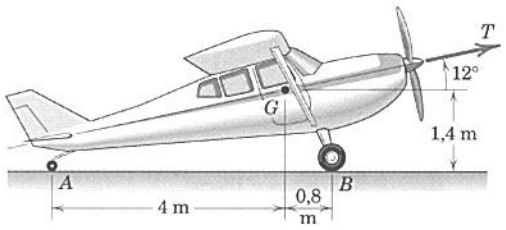
3/40 O dispositivo mostrado é usado para testar molas de válvulas de motores de automóvel. A chave de torque está diretamente conectada ao braço OB. A especificação para a mola da válvula de admissão do automóvel é que 370 N de força devem reduzir seu comprimento de 50 mm (comprimento não tensionado) para 42 mm. Qual é a leitura correspondente M na chave de torque, e que força F exercida no cabo da chave de torque é necessária para produzir essa leitura? Despreze os pequenos efeitos de mudanças na posição angular do braço OB.



Problema 3/40

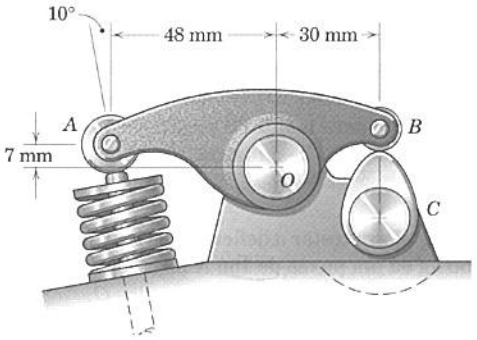
3/41 Durante um teste de motor no solo, um empuxo $T = 3000$ N é gerado sobre o avião de 1800 kg e com centro de massa em G. As rodas principais em B estão bloqueadas e não deslizam; a pequena roda sob a cauda em A não tem freio. Calcule a variação percentual n nas forças normais em A e B quando comparadas com os seus valores quando o motor do avião está desligado.

Resp. $n_A = -32{,}6\%$, $n_B = 2{,}28\%$



Problema 3/41

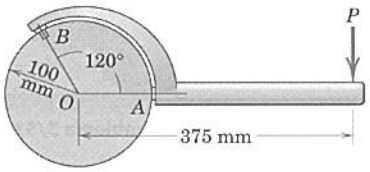
3/42 Um braço oscilante com roletes em A e B é mostrado na posição em que a válvula está aberta e a mola da válvula está totalmente comprimida. Nessa posição, a força na mola vale 900 N. Determine a força que o braço oscilante exerce no eixo de cames em C. Calcule também o módulo da força suportada pelo eixo do braço oscilante O.



Problema 3/42

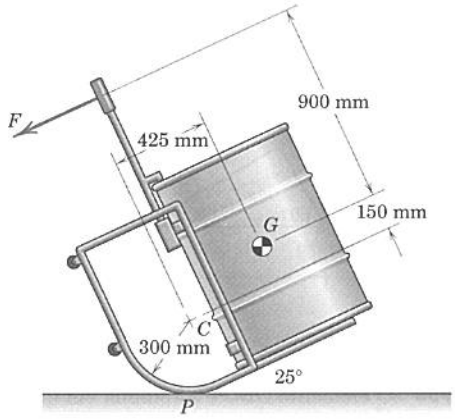
3/43 A chave de gancho é usada para girar eixos ou colares. Se um momento de 80 N · m é necessário para girar o colar de 200 mm de diâmetro em torno de seu centro O sob a ação da força aplicada P, determine a força de contato R sobre a superfície lisa em A. A fixação do pino em B pode ser considerada como ocorrendo na periferia do colar.

Resp. $R = 1047$ N



Problema 3/43

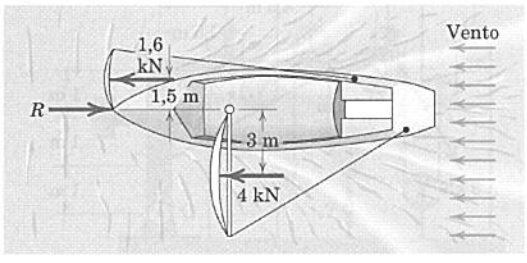
3/44 O carrinho mostrado é útil para manusear tambores grandes. Determine a força F necessária para manter um tambor na posição mostrada. Você pode desprezar o peso do carrinho em comparação com o peso do tambor de 250 kg, cujo centro de massa está em G. Existe atrito suficiente para impedir deslizamento no ponto de contato P.



Problema 3/44

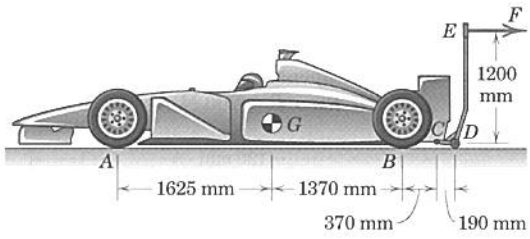
3/45 Ao velejar com o vento a uma velocidade constante, o veleiro é impulsionado por uma força de 4 kN em sua vela principal e uma força de 1,6 kN em sua vela de estai, como mostrado. A resistência total devida ao atrito pela água é a força R. Determine a resultante das forças laterais perpendiculares ao movimento, impostas ao casco pela água.

Resp. $M = 9{,}6$ kN · m



Problema 3/45

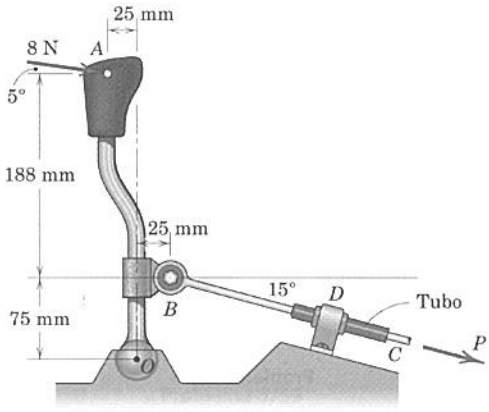
3/46 Estime a força F necessária para levantar do chão os pneus traseiros do carro de corrida. Você pode assumir que a parte CD do macaco é horizontal. A massa combinada do carro e do motorista é 700 kg com centro de massa em G. O motorista pisa nos freios durante o levantamento. Apresente quaisquer suposições adicionais.



Problema 3/46

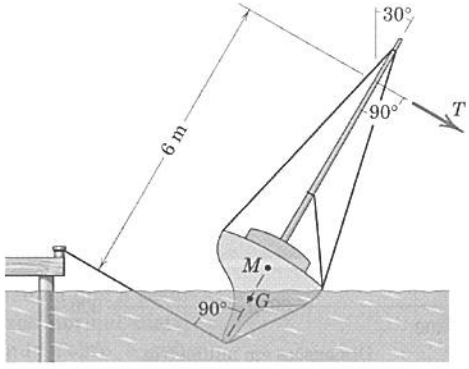
3/47 Uma parte do mecanismo de troca de marcha para um carro com transmissão manual está mostrada na figura. Para a força de 8 N exercida na alavanca de câmbio, determine a força P correspondente exercida pela conexão BC sobre a transmissão (não mostrada). Despreze o atrito na rótula em O, na junta em B e no tubo próximo ao suporte D. Observe que uma bucha de borracha macia em D permite que o tubo se mantenha alinhado com a conexão BC.

Resp. $P = 26{,}3$ N



Problema 3/47

3/48 O pequeno barco a vela pode ser inclinado quando preso às docas, como mostrado, para se realizar reparos abaixo da linha

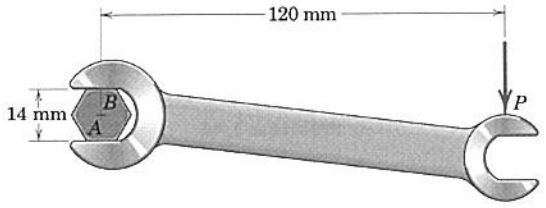


Problema 3/48

d'água. Uma corda é passada sob a quilha e presa à doca. Outra corda é presa ao mastro e usada para inclinar o barco. O barco mostrado tem um deslocamento (que é igual à massa total) de 5000 kg, com centro de massa em G. O metacentro M é o ponto na mediatriz do barco pelo qual passa a resultante vertical das forças de flutuação, e $\overline{GM}$ = 0,8 m. Calcule a força trativa T necessária para manter o barco na posição mostrada.

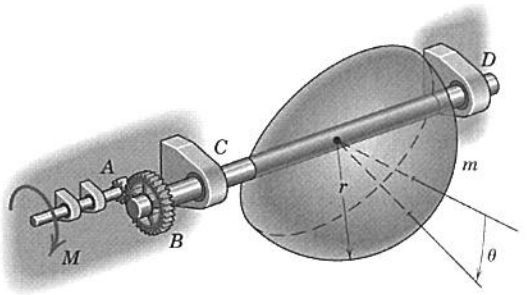
3/49 Um torque de 24 N · m é necessário para girar o parafuso em torno de seu eixo. Determine P e as forças entre as paredes endurecidas e lisas da chave e os vértices A e B da cabeça hexagonal do parafuso. Considere que a chave se ajusta facilmente no parafuso, de modo que o contato é feito apenas nos vértices A e B.

Resp. P = 200 N, A = 2870 N, B = 3070 N



Problema 3/49

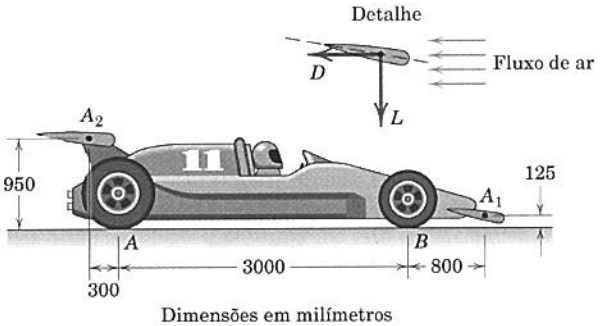
3/50 Determine o momento M que deve ser aplicado ao eixo de forma a manter o hemisfério homogêneo em uma posição angular arbitrária, medida pelo ângulo θ. Os raios das engrenagens A, B e do hemisfério são r_A, r_B e r, respectivamente. Assuma que o atrito em todos mancais é desprezível.



Problema 3/50

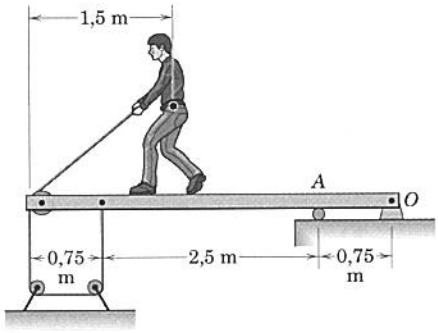
3/51 O carro completo, com seu motorista, tem uma massa de 815 kg e, sem os dois aerofólios, tem uma distribuição de peso igual (50%-50%) entre a dianteira e a traseira em uma dada velocidade na qual o carro não sofre empuxo para cima. Estima-se que nessa velocidade cada um dos aerofólios, A_1 e A_2, vai gerar 2 kN de força direcionada para baixo, L, e 250 N de força de arraste D sobre o carro. Especifique, nessa velocidade, as reações verticais N_A e N_B sob os dois pares de rodas quando os aerofólios forem colocados. Considere que a colocação dos aerofólios não afeta as condições de arraste e de empuxo para cima no carro e que o motor tem potência suficiente para manter o equilíbrio nessa velocidade. O peso do aerofólio pode ser desprezado.

Resp. N_A = 5750 N (48,0%), N_B = 6240 N (52,0%)



Problema 3/51

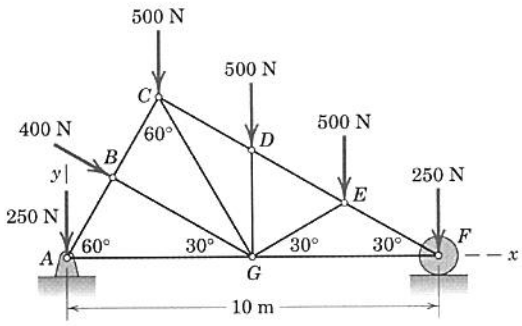
3/52 Para testar a deflexão da viga uniforme de 100 kg, o garoto de 50 kg dá um puxão de 150 N na corda, como mostrado. Calcule a força suportada pelo pino na dobradiça O.



Problema 3/52

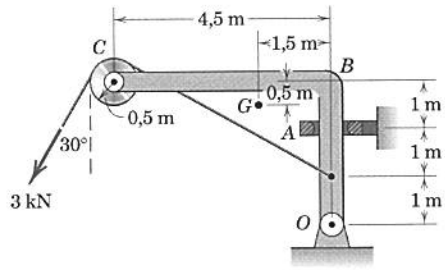
3/53 Determine as reações externas em A e F para a treliça de um telhado carregada como mostrado. As cargas verticais representam o efeito de sustentação dos materiais do telhado, enquanto a força de 400 N representa uma carga devida ao vento.

Resp. A_x = 346 N, A_y = 1100 N, F_y = 1100 N



Problema 3/53

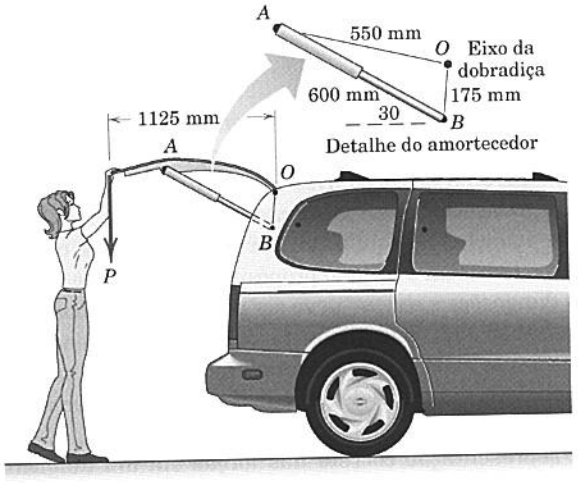
3/54 O elemento OBC e a roldana em C, juntos, têm uma massa de 500 kg, com um centro de massa combinado em G. Calcule o módulo da força suportada pela conexão de pino em O quando a carga de 3 kN é aplicada. O colar em A só pode dar apoio na direção horizontal.



Problema 3/54

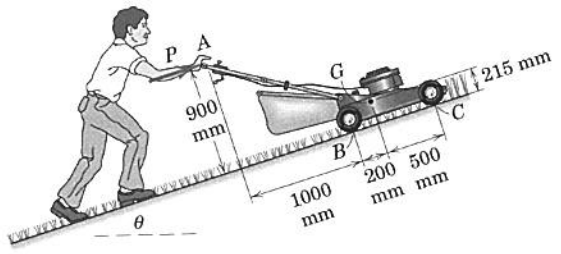
3/55 É desejável que uma pessoa seja capaz de iniciar o fechamento da porta do bagageiro de uma van, desde a posição aberta mostrada, com uma força vertical P de 40 N . Como um exercício de projeto, determine a força necessária em cada um dos amortecedores hidráulicos AB. O centro de massa da porta de 40 kg está 37,5 mm diretamente abaixo do ponto A. Trate o problema como bidimensional.

Resp. $F = 803$ N



Problema 3/55

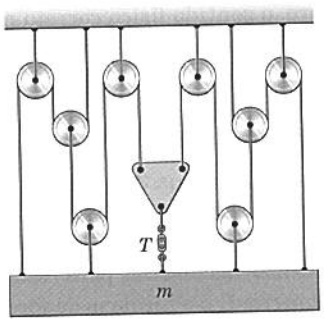
3/56 O homem empurra o cortador de grama a uma velocidade constante, com uma força P que é paralela ao plano inclinado. A massa do cortador, com o saco de grama preso a ele, é de 50 kg e tem centro de massa em G. Se $\theta = 15°$, determine as forças normais N_B e N_C sob cada par de rodas B e C. Despreze o atrito. Compare o resultado com as forças normais para as condições com $\theta = 0°$ e $P = 0$.



Problema 3/56

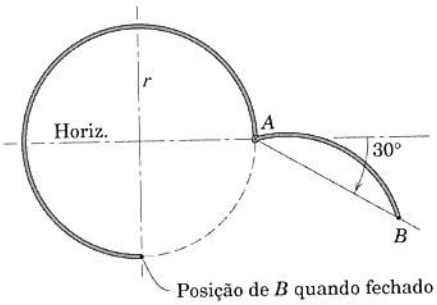
3/57 Determine a força trativa T no parafuso tensor do sistema polia-cabo em termos da massa m do corpo que ele sustenta. Despreze a massa das polias e do cabo.

Resp. $T = 2/7mg$



Problema 3/57

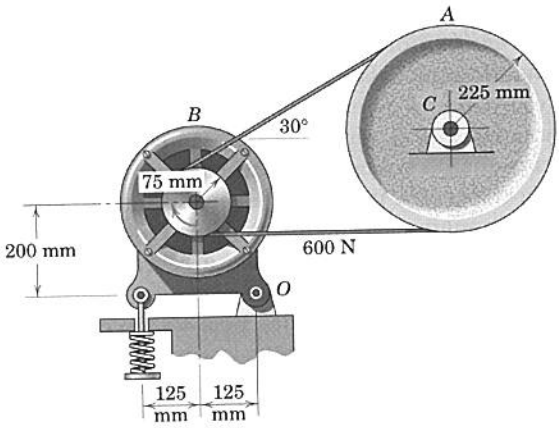
3/58 A porta de carga de um avião com fuselagem circular consiste de um segmento uniforme AB de um quarto de círculo e massa m. Uma trava na dobradiça em A mantém a porta aberta na posição mostrada. Determine o momento exercido pela dobradiça sobre a porta.



Problema 3/58

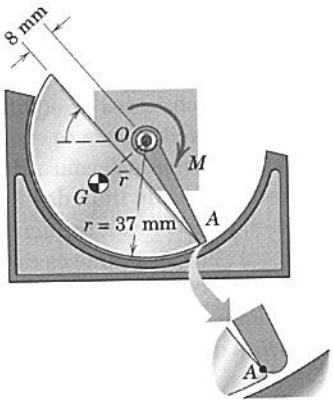
3/59 A polia A transfere um torque constante de 100 N · m para uma bomba por intermédio de seu eixo em C. A força trativa no lado de baixo da correia vale 600 N. O motor B tem uma massa de 100 kg e gira no sentido horário. Como um dado a ser considerado no projeto, determine o módulo R da força no pino de sustentação em O.

Resp. $R = 1{,}167$ kN



Problema 3/59

3/60 Alguns elementos do sistema de fazer gelo de um refrigerador estão mostrados na figura. (Um "cubo" tem a forma de um segmento cilíndrico!) Uma vez que o cubo congela e um pequeno aquecedor (não mostrado) forma um filme fino de água entre o cubo e superfície de apoio, um motor gira o braço ejetor AO para remover o cubo. Se existem oito cubos e oito braços, determine o torque necessário M em função de θ. A massa dos oito cubos é 0,25 kg e a distância do centro de massa $\bar{r} = 0{,}55r$. Despreze o atrito e assuma que a resultante da força normal distribuída atuando sobre o cubo passa pelo ponto O.



Problema 3/60

SEÇÃO B EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

3/4 Condições de Equilíbrio

Estenderemos agora os princípios e métodos desenvolvidos para o equilíbrio bidimensional ao caso do equilíbrio em três dimensões. Na Seção 3/1, as condições gerais para equilíbrio de um corpo foram expressas pelas Eqs. 3/1, que requerem que a resultante de força e a resultante dos momentos em um corpo em equilíbrio seja zero. Essas duas equações vetoriais de equilíbrio e suas componentes escalares podem ser escritas como

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases} \qquad (3/3)$$

As três primeiras equações escalares afirmam que não existe resultante de força atuando em um corpo em equilíbrio em qualquer das três direções coordenadas. O segundo grupo de três equações escalares expressa o requisito adicional para haver equilíbrio, afirmando que nenhuma resultante de momento atua sobre o corpo em relação a qualquer dos eixos coordenados ou em torno de eixos paralelos aos eixos coordenados. Essas seis equações são condições tanto necessárias quanto suficientes para haver equilíbrio total. Os eixos de referência podem ser arbitrariamente escolhidos, da maneira mais conveniente. A única restrição é a de que um sistema coordenado seguindo a regra da mão direita deve ser escolhido quando se usar notação vetorial.

As seis relações escalares das Eqs. 3/3 são condições independentes, pois cada uma delas pode ser válida sem as outras. Por exemplo, para um carro que acelera na direção x, em uma estrada plana e reta, a segunda lei de Newton nos diz que a força resultante sobre o carro é igual a sua massa vezes sua aceleração. Assim, $\Sigma F_x \neq 0$, mas as outras duas equações de equilíbrio de forças remanescentes são satisfeitas porque todas as outras componentes de aceleração valem zero. De modo semelhante, se o rotor do motor do carro em aceleração está girando com velocidade angular crescente em torno do eixo x, ele não está em equilíbrio rotacional em relação a esse eixo. Assim, apenas para o rotor, $\Sigma M_x \neq 0$ juntamente com $\Sigma F_x \neq 0$, mas as outras quatro equações de equilíbrio remanescentes para o rotor seriam satisfeitas para os eixos do seu centro de massa.

Ao aplicar-se a forma vetorial das Eqs. 3/3, expressamos inicialmente cada uma das forças em função dos vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Para a primeira equação, $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$, a soma vetorial será zero apenas se os coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ na expressão forem, respectivamente, zero. Quando cada um destes três somatórios é igualado a zero obtém-se, precisamente, as três equações de equilíbrio escalares, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma F_z = 0$.

Para a segunda equação, $\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$, onde o somatório de momentos pode ser feito em relação a qualquer ponto O conveniente, calculamos o momento de cada força pelo produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição a partir de O até qualquer ponto sobre a linha de ação da força $\mathbf{F}$. Assim, $\Sigma \mathbf{M} = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Quando os coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ na equação de momento resultante forem igualados a zero obtemos, respectivamente, as três equações escalares de momento $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$ e $\Sigma M_z = 0$.

Diagramas de Corpo Livre

Os somatórios nas Eqs. 3/3 incluem os efeitos de *todas* as forças sobre o corpo em consideração. Aprendemos no item anterior que o diagrama de corpo livre é o único método confiável para revelar todas as forças e momentos que devem ser incluídos em nossas equações de equilíbrio. Em três dimensões, o diagrama de corpo livre tem o mesmo propósito essencial que ele tem em duas dimensões e *sempre* deve ser desenhado. Temos a escolha de desenhar uma vista tridimensional do corpo isolado, com todas as forças externas representadas, ou desenhar as projeções ortogonais do diagrama de corpo livre. Ambas as representações estão ilustradas nos exemplos ao final deste item.

A representação correta das forças em um diagrama de corpo livre requer um conhecimento das características das superfícies de contato. Essas características foram descritas na Fig. 3/1 para os problemas bidimensionais e sua extensão aos problemas tridimensionais está representada na Fig. 3/8, para as situações mais comuns de transmissão de força. As representações nas Figs. 3/1 e 3/8 serão usadas na análise em três dimensões.

O propósito essencial de um diagrama de corpo livre é desenvolver um quadro confiável da ação física de todas as forças (e momentos, se existirem) agindo em um corpo. Assim, sempre que possível, é útil representar as forças em seu sentido físico correto. Dessa maneira, o diagrama de corpo livre torna-se um modelo mais próximo do problema físico real do que ele seria se as forças fossem arbitrariamente colocadas ou se fossem colocadas sempre com no mesmo sentido matemático atribuído aos eixos coordenados.

Por exemplo, no item 4 da Fig. 3/8, pode-se perceber que o sentido correto das incógnitas R_X e R_Y é oposto àqueles atribuídos aos eixos coordenados. Condições semelhantes se aplicam ao sentido dos vetores dos momentos, itens 5 e 6, onde pela regra da mão direita pode-se atribuir a eles um sentido oposto àquele das respectivas direções coordenadas. Nesse ponto, você deve reconhecer que uma resposta negativa para uma força incógnita, ou para um momento, indica, simplesmente, que sua ação física está no sentido oposto àquele atribuído no diagrama de corpo livre. Freqüentemente, é claro, o sentido físico correto não é sabido inicialmente, de modo que se torna necessário atribuir um sentido arbitrário no diagrama de corpo livre.

Categorias de Equilíbrio

A aplicação das Eqs. 3/3 recai em quatro categorias que podemos identificar com a ajuda da Fig. 3/9. Essas categorias diferem no número e tipo (força ou momento) de equações de equilíbrio independentes necessárias para resolver o problema.

Categoria 1, o equilíbrio de forças, todas concorrentes no ponto O, requer todas as três equações de força, mas nenhu-

ma equação de momento porque o momento das forças em torno de qualquer eixo que passe por O vale zero.

Categoria 2, o equilíbrio de forças que são concorrentes com uma linha, requer todas as equações, exceto a equação de momento em torno da linha de força, que é automaticamente satisfeita.

Categoria 3, o equilíbrio de forças paralelas, requer apenas uma equação de força, aquela na direção das forças (a direção x, como mostrado) e duas equações de momento em torno dos eixos (y e z) que são normais à direção das forças.

Categoria 4, o equilíbrio de um sistema geral de forças, requer todas as três equações de força e todas as três equações de momento.

As observações contidas nesses enunciados são geralmente bastante evidentes quando um dado problema está sendo resolvido.

MODELAGEM DA AÇÃO DE FORÇAS NA ANÁLISE TRIDIMENSIONAL

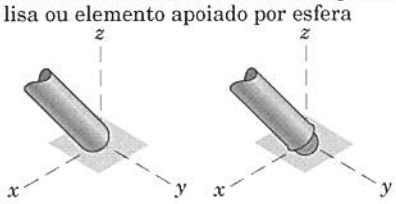
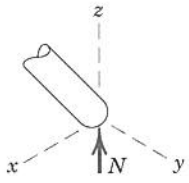
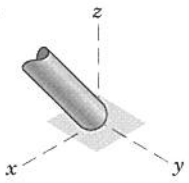
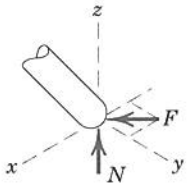
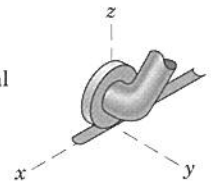
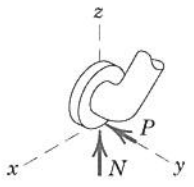
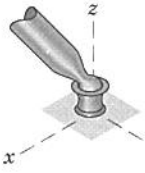
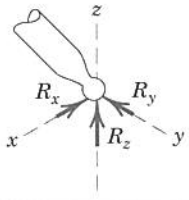
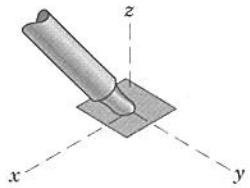
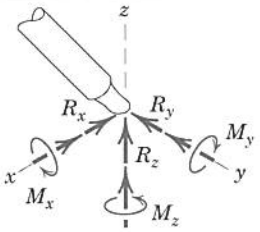
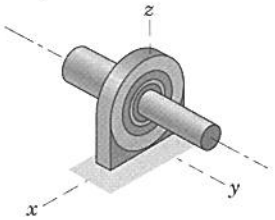
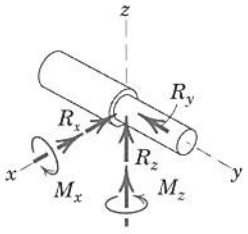
Tipo de Contato e Origem da Força	Ação no Corpo a Ser Isolado
1. Elemento em contato com uma superfície lisa ou elemento apoiado por esfera 	 A força deve ser normal à superfície e direcionada para o elemento.
2. Elemento em contato com uma superfície rugosa 	 Existe a possibilidade que uma força F tangente à superfície (força de atrito), como também uma força normal N, atuem no elemento.
3. Suporte com rolamento ou roda com restrição lateral 	 Além da força normal N, pode existir uma força lateral P exercida pela guia sobre a roda.
4. Rótula 	 Uma rótula livre para articular em torno do centro da esfera pode suportar uma força **R** com todas as suas três componentes.
5. Conexão fixa (engastada ou soldada) 	 Além das três componentes de força, uma conexão fixa pode suportar um momento **M**, representado por suas três componentes.
6. Suporte para mancal axial 	 O mancal axial é capaz de suportar uma força axial R_y, bem como forças radiais R_x e R_z. Os momentos M_x e M_z devem, em alguns casos, ser considerados nulos, a fim de tornar o sistema estaticamente determinado.

Figura 3/8

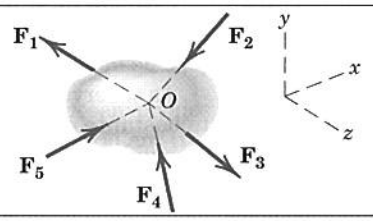
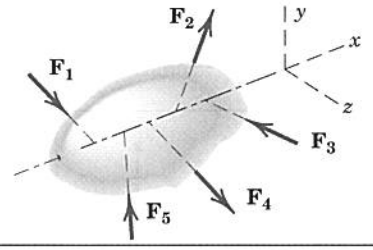
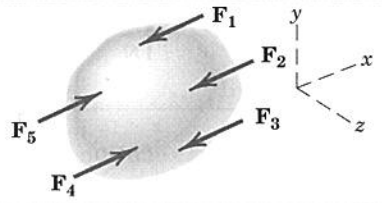
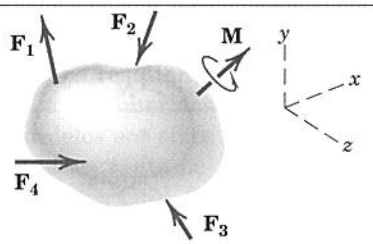
CATEGORIAS DO EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES		
Sistema de Forças	Diagrama de Corpo Livre	Equações Independentes
1. Concorrentes em um ponto		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$
2. Concorrentes com uma linha		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
3. Paralelas		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. Geral		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$

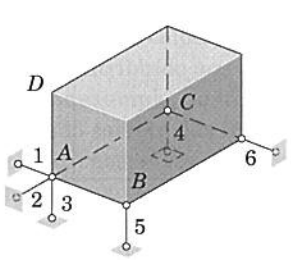
Figura 3/9

Restrições e Determinação Estática

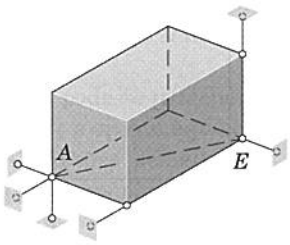
As seis relações escalares das Eqs. 3/3, embora dêem condições necessárias e suficientes para estabelecer equilíbrio, não dão necessariamente todas as informações precisas para calcular as forças incógnitas que atuam em uma situação de equilíbrio tridimensional. Novamente, como verificado para duas dimensões, a questão da adequação das informações é decidida pelas características das restrições impostas pelos apoios. Existe um critério analítico para determinar a adequação das restrições, mas ele está além do escopo deste livro. Na Fig. 3/10, entretanto, citamos quatro exemplos de condições de restrição para alertar o leitor sobre o problema.

A parte *a* da Fig. 3/10 mostra um corpo rígido cujo vértice *A* está completamente preso pelos vínculos 1, 2 e 3. Os vínculos 4, 5 e 6 previnem rotações em torno dos eixos dos vínculos 1, 2 e 3, respectivamente, de modo que o corpo está *completamente preso* e as restrições são denominadas *adequadas*. A parte *b* da figura mostra o mesmo número de restrições, mas vemos que elas não oferecem resistência a um momento que possa ser aplicado em torno do eixo *AE*. Nesse caso o corpo está *preso de modo incompleto* e apenas com *restrição parcial*.

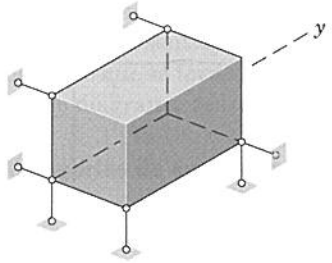
De modo semelhante, na Fig. 3/10*c* as restrições não oferecem resistência a uma força não equilibrada na direção *y*, de



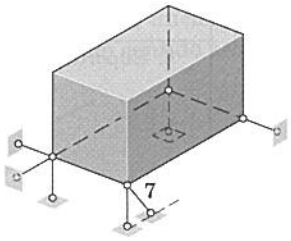
(*a*) Fixação completa. Restrições adequadas.



(*b*) Fixação incompleta. Restrições parciais.



(*c*) Fixação incompleta. Restrições parciais.



(*d*) Fixação excessiva. Restrições redundantes.

Figura 3/10

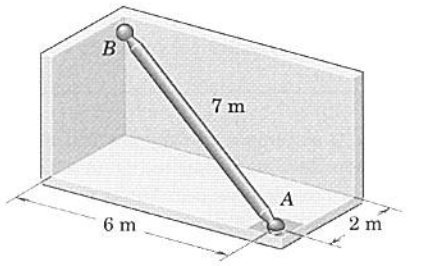
modo que aqui também existe um caso de fixação incompleta com restrições parciais. Na Fig. 3/10*d*, se um sétimo vínculo de restrição for imposto ao sistema de seis restrições, colocadas apropriadamente para haver fixação completa, mais apoios seriam dados do que os que seriam necessários para estabelecer a posição de equilíbrio, e o vínculo 7 seria *redundante*. O corpo seria então *estaticamente indeterminado* com esse sétimo vínculo colocado. Com apenas algumas exceções, as restrições de apoios para corpos rígidos em equilíbrio nesse livro são adequadas e os corpos são estaticamente determinados.

© Thomas Ebert/Laif/Redux

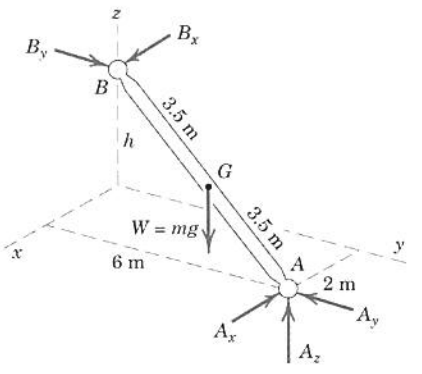
O equilíbrio de componentes estruturais como esses painéis em forma de concha é uma questão importante tanto durante quanto após a construção. Esta estrutura será usada como hangar de aviões.

Exemplo 3/5

O eixo uniforme de aço, com 7 m de comprimento, tem uma massa de 200 kg e está apoiado sobre o chão por uma rótula em A. A extremidade esférica em B se apóia na parede vertical lisa, como mostrado. Calcule as forças exercidas pelas paredes e pelo chão nas extremidades do eixo.



Solução. Primeiramente, o diagrama de corpo livre da barra é construído e as forças de contato atuando na barra em B são mostradas normais às superfícies das paredes. Além do peso $W = mg = 200(9{,}81) = 1962$ N, a força exercida pelo chão na rótula em A é representada pelas suas componentes x, y e z. Essas componentes estão mostradas em seus sentidos físicos corretos, como fica evidente da necessidade ① de que A seja mantido em seu lugar. A posição vertical de B é determinada de $7 = \sqrt{2^2 + 6^2 + h^2}$, $h = 3$m. Eixos coordenados seguindo a regra da mão direita foram atribuídos como mostrado.



Solução vetorial. Usaremos A como um centro de momentos para eliminar referência às forças atuando em A. Os vetores posição necessários para calcular os momentos em relação a A são

$$\mathbf{r}_{AG} = -1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1{,}5\mathbf{k} \text{ m} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}_{AB} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ m}$$

onde o centro de massa G está localizado a meia distância entre A e B.

A equação vetorial dos momentos resulta em

$$[\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}] \qquad \mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y) + \mathbf{r}_{AG} \times \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

$$(-2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}) + (-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 1{,}5\mathbf{k}) \times (-1962\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -6 & 3 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -3 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & -1962 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(-3B_y + 5890)\mathbf{i} + (3B_x - 1962)\mathbf{j} + (-2B_y + 6B_x)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Sugestões Úteis

① Poderíamos, é claro, colocar todas as componentes de força incógnitas no sentido matemático positivo. Nesse caso calcularíamos valores negativos para A_x e A_y. O diagrama de corpo livre descreve a situação física, de modo que normalmente é preferível mostrar as forças nos seus sentidos físicos corretos sempre que possível.

Igualando os coeficientes de **i, j** e **k** a zero e resolvendo obtém-se

② $B_x = 654$ N e $B_y = 1962$ N *Resp.*

As forças em A são facilmente determinadas por

$[\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}]$ $(654 - A_x)\mathbf{i} + (1962 - A_y)\mathbf{j} + (-1962 + A_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$

e $A_x = 654$ N $A_y = 1962$ N $A_z = 1962$ N

Finalmente $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$= \sqrt{(654)^2 + (1962)^2 + (1962)^2} = 2850$ N *Resp.*

Solução escalar. Avaliando as equações escalares de momento em torno dos eixos que passam por A e são, respectivamente, paralelos aos eixos x e y, tem-se

$[\Sigma M_{A_x} = 0]$ $1962(3) - 3B_y = 0$ $B_y = 1962$ N

③ $[\Sigma M_{A_y} = 0]$ $-1962(1) + 3B_x = 0$ $B_x = 654$ N

As equações de força dão, simplesmente,

$[\Sigma F_x = 0]$ $-A_x + 654 = 0$ $A_x = 654$ N

$[\Sigma F_y = 0]$ $-A_y + 1962 = 0$ $A_y = 1962$ N

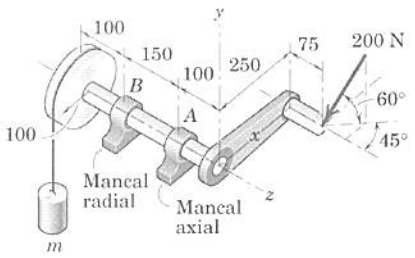
$[\Sigma F_z = 0]$ $A_z - 1962 = 0$ $A_z = 1962$ N

② Observe que a terceira equação $-2B_y + 6B_x = 0$ verifica, simplesmente, os resultados das duas primeiras equações. Esse resultado poderia ser previsto do fato que um sistema de equilíbrio de forças concorrentes com uma linha requer apenas duas equações de momento (Categoria 2 do tópico *Categorias de Equilíbrio*).

③ Observamos que de um somatório de momentos em torno de um eixo que passe por A e seja paralelo ao eixo z obtemos, simplesmente, $6B_x - 2B_y = 0$, o que serve apenas como uma verificação, como observado anteriormente. Alternativamente poderíamos ter obtido A_z primeiro a partir de $\Sigma F_z = 0$ e, então, montar as equações de momento em relação a eixos passando por B, para obter A_x e A_y.

Exemplo 3/6

Uma força de 200 N é aplicada à manivela do guincho na direção mostrada. O mancal A suporta o empuxo (a força na direção do eixo da barra), enquanto o mancal B suporta apenas carga radial (carga normal ao eixo da barra). Determine a massa m que pode ser suportada e a força radial total exercida na barra por cada mancal. Considere que nenhum dos mancais é capaz de suportar momento em relação à linha normal ao eixo da barra.

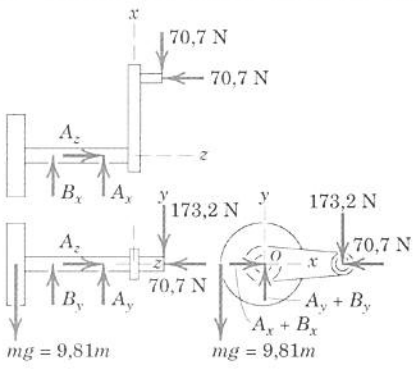


Dimensões em milímetros

Solução. O sistema é claramente tridimensional, sem linhas ou planos de simetria e, desse modo, deve ser analisado como um sistema de forças espaciais geral. Uma solução escalar será usada aqui para ilustrar esse desenvolvimento, embora uma solução usando notação vetorial pudesse ser também satisfatória. O diagrama de corpo livre da barra, manivela e roldana, considerados como sendo um único corpo, poderia ser mostrado

① por uma vista espacial, se desejado, mas está representado aqui por suas três projeções ortogonais.

A força de 200 N está rebatida em suas três componentes, e cada uma das três vistas mostra duas dessas componentes. As direções corretas de A_x e B_x podem ser determinadas por inspeção, observando-se que a linha de ação da resultante das duas forças de 70,7 N passa entre A e B. Os sentidos corretos das forças A_y e B_y não podem ser determinados até que os valores dos momentos sejam obtidos, de modo que eles são escolhidos arbitrariamente. A projeção x-y das forças nos mancais está mostrada em termos dos somatórios das componentes x e y desconhecidas. A colocação de A_z e do peso $W = mg$ completa os diagramas de corpo livre. Deve ser observado que as três vistas representam três problemas bidimensionais relacionados pelas componentes de força correspondentes.



② Da projeção x-y

$[\Sigma M_O = 0]$ $100(9{,}81m) - 250(173{,}2) = 0$ $m = 44{,}1$ kg *Resp.*

Da projeção x-z

$[\Sigma M_A = 0]$ $150B_x + 175(70{,}7) - 250(70{,}7) = 0$ $B_x = 35{,}4$ N

$[\Sigma F_x = 0]$ $A_x + 35{,}4 - 70{,}7 = 0$ $A_x = 35{,}4$ N

③ A vista y-z dá

$[\Sigma M_A = 0]$ $150B_y + 175(173{,}2) - 250(44{,}1)(9{,}81) = 0$ $B_y = 520$ N

Sugestões Úteis

① Se as três vistas-padrão da projeção ortográfica não são inteiramente familiares, revejaas e pratique com elas. Visualize as três vistas como as imagens do corpo projetadas nas superfícies frontal, superior e lateral de uma caixa de plástico transparente envolvendo o corpo e com superfícies paralelas a ele.

② Poderíamos ter iniciado com a projeção x-z em vez da projeção x-y.

③ A vista y-z poderia ter vindo imediatamente após a vista x-y, pois a determinação de A_y e B_y pode ser feita após m ser determinada.

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad A_y + 520 - 173{,}2 - (44{,}1)(9{,}81) = 0 \quad\quad A_y = 86{,}8$ N

$[\Sigma F_z = 0]$ $\quad A_z = 70{,}7$ N

As forças radiais totais nos mancais são

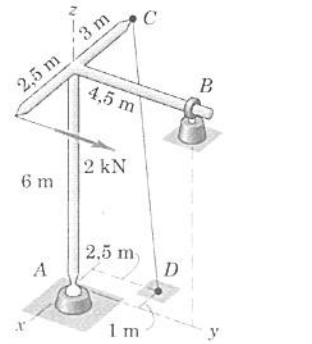
$[A_r = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}]$ $\quad A_r = \sqrt{(35{,}4)^2 + (86{,}8)^2} = 93{,}5$ N *Resp.*

④ $[B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}]$ $\quad B = \sqrt{(35{,}4)^2 + (520)^2} = 521$ N *Resp.*

④ Sem a suposição de que o momento em cada mancal é zero em relação à linha normal ao eixo da barra, o problema seria estaticamente indeterminado.

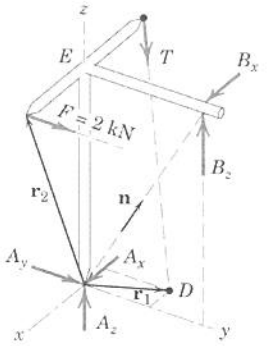
Exemplo 3/7

A estrutura tubular soldada está presa ao plano horizontal x-y por uma rótula em A, e recebe sustentação do anel frouxo em B. Sob a ação da carga de 2 kN, o cabo CD evita a rotação em torno de uma linha de A até B, e a estrutura é estável na posição mostrada. Despreze o peso da estrutura, em comparação com a carga aplicada, e determine a força trativa T no cabo, a reação no anel e as componentes da reação em A.



Solução. O sistema é claramente tridimensional, sem linhas ou planos de simetria. Desse modo, o problema deve ser analisado como um sistema de forças geral no espaço. O diagrama de corpo livre é desenhado, onde a reação do anel está mostrada em função de seus dois componentes. Todas as incógnitas, à exceção de $\mathbf{T}$, podem ser eliminadas fazendo o somatório de momentos em relação à linha AB. A direção de AB é

① especificada pelo vetor unitário $\mathbf{n} = \dfrac{1}{\sqrt{6^2 + 4{,}5^2}}(4{,}5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \frac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$. O momento de $\mathbf{T}$ em torno de AB é a componente do vetor momento em relação ao ponto A na direção de AB, e é igual a $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$. De modo semelhante, o momento da força aplicada F em relação a AB é $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Com $\overline{CD} = \sqrt{46{,}2}$ m, as expressões vetoriais para $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ são

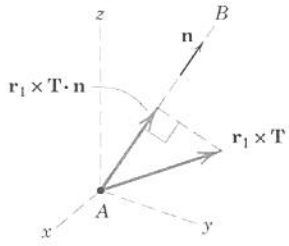


$$\mathbf{T} = \frac{T}{\sqrt{46{,}2}}(2\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \qquad \mathbf{F} = 2\mathbf{j} \text{ kN}$$

② $$\mathbf{r}_1 = -\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j} \text{ m} \qquad \mathbf{r}_2 = 2{,}5\mathbf{i} + 6\mathbf{k} \text{ m}$$

A equação do momento fica, então,

$$[\Sigma M_{AB} = 0] \quad (-\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j}) \times \frac{T}{\sqrt{46{,}2}}(2\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \cdot \tfrac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + (2{,}5\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) \times (2\mathbf{j}) \cdot \tfrac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$



Completando as operações vetoriais obtém-se

$$-\frac{48T}{\sqrt{46{,}2}} + 20 = 0 \qquad T = 2{,}83 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

e as componentes de T são

$$T_x = 0{,}833 \text{ kN} \qquad T_y = 1{,}042 \text{ kN} \qquad T_z = -2{,}50 \text{ kN}$$

Podemos determinar as incógnitas remanescentes fazendo os somatórios de momentos e forças, como se segue:

$[\Sigma M_z = 0]$ $\quad 2(2{,}5) - 4{,}5B_x - 1{,}042(3) = 0 \quad\quad B_x = 0{,}417$ kN *Resp.*

$[\Sigma M_x = 0]$ $\quad 4{,}5B_z - 2(6) - 1{,}042(6) = 0 \quad\quad B_z = 4{,}06$ kN *Resp.*

$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad A_x + 0{,}417 + 0{,}833 = 0 \quad\quad A_x = -1{,}250$ kN *Resp.*

③ $[\Sigma F_y = 0]$ $\quad A_y + 2 + 1{,}042 = 0 \quad\quad A_y = -3{,}04$ kN *Resp.*

$[\Sigma F_z = 0]$ $\quad A_z + 4{,}06 - 2{,}50 = 0 \quad\quad A_z = -1{,}556$ kN *Resp.*

Sugestões Úteis

① A vantagem de usar notação vetorial nesse problema é a liberdade de se tomar diretamente momentos em relação a qualquer eixo. Nesse problema, essa liberdade permite a escolha de um eixo que elimina cinco das incógnitas.

② Lembre que o vetor $\mathbf{r}$ na expressão $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para o momento de uma força, é um vetor desde o centro de momento até *qualquer* ponto sobre a linha de ação da força. Em vez de $\mathbf{r}_1$, uma escolha igualmente simples seria o vetor $\overline{AC}$.

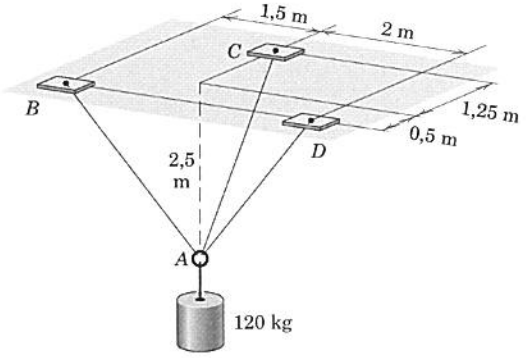
③ Os sinais negativos associados com as componentes de A indicam que elas estão nas direções opostas àquelas mostradas no diagrama de corpo livre.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

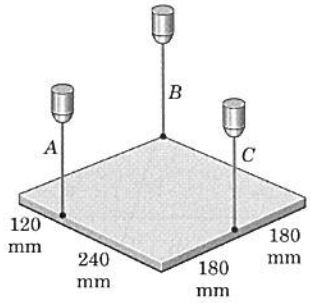
3/61 Determine as forças trativas nos cabos *AB*, *AC* e *AD*.

Resp. $T_{AB} = 569$ N, $T_{AC} = 376$ N, $T_{AD} = 467$ N



Problema 3/61

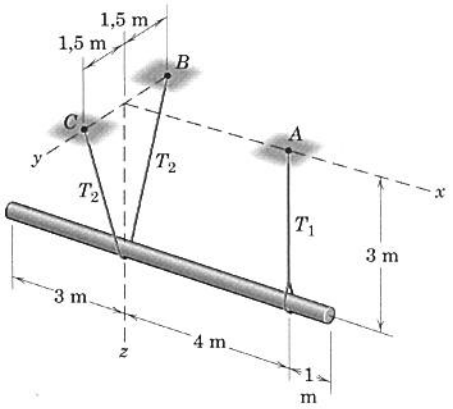
3/62 Uma chapa quadrada e uniforme de aço com 360 mm de comprimento de aresta e uma massa de 15 kg está suspensa no plano horizontal pelos três fios verticais, como mostrado. Calcule a força trativa em cada fio.



Problema 3/62

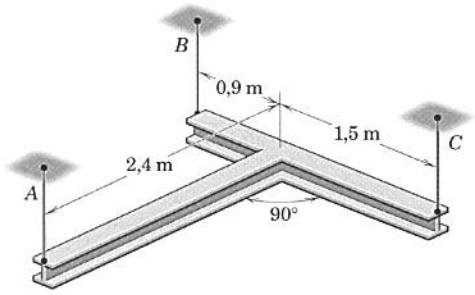
3/63 O eixo horizontal de aço tem uma massa de 480 kg e está suspenso por um cabo vertical em *A* e por um segundo cabo *BC* que passa por baixo do eixo e está situado em um plano vertical transversal. Calcule as forças trativas T_1 e T_2 nos cabos.

Resp. $T_1 = 1177$ N, $T_2 = 1974$ N



Problema 3/63

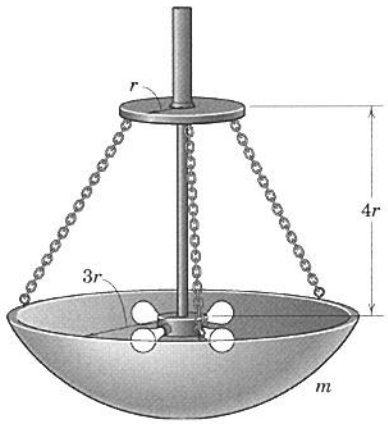
3/64 Duas vigas em I de aço, cada uma com uma massa de 100 kg, estão soldadas em um ângulo reto e sustentadas por cabos verticais de forma que as vigas se mantêm em um plano horizontal. Calcule a força trativa em cada um dos cabos *A*, *B* e *C*.



Problema 3/64

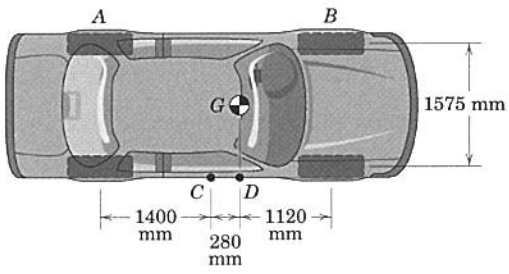
3/65 A parte de um lustre que é sustentada por correntes tem a forma de uma parte de casca esférica. Se a massa da parte de vidro é *m*, determine a força trativa *T* em cada uma das correntes.

Resp. $T = 0{,}373mg$



Problema 3/65

3/66 Uma vista de topo de um carro está mostrada na figura. Duas diferentes posições, *C* e *D*, são consideradas para a colocação de um macaco. Em ambos os casos, todo o lado direito do carro é levantado do chão. Determine as forças de reação normais em *A* e *B* e a força vertical necessária no macaco, para cada uma das duas posições. Considere que o carro de 1600 kg é rígido. O centro de massa *G* está na linha média do carro.

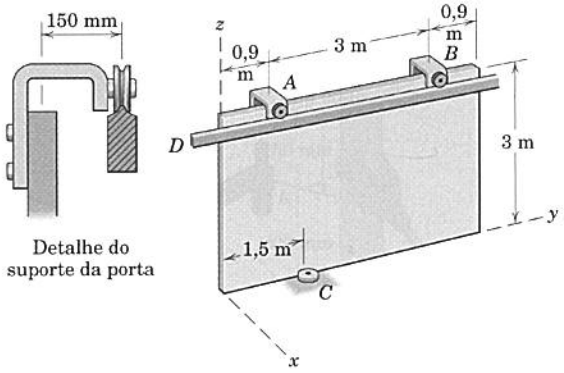


Problema 3/66

3/67 A porta industrial de 600 kg é um painel retangular uniforme que desliza ao longo do trilho fixo *D*, em roldanas presas a suportes em *A* e *B*. A porta é mantida em um plano vertical por uma roldana guia, *C*, presa ao chão, que encosta em sua extremidade inferior. Para a posição mostrada, calcule o empuxo lateral horizontal em

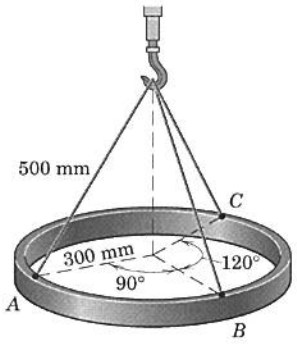
cada uma das roldanas em A e B, que deve ser considerado no projeto dos suportes.

Resp. $A_x = 235$ N, $B_x = 58{,}9$ N



Problema 3/67

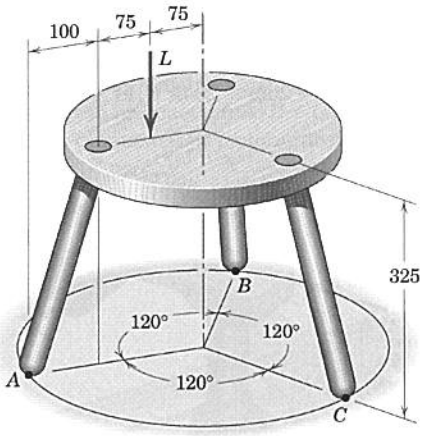
3/68 Um anel uniforme de aço, com 600 mm de diâmetro, tem uma massa de 50 kg e está sustentado por três cabos, cada um com 500 mm de comprimento, presos aos pontos A, B e C, como mostrado. Calcule a força trativa em cada cabo.



Problema 3/68

3/69 Uma banqueta de três pernas está submetida à carga L, como mostrado. Determine a força de reação vertical sob cada perna. Despreze o peso da banqueta.

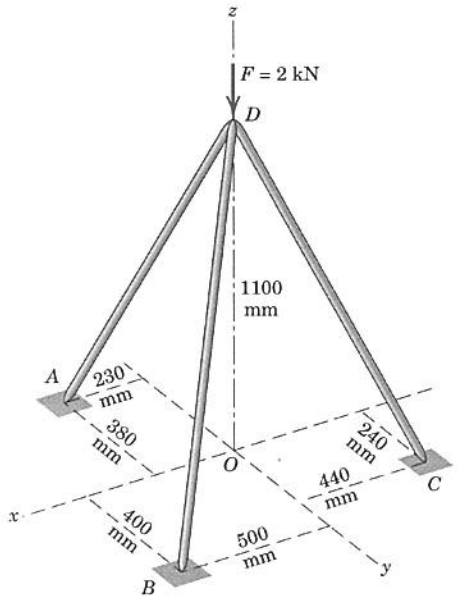
Resp. $N_A = 0{,}533L$, $N_B = N_B = 0{,}233L$



Dimensões em milímetros

Problema 3/69

3/70 Determine a força compressiva em cada uma das três pernas do tripé submetido à força vertical de 2 kN. O peso das pernas é desprezível comparado à carga aplicada. Resolva usando a equação de equilíbrio de forças $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

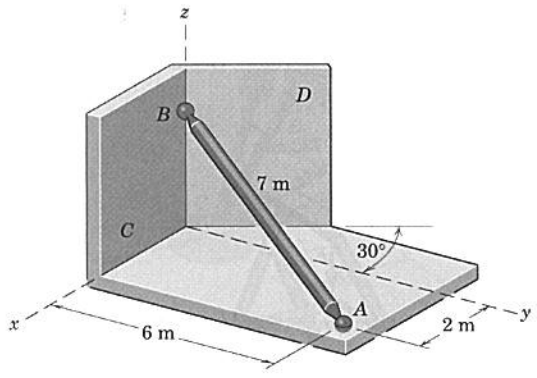


Problema 3/70

Problemas Representativos

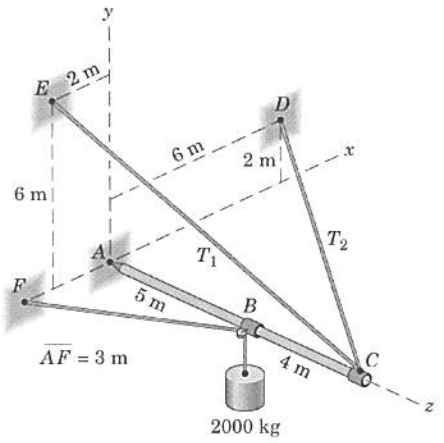
3/71 Uma das paredes verticais que apóiam a extremidade B do eixo uniforme de 200 kg do Exemplo 3/5 é girada de um ângulo de 30°, como mostrado aqui. A extremidade A permanece ainda apoiada por uma rótula no plano horizontal x-y. Calcule os módulos das forças $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$ exercidas na extremidade esférica B do eixo pelas paredes verticais C e D, respectivamente.

Resp. $P = 1584$ N, $R = 755$ N



Problema 3/71

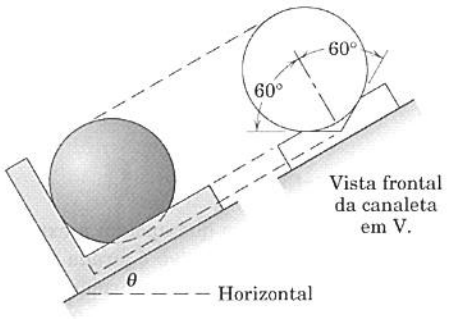
3/72 O mastro de 9 m tem uma massa de 600 kg e tem centro de massa na metade do seu comprimento. Ele é apoiado por uma rótula em A e pelos dois cabos sob forças trativas T_1 e T_2. O cabo que suporta a carga de 2000 kg passa por uma polia em B e é preso ao plano vertical x-y em F. Calcule o módulo da força trativa T_1. (*Sugestão:* Escreva uma equação para o momento que elimina todas as incógnitas exceto T_1.)



Problema 3/72

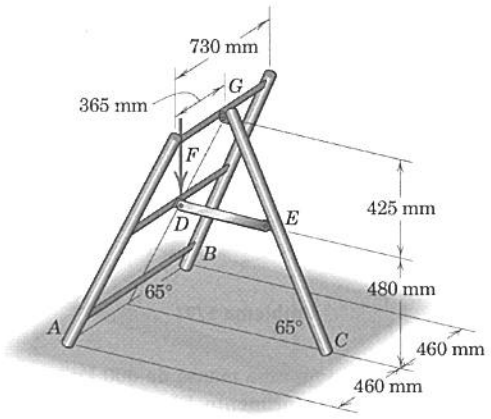
3/73 A esfera lisa e homogênea repousa na canaleta de 120° e se apóia contra a placa que é normal à direção da canaleta. Determine o ângulo θ, medido a partir da horizontal, para o qual a reação em cada lado da canaleta é igual a força suportada pela placa.

Resp. $\theta = 30°$



Problema 3/73

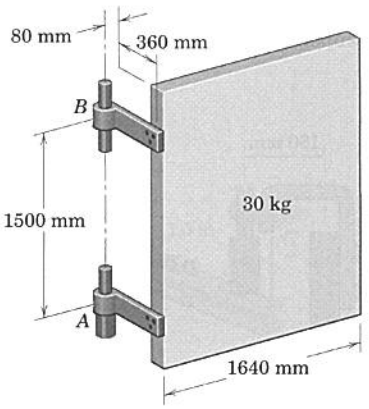
3/74 A pequena escada em tripé é útil para apoiar uma extremidade de uma passarela. Se F representa o módulo da carga direcionada para baixo causada pela passarela (não mostrada), determine a reação em cada um dos três pés A, B e C. Despreze o atrito.



Problema 3/74

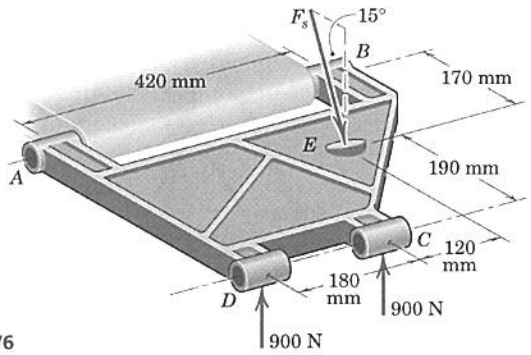
3/75 O centro de massa da porta de 30 kg está no centro do painel. Se o peso da porta é sustentado inteiramente pela dobradiça inferior A, calcule o módulo da força total suportada pela dobradiça em B.

Resp. $B = 190{,}2$ N



Problema 3/75

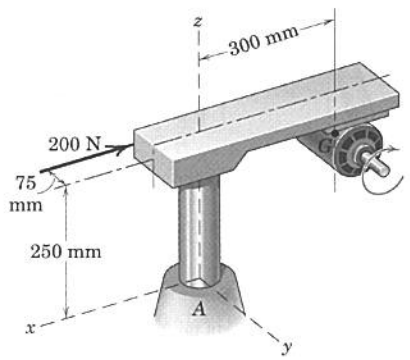
3/76 Como parte de uma verificação de seu projeto, o braço inferior de suspensão (parte da suspensão de um automóvel) é sustentado por mancais em A e B e submetido ao par de forças de 900 N em C e D. A mola da suspensão, não mostrada para melhor clareza da figura, exerce uma força F_S em E, como mostrado, onde E está no plano $ABCD$. Determine o módulo F_S da força da mola e os módulos F_A e F_B das forças dos mancais em A e B, que são perpendiculares ao eixo AB da dobradiça.



Problema 3/76

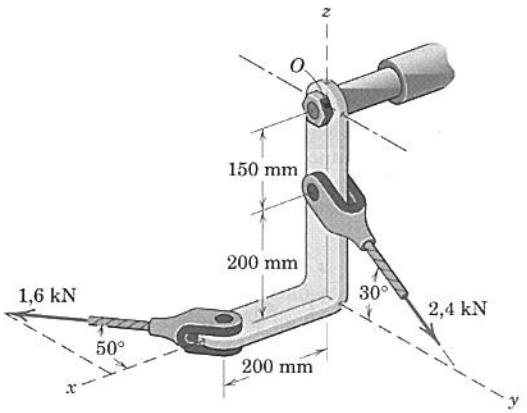
3/77 A unidade rígida formada pelo eixo vertical, braço e motor tem uma massa de 30 kg, com seu centro de massa em G localizado a 300 mm da linha mediatriz vertical do eixo. O eixo é soldado à base fixa em A. O motor, que controla uma máquina por meio de um eixo flexível, gira no sentido indicado e gera um torque de 200N · m. Além disso, uma força de 200 N é aplicada ao braço, como mostrado. Determine as expressões vetoriais para a força total $\mathbf{R}$ e para o momento $\mathbf{M}$ aplicados ao eixo, em A, pela base de sustentação. (*Cuidado:* Tome cuidado para atribuir o sentido correto ao torque (momento) que atua no eixo do motor, consistente com a terceira lei de Newton.)

Resp. $\mathbf{R} = 200\mathbf{i} + 294\mathbf{k}$ N, $\mathbf{M} = -61{,}7\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$ N · m



Problema 3/77

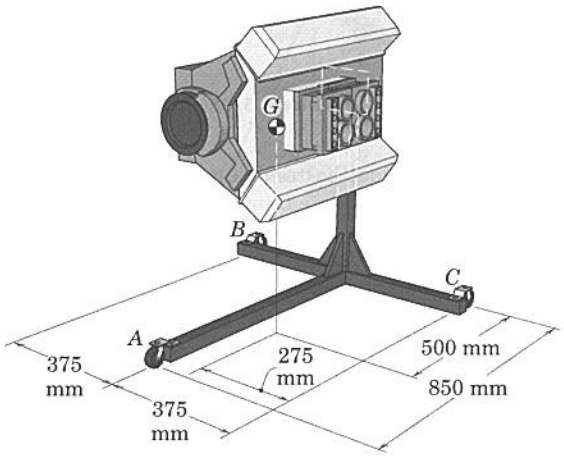
3/78 Determine os módulos da força **R** e do momento **M** exercidos em *O* pela porca e pelo parafuso sobre o suporte carregado, de forma a manter o equilíbrio.



Problema 3/78

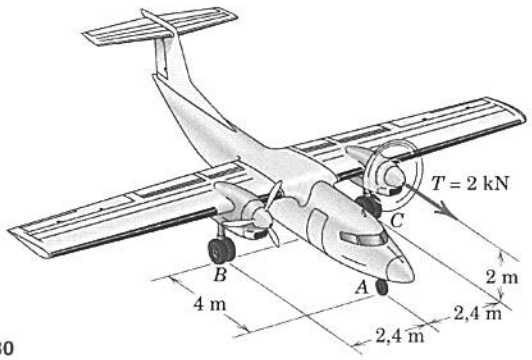
3/79 O motor V-8 de 200 kg está apoiado em um suporte e girado de 90° em relação a sua posição usual, de forma que seu centro de gravidade *G* está na posição mostrada. Determine a reação vertical em cada roda do suporte. Despreze o peso do suporte.

Resp. $N_A = 1270$ N, $N_B = 156{,}6$ N, $N_C = 732$ N



Problema 3/79

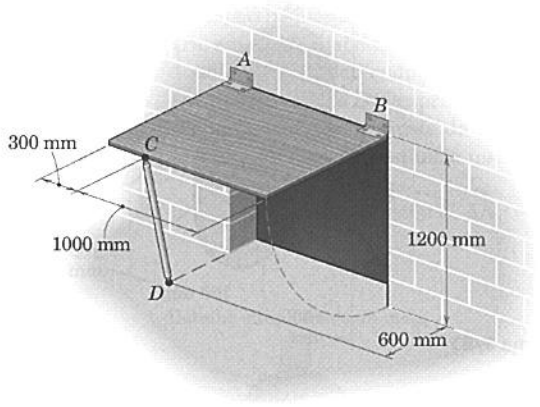
3/80 Durante um teste, o motor esquerdo de um avião bimotor é acionado gerando um empuxo de 2 kN. As rodas principais em *B* e *C* estão freadas de modo a evitar movimento. Determine a variação nas forças de reação normais em *A*, *B* e *C* (comparativamente aos valores nominais com ambos os motores desligados).



Problema 3/80

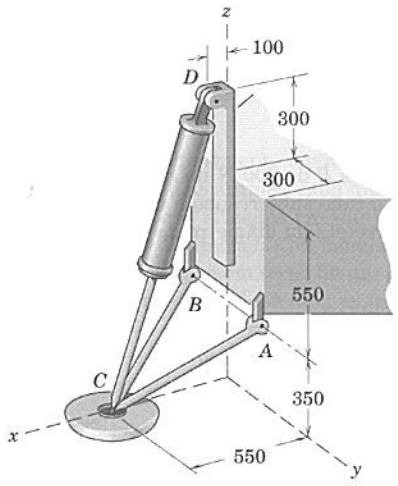
3/81 A porta retangular de acesso com 25 kg é mantida na posição aberta, a 90°, pelo apoio simples *CD*. Determine a força *F* no apoio e o módulo da força normal ao eixo de abertura *AB* em cada uma das pequenas dobradiças *A* e *B*.

Resp. $F = 140{,}5$ N, $A_n = 80{,}6$ N, $B_n = 95{,}4$ N



Problema 3/81

3/82 Um dos três trens de aterrissagem de uma nave proposta para pousar em Marte está mostrado na figura. Como parte de uma verificação do projeto sobre a distribuição de força na estrutura de aterrissagem, calcule a força em cada um dos elementos *AC*, *BC* e *CD* quando a nave está em repouso sobre uma superfície horizontal em Marte. O arranjo é simétrico em relação ao plano *x*-*z*. A massa da nave é de 600 kg. (Considere que os trens de aterrissagem suportam cargas iguais e consulte a Tabela D/2 no Apêndice D quanto necessário).

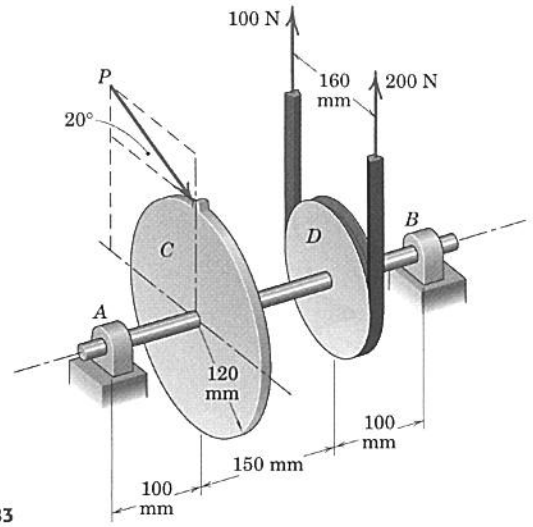


Dimensões em milímetros

Problema 3/82

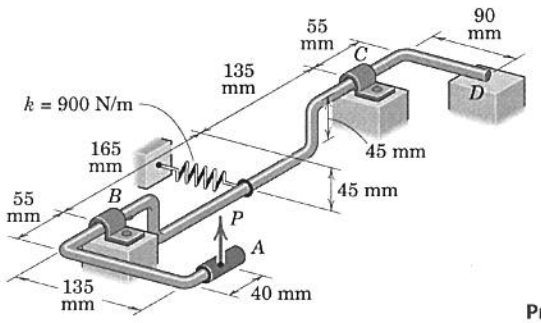
3/83 A engrenagem *C* gira a polia *D* para correias em V a uma velocidade constante. Para as forças trativas mostradas na correia, calcule a força P_{min} no dente da engrenagem e os módulos das forças totais suportadas pelos mancais em *A* e *B*.

Resp. $P = 70{,}9$ N, $A = 83{,}3$ N, $B = 208$ N



Problema 3/83

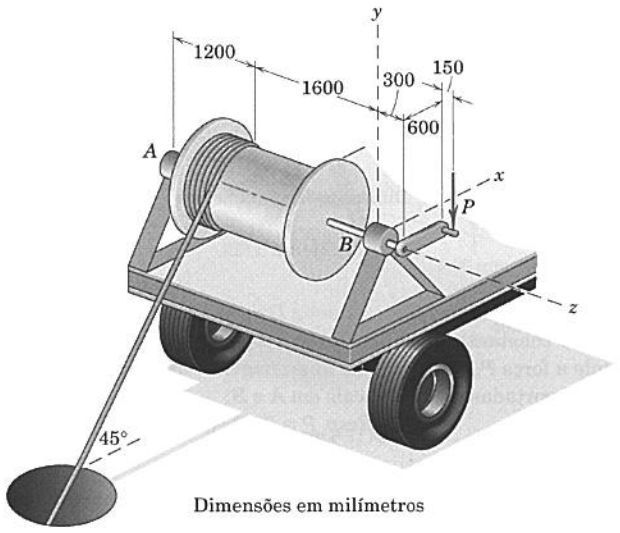
3/84 A mola de módulo $k = 900$ N/m é esticada de uma distância $\delta = 60$ mm quando o mecanismo está na posição mostrada. Calcule a força $P_{mín}$ necessária para iniciar rotação em torno do eixo BC e determine os módulos correspondentes das forças nos mancais, as quais são perpendiculares à BC. Qual é a força de reação normal em D se $P = P_{mín}/2$?



Problema 3/84

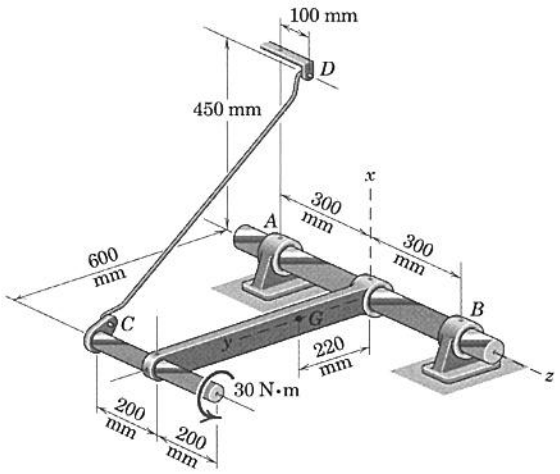
3/85 Uma força P de 200 N na manivela do carretel é requerida para enrolar o cabo subterrâneo a medida que ele sai do buraco. O tambor do carretel tem diâmetro de 1000 mm. Para a posição horizontal da manivela, como mostrado, calcule os módulos das forças nos mancais em A e B. Despreze o peso do tambor.

Resp. $A = 116{,}7$ N, $B = 313$ N



Problema 3/85

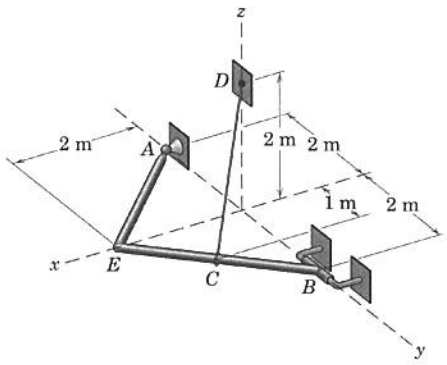
3/86 O eixo, alavanca e manopla estão soldados e formam um único corpo rígido. Sua massa combinada é de 28 kg, com centro de massa em G. O conjunto está montado sobre os mancais A e B e qualquer giro é evitado pela haste CD. Determine as forças exercidas sobre o eixo pelos mancais A e B quando o momento de 30 N · m é aplicado à manopla, como mostrado. Essas forças variariam se o momento fosse aplicado ao eixo AB em vez de sê-lo na manopla?



Problema 3/86

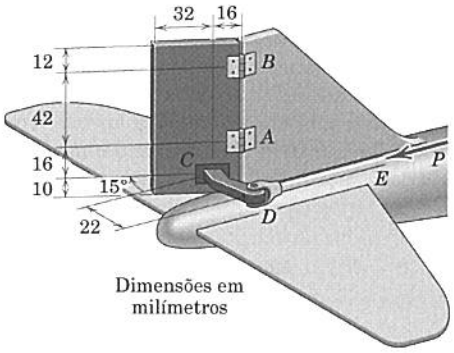
3/87 Cada uma das duas hastes da estrutura soldada tem massa de 50 kg. Um arame desde C até D impede que a estrutura gire para fora do plano horizontal, em torno de um eixo que passa pelo mancal em B e pela rótula em A. Calcule a força trativa T no arame e o módulo da força total suportada pela rótula em A.

Resp. $T = 1201$ N, $A = 601$ N



Problema 3/87

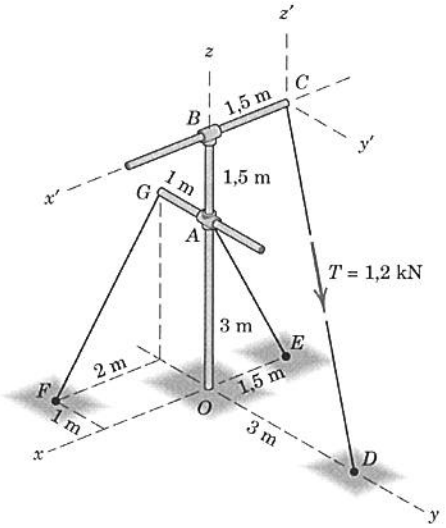
3/88 Considere o conjunto do leme de um aeromodelo controlado por rádio. Para a posição a 15° mostrada na figura, a pressão atuando no lado esquerdo da área retangular do leme vale $p = 4(10^{-5})$N/mm^2. Determine a força P necessária na barra de controle DE e as componentes horizontais das reações nas dobradiças A e B, que são paralelas à superfície do leme. Considere a pressão aerodinâmica como sendo uniforme.



Problema 3/88

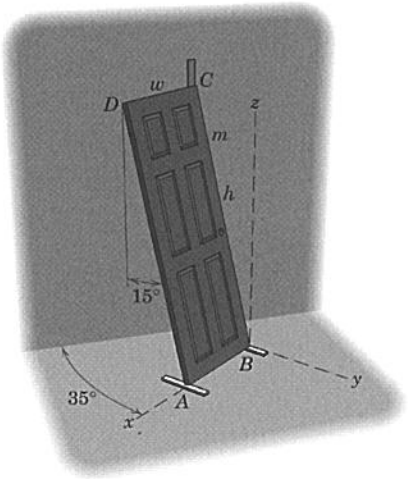
3/89 O poste rígido e as traves cruzadas do Prob. 2/105 estão mostrados novamente aqui. Determine as forças trativas T_{AE} e T_{GF} nos dois cabos de sustentação devidas à força trativa de 1,2 kN no cabo CD. Considere ausência de qualquer momento de reação na base do poste em O em relação aos eixos x e y, mas não em relação ao eixo z.

Resp. $T_{AE} = 4{,}30$ kN, $T_{GF} = 3{,}47$ kN



Problema 3/89

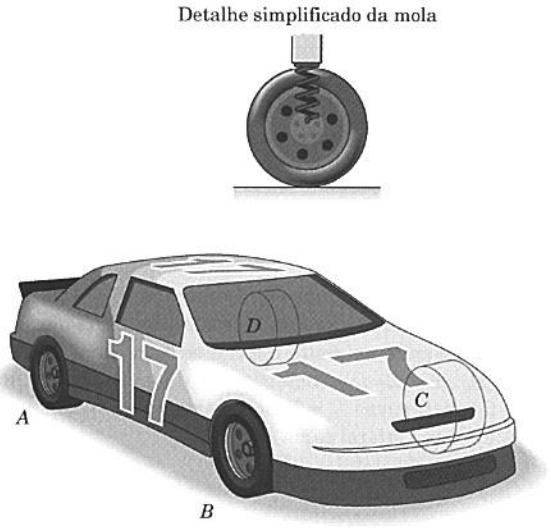
3/90 Uma porta homogênea de massa m, altura h e largura w está encostada em uma parede para ser pintada. Pequenas ripas de madeira estão colocadas sob as quinas A, B e C. O atrito em C é desprezível, mas em A e B é suficiente para impedir que a porta deslize. Determine as componentes y e z das forças de reação em A e B e a força normal à parede em C.



Problema 3/90

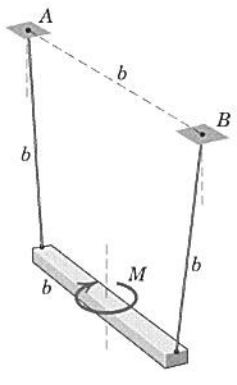
3/91 As extremidades superiores das molas helicoidais verticais no carro de corrida podem ser movidas para cima e para baixo por meio de um mecanismo de parafuso não mostrado. Esse ajuste permite uma mudança da força direcionada para baixo em cada roda, quando se tenta otimizar a dirigibilidade do carro. Inicialmente, as escalas indicam que as forças normais são de 3600 N, 3600 N, 4500 N e 4500 N em A, B, C e D, respectivamente. Se a extremidade superior da mola direita traseira, em A, for abaixada de modo que a escala em A lê uma força adicional de 450 N, determine as variações correspondentes nas forças normais em B, C e D. Despreze os efeitos de pequenas variações de ângulo causadas pelo ajuste da mola. As rodas dianteiras estão separadas pela mesma distância que as rodas traseiras.

Resp. $\Delta N_B = -450$ N, $\Delta N_C = 450$ N
$\Delta N_D = -450$ N



Problema 3/91

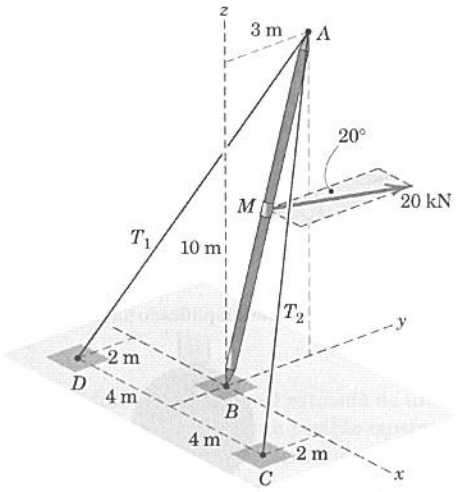
3/92 Uma barra uniforme de comprimento b e massa m está suspensa por suas extremidades por dois arames, cada um com comprimento b, a partir dos pontos A e B situados em um mesmo plano horizontal e separados por uma distância b. Um momento M é aplicado à barra, fazendo com que ela gire em torno de um eixo vertical até a posição de equilíbrio mostrada. Deduza uma expressão para a altura h até a qual a barra sobe a partir de sua posição original de equilíbrio, na qual ela está pendurada livremente sem nenhum momento aplicado. Qual valor de M é necessário para erguer a barra ao valor máximo, b?



Problema 3/92

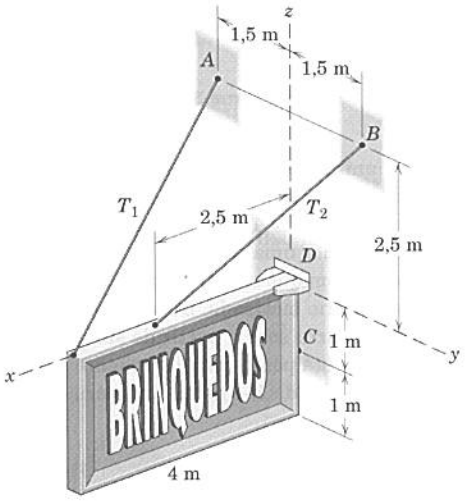
3/93 O mastro AB está no plano vertical y-z e é sustentado por uma rótula em B e por dois cabos em A. Calcule a força trativa em cada cabo devido à força de 20 kN agindo no plano horizontal e aplicada no ponto médio M do mastro. Despreze o peso do mastro.

Resp. $T_1 = 33{,}0$ kN, $T_2 = 22{,}8$ kN



Problema 3/93

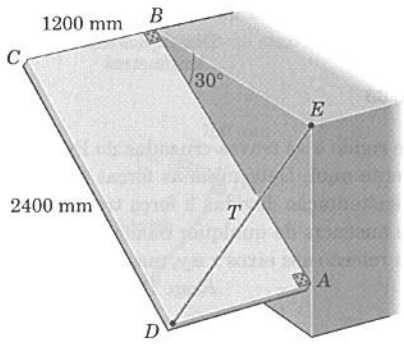
3/94 Um letreiro retangular sobre uma loja tem uma massa de 100 kg e seu centro de massa está no centro do retângulo. A sustentação contra a parede no ponto C pode ser considerada como uma rótula. Na extremidade D a sustentação é dada apenas na direção y. Calcule as forças trativas T_1 e T_2 nos arames de sustentação, a força total em C e a força lateral R em D.



Problema 3/94

▶3/95 O painel retangular uniforme $ABCD$ tem uma massa de 40 kg e tem dobradiças entre seus vértices A e B e a superfície vertical rígida. Um arame ligando E a D mantém horizontais as bordas BC e AD. A dobradiça A pode sustentar esforços ao longo do eixo AB, enquanto a dobradiça B suporta apenas força normal ao eixo AB. Ache a força trativa T no arame e o módulo B da força suportada pela dobradiça B.

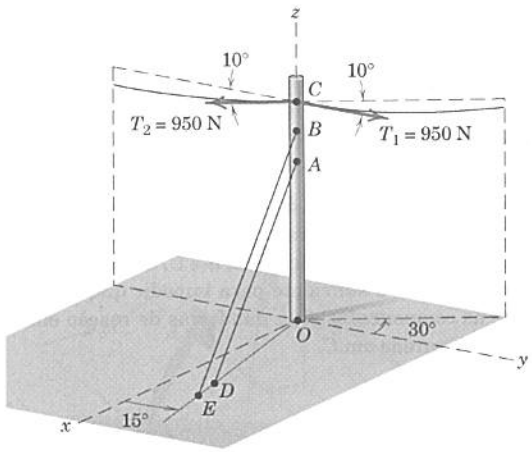
Resp. $T = 277$ N, $B = 169{,}9$ N



Problema 3/95

▶3/96 O plano vertical pelo qual passa o cabo de eletricidade gira de 30° no poste vertical OC. As forças trativas T_1 e T_2 valem ambas 950 N. Para prevenir inclinação do poste com o passar do tempo, os cabos de amarração AD e BE são usados. Se os dois cabos são ajustados para suportar forças trativas iguais T, as quais, em conjunto, reduzem a zero o momento em O, determine a força de reação horizontal resultante em O. Determine o valor necessário de T. Despreze o peso do poste.

Resp. $O = 144{,}9$ N, $T = 471$ N



$\overline{OA} = 9$ m $\quad \overline{OD} = 8$ m
$\overline{OB} = 11$ m $\quad \overline{OE} = 10$ m
$\overline{OC} = 13$ m

Problema 3/96

3/5 Revisão do Capítulo

No Capítulo 3 aplicamos nosso conhecimento das propriedades das forças, momentos e binários estudados no Capítulo 2 para resolver problemas envolvendo corpos rígidos em equilíbrio. O equilíbrio total de um corpo requer que o vetor resultante de todas as forças atuando nele seja zero ($\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$) e que o vetor resultante de todos os momentos no corpo, em relação a um ponto (ou eixo), também seja zero ($\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$). Somos guiados em todas as nossas soluções por esses dois requisitos, que são facilmente compreendidos fisicamente.

Freqüentemente, não é a teoria mas sua aplicação que apresenta dificuldade. Os passos cruciais na aplicação de nossos princípios de equilíbrio devem ser agora bastante familiares. Eles são:

1. Tome uma decisão inequívoca sobre qual sistema (um corpo ou um conjunto de corpos) em equilíbrio deve ser analisado.
2. Isole o sistema em questão de todos os corpos em contato, desenhando seu *diagrama de corpo livre* mostrando *todas* as forças e momentos atuando *no* sistema isolado devidas a fontes externas.
3. Observe o princípio da ação e reação (terceira lei de Newton) quando da atribuição do sentido de cada força.
4. Identifique todas as forças e momentos, conhecidos ou incógnitos.
5. Escolha e identifique eixos de referência, sempre escolhendo um sistema pela regra da mão direita quando a notação vetorial for usada (o que é normalmente o caso na análise tridimensional).
6. Verifique a adequação das restrições (apoios) e iguale o número de incógnitas com o número de equações de equilíbrio independentes disponíveis.

Quando da resolução de um problema de equilíbrio, devemos primeiro verificar se o corpo é estaticamente determinado. Se existirem mais apoios do que aqueles necessários para manter o corpo no lugar, o corpo é estaticamente indeterminado e as equações de equilíbrio, por si só, não nos permitirão determinar todas as reações externas. Na aplicação das equações de equilíbrio escolhemos álgebra escalar, álgebra vetorial ou análise gráfica de acordo tanto com a preferência quanto com a experiência; a álgebra vetorial é particularmente útil para muitos problemas tridimensionais.

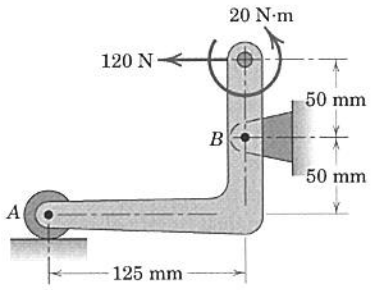
A resolução algébrica de uma solução pode ser simplificada pela escolha de um eixo de momentos que elimine tantas incógnitas quanto possível, ou pela escolha de uma direção para um somatório de forças que evite referência a certas incógnitas. Alguns poucos momentos de reflexão para tirar vantagem dessas simplificações podem economizar tempo e esforço apreciáveis.

Os princípios e métodos cobertos nos Capítulos 2 e 3 constituem a parte mais básica da estática. Eles lançam os fundamentos para o que se segue, não apenas em estática, mas também em dinâmica.

PROBLEMAS DE REVISÃO

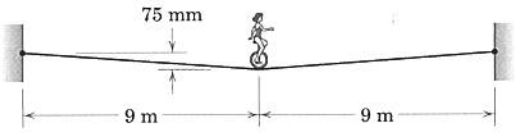
3/97 Calcule o módulo da força suportada pelo em pino em B no dispositivo em curva, carregado e apoiado como mostrado.

Resp. $B = 240$ N



Problema 3/97

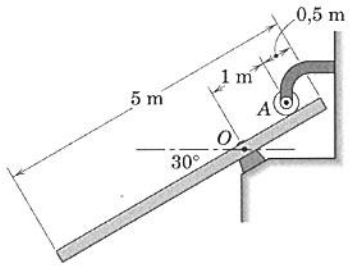
3/98 A acrobata de 50 kg pedala seu monociclo sobre o cabo esticado, mas ligeiramente elástico. Se a deflexão no centro do vão de 18 m vale 75 mm, determine a força trativa no cabo. Despreze os efeitos dos pesos do cabo e do monociclo.



Problema 3/98

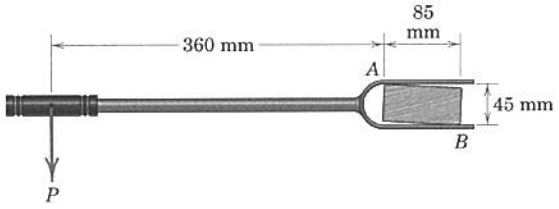
3/99 A barra uniforme de 5 m e massa de 100 kg é articulada em O e impedida de girar mais do que 30° no plano vertical pelo rolete fixo em A. Calcule o módulo da força total suportada pelo pino em O.

Resp. $O = 1769$ N



Problema 3/99

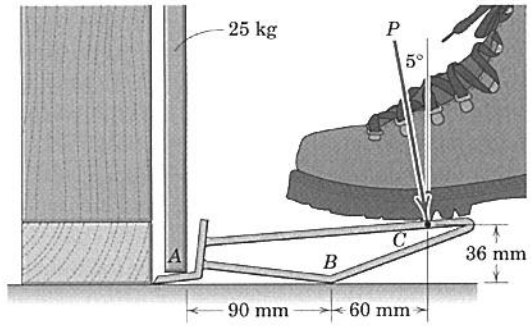
3/100 A ferramenta mostrada é usada para endireitar peças torcidas ao final de uma montagem com madeira. Se a força $P = 150$ N é aplicada ao cabo como mostrado, determine as forças normais aplicadas à garra nos pontos A e B. Despreze o atrito.



Problema 3/100

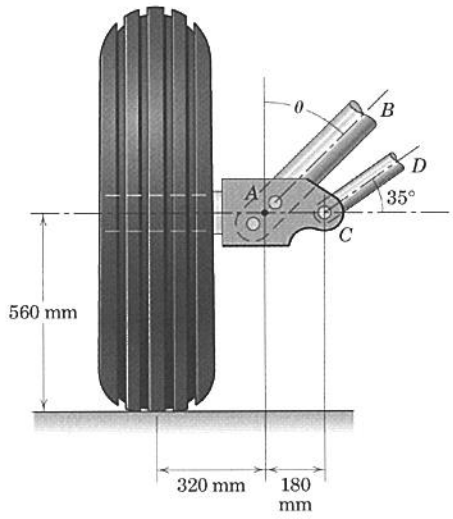
3/101 O dispositivo mostrado é útil para suspender e posicionar painéis antes de prendê-los aos tirantes na parede. Estime o módulo P da força necessária para erguer o painel de 25 kg. Explicite quaisquer suposições.

Resp. $P = 351$ N



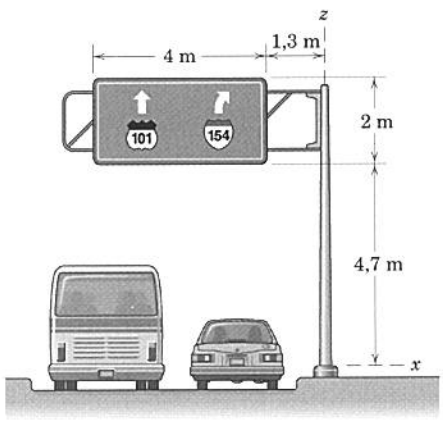
Problema 3/101

3/102 Os projetistas do trem de pouso de um avião desejam fazer com que as forças em ambos os eixos AB e CD atuem ao longo de seus respectivos comprimentos. Que ângulo θ eles devem especificar para o eixo AB? Os pesos de todos os elementos são pequenos comparados às forças que atuam no sistema mostrado. Trate como um problema bidimensional.



Problema 3/102

3/103 Uma placa de sinalização de uma auto-estrada, medindo 4 m por 2 m, é sustentada por um único poste, como mostrado. A placa, es-

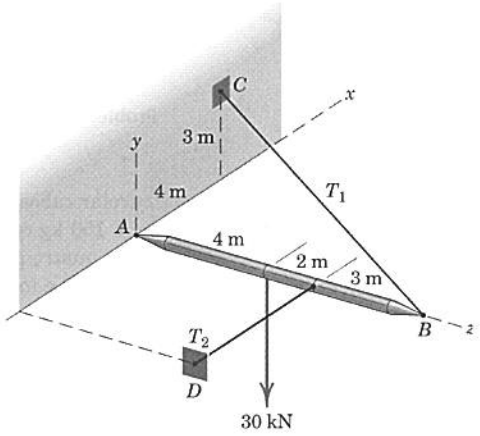


Problema 3/103

trutura de suporte e o poste, juntos, tem uma massa de 300 kg, tendo centro de massa localizado a 3,3 m da linha de centro vertical do poste. Quando a placa é submetida diretamente a uma lufada de vento de 125 km/h, uma diferença de pressão média de 700 Pa é desenvolvida entre as faces dianteira e traseira da placa, com a resultante das forças devidas à pressão do vento atuando no centro da placa. Determine os módulos da força e do momento de reação na base do poste. Tais resultados seriam necessários no projeto da base.

Resp. $R = 6330$ N, $M = 38{,}1$ kN · m

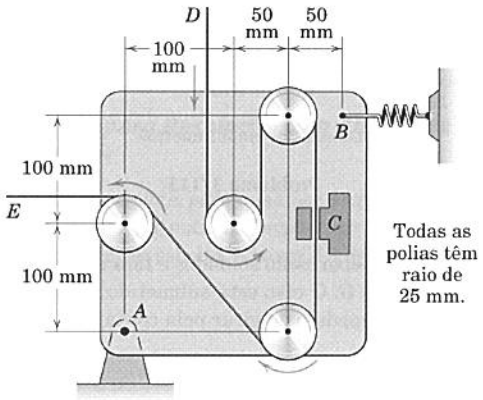
3/104 Se o peso do mastro é desprezível comparado à carga de 30 kN aplicada, determine as forças trativas T_1 e T_2 nos cabos e a força atuando na rótula em A.



Problema 3/104

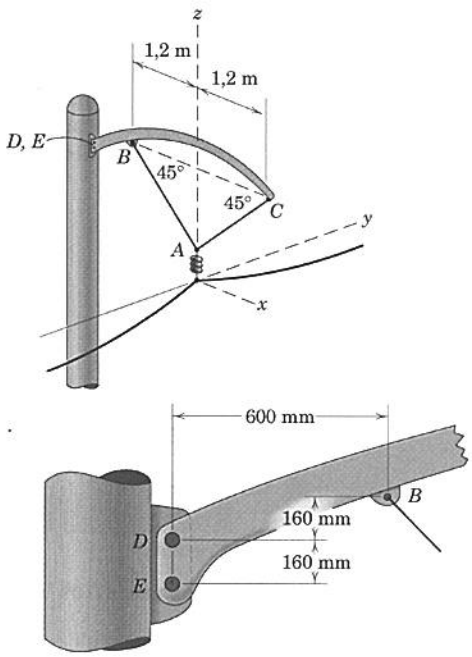
3/105 Uma fita magnética, sob uma força trativa de 10 N em D, passa, a velocidade constante, pelas polias guia e pela cabeça apagadora em C. Como resultado de um pequeno atrito nos mancais das polias, a fita está sob uma força trativa de 11 N em E. Determine a força trativa T na mola de apoio em B. A placa está em um plano horizontal e está montada em um mancal de precisão em A.

Resp. $T = 10{,}62$ N



Problema 3/105

3/106 O braço curvo BC e os cabos AB e AC presos a ele sustentam uma linha de transmissão, que está situada no plano vertical y-z. As tangentes à linha de transmissão, na posição do isolante abaixo de A, fazem ângulos de 15° com o eixo horizontal y. Se a força trativa na linha, na posição do isolante, vale 1,3 kN, calcule a força total suportada pelo parafuso em D no suporte do poste. O peso do braço BC pode ser desprezado comparado com as outras forças e pode-se assumir que o parafuso em E suporta apenas força horizontal.

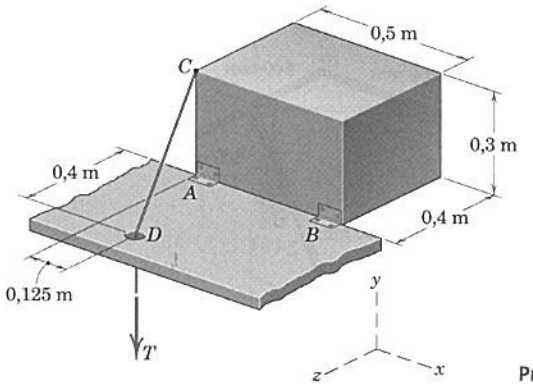


Problema 3/106

Detalhe da conexão do braço.

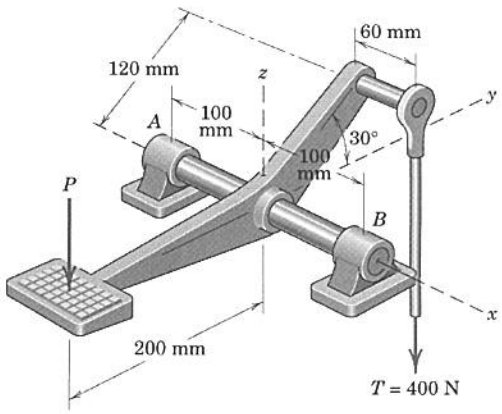
3/107 Determine a força trativa T necessária para manter o sólido retangular na posição mostrada. O sólido retangular com 125 kg é homogêneo. O atrito em D é desprezível.

Resp. $T = 1053$ N



Problema 3/107

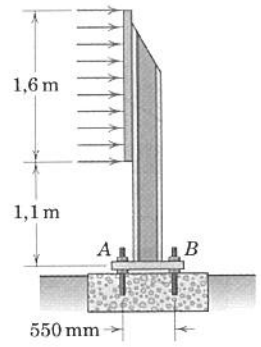
3/108 Uma força vertical P no pedal do dispositivo é necessária para produzir uma força trativa T de 400 N na barra de controle vertical. Determine as reações correspondentes nos mancais em A e B.



Problema 3/108

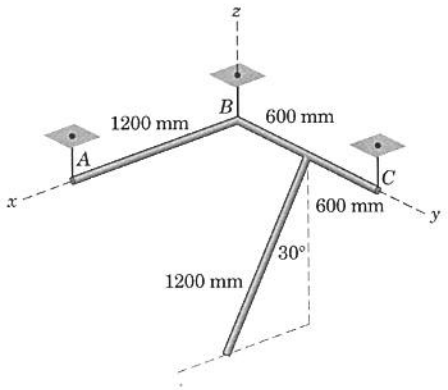
3/109 O vento soprando na direção normal ao plano da placa de sinalização retangular exerce uma pressão uniforme de 175 N/m², como indicado na figura. Determine as variações nas forças exercidas em A e B por cada apoio. Existem duas vigas em I verticais simetricamente posicionadas e a largura da placa é 3 m.

Resp. $\Delta A = 1451$ N para baixo, $\Delta B = 1451$ N para cima



Problema 3/109

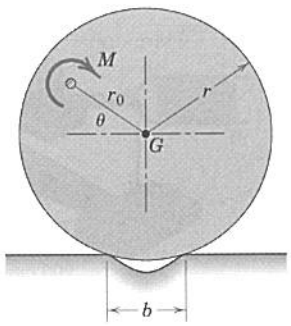
3/110 Cada uma das três barras uniformes de 1200 mm tem uma massa de 20 kg. As barras estão soldadas juntas na configuração mostrada e estão suspensas por três arames verticais. As barras AB e BC estão no plano horizontal x-y e a terceira barra está em um plano paralelo ao plano x-z. Calcule as forças trativas em cada arame.



Problema 3/110

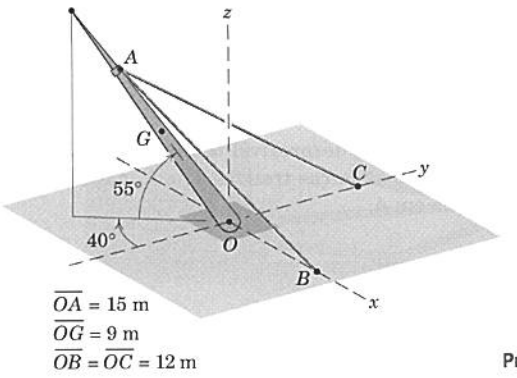
3/111 Uma roda com massa m e raio r, com centro de massa G no seu centro geométrico, está apoiada em uma pequena depressão com largura b. Determine o momento mínimo M aplicado à roda na posição mostrada, de forma a rolar a roda para fora da depressão. Assuma que não existe deslizamento. Quais são as influências de r_0, r e θ?

Resp. $M = 1/2\ mgb$



Problema 3/111

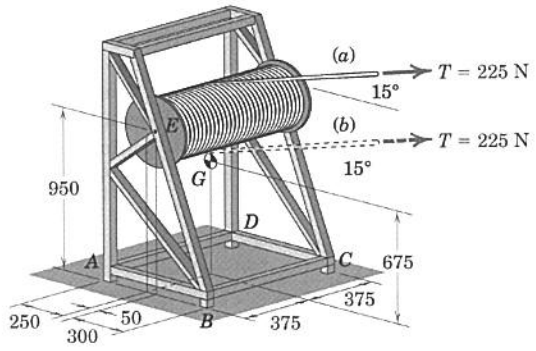
3/112 O mastro de 400 kg, com centro de massa em G, é mantido na posição mostrada por uma rótula em O e por dois cabos AB e AC. Determine as forças trativas nos dois cabos e as componentes x, y e z da força de reação em O.



Problema 3/112

3/113 A estrutura é usada para armazenar e desenrolar cabos. A massa combinada da estrutura, do carretel e do cabo é 150 kg com centro de massa em G. Determine as forças normais nos quatro pés (A, B, C e D) se (a) o cabo sai pela parte de cima do carretel e (b) o cabo sai pela parte de baixo do carretel. Note que, em ambos os casos, o cabo sai do carretel em seu ponto médio horizontal. O raio efetivo do carretel é de 150 mm.

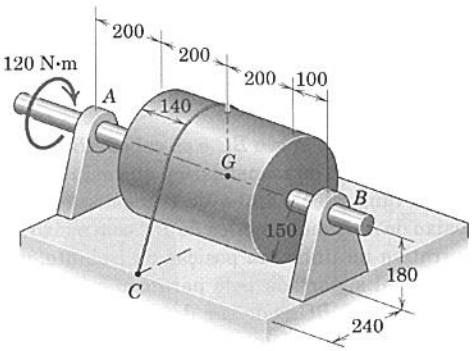
Resp. (a) $N_A = N_D = 214$ N, $N_B = N_C = 492$ N
(b) $N_A = N_D = 271$ N, $N_B = N_C = 436$ N



Dimensões em milímetros

Problema 3/113

3/114 O tambor e o eixo estão soldados e têm uma massa de 50 kg e centro de massa em G. O eixo está submetido a um torque de 120 N · m e o tambor é impedido de girar pela corda firmemente enrola-



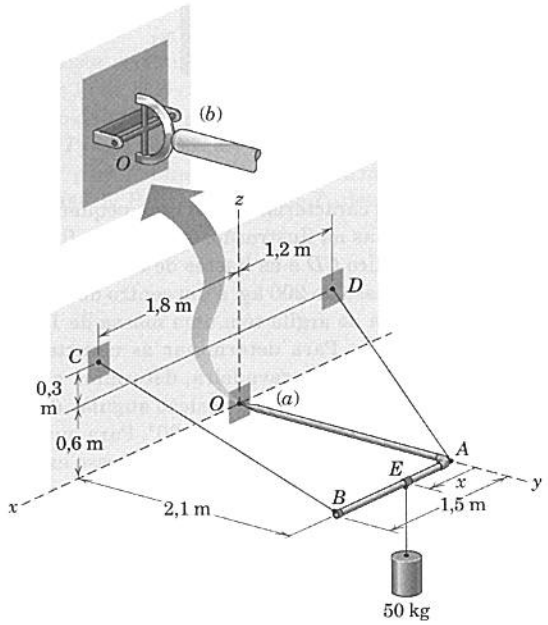
Problema 3/114

Dimensões em milímetros

da em torno dele e presa ao ponto C. Calcule os módulos das forças suportadas pelos mancais A e B.

▶3/115 A barra com formato em L é sustentada por uma rótula em O [caso (a)] e por dois cabos, como mostrado. Explique porque essa configuração não está restrita corretamente. (b) A rótula é, agora, substituída pela junta universal, que pode suportar, além das três forças de reação, um momento em relação ao eixo y, mas não momentos em relação aos eixos x e z. Faça um gráfico das forças trativas nos dois cabos, do módulo da força de reação em O e do momento de reação em O, em função da posição x do cilindro de 50 kg entre $0{,}15 \leq x \leq 1{,}35$ m. Explique qualquer característica fora do comum nos gráficos. Despreze o peso da barra em todo os casos.

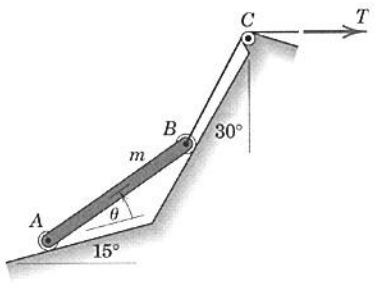
Resp. $T_{AD} = 1019$ N, $T_{BC} = 628$ N
$O = 1488$ N, todos constantes
$M_{O_y} = -490x + 368$ N · m



Problema 3/115

* Problemas para Resolução com Auxílio do Computador

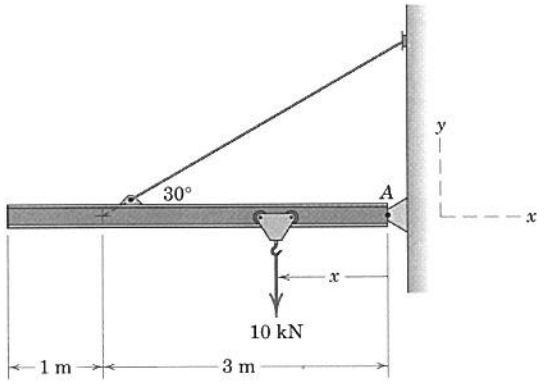
***3/116** Determine e plote, para qualquer ângulo θ entre pouco acima de zero e 45°, a razão T/mg entre as forças trativas necessária para manter em equilíbrio a barra esbelta. A barra AB de massa m é uniforme.



Problema 3/116

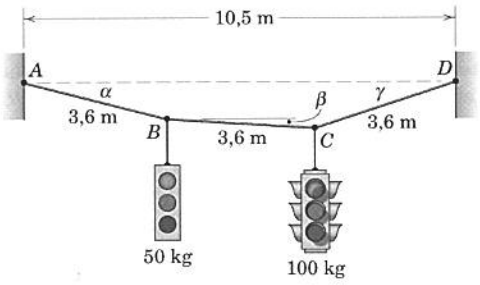
***3/117** O guincho da ponte rolante está projetado para uma capacidade máxima de 10 kN e a viga em I uniforme tem uma massa de 200 kg. (a) Faça um gráfico do módulo R da força no pino em A em função de x, ao longo da faixa de operação entre $x = 0{,}2$ m e $x = 3{,}8$ m. No mesmo sistema de eixos, faça um gráfico das componentes x e y da reação do pino em A. (b) Determine o valor mínimo de R e o valor correspondente de x. (c) O pino em A deve ser projetado para que valor de R? (Use $g = 10$ m/s².)

Resp. $(a)\ R = 1/3\ \{400x^2 - 400x + 1072\}^{1/2}$
$(b)\ R_{mín} = 10{,}39$ kN em $x = 0{,}5$ m
$(c)\ R_{máx} = 24{,}3$ kN em $x = 3{,}8$ m



Problema 3/117

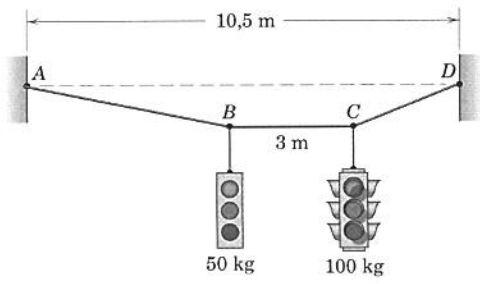
***3/118** Dois sinais de trânsito estão presos, em intervalos iguais, ao cabo de sustentação de 10,8 m de comprimento, como mostrado. Determine os ângulos α, β e γ da configuração de equilíbrio, bem como a força trativa em cada segmento de cabo.



Problema 3/118

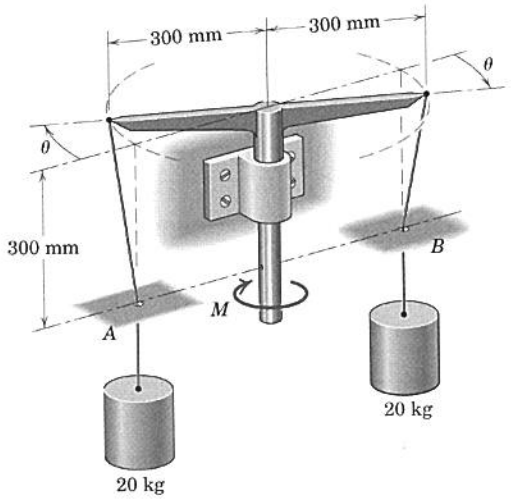
***3/119** Os dois sinais de trânsito do Prob. 3/118 foram, agora, reposicionados de modo que o segmento BC do cabo de sustentação de 10,8 m tem 3 m de comprimento e está na horizontal. Especifique os comprimentos AB e CD necessários e as forças trativas em todos os três segmentos de cabo.

Resp. $\overline{AB} = 5{,}10$ m, $\overline{CD} = 2{,}70$ m
$T_{AB} = 2470$ N, $T_{BC} = 2420$ N, $T_{CD} = 2610$ N



Problema 3/119

***3/120** A posição vertical dos dois cilindros de 20 kg é controlada pelo momento M aplicado ao eixo central. Os cabos presos às extremidades dos braços passam por furos lisos em A e B, situados em uma superfície fixa. Faça um gráfico de M como função de θ desde $\theta = 0°$ até $\theta = 180°$. Determine o valor máximo de M e o valor correspondente de θ. Considere $g = 10$ m/s² em seus cálculos.

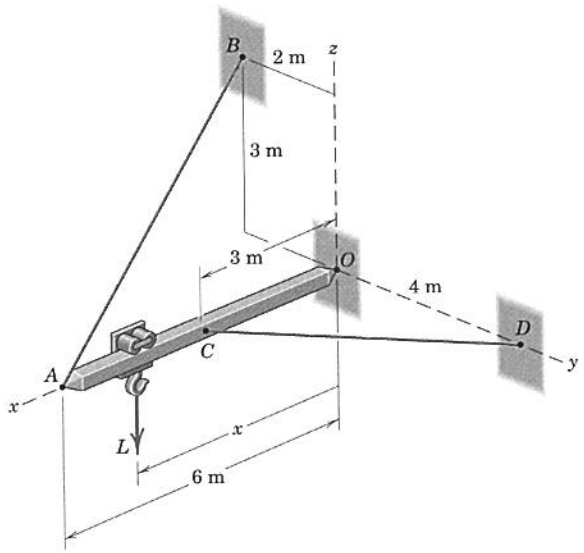


Problema 3/120

***3/121** A haste horizontal é sustentada pelos cabos AB e CD e por uma rótula em O. Para determinar a influência da posição da carga vertical L ao longo da haste sobre a reação em O, podemos desprezar o peso da haste. Se R representa o módulo da força total em O, determine a menor razão R/L e o valor correspondente de x. Escreva, então, um programa de computador para R/L e trace o gráfico dos resultados para $0 < x < 6$ m, como uma verificação dos seus cálculos.

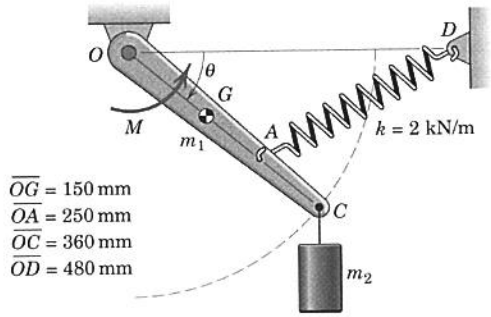
Resp. $R/L = \sqrt{47x^2/162 - x/3 + 1}$

$(R/L)_{mín} = 0{,}951$ em $x = 0{,}574$ m



Problema 3/121

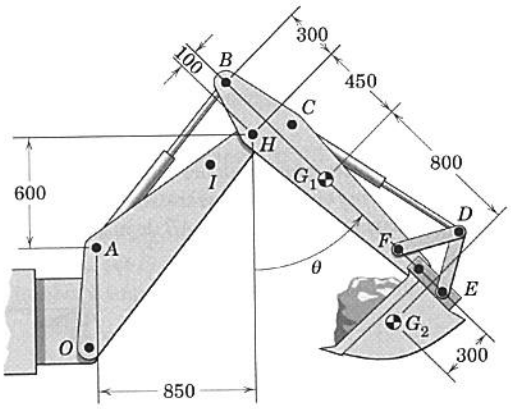
*3/122 O centro de massa do braço OC de 10 kg está localizado em G e a mola com constante $k = 1{,}2$ kN/m não está esticada quando $\theta = 0$. Faça um gráfico do momento aplicado M necessário para o equilíbrio estático na faixa $0 \le \theta \le 180°$. Determine o valor de θ para o qual $M = 0$ (se existir) e os valores mínimo e máximo de M, com os valores correspondentes de θ para os quais esses valores extremos ocorrem. O movimento desse mecanismo ocorre em um plano vertical. Considere M positivo no sentido contrário aos ponteiros do relógio. O valor de m_2 é 3 kg.



Problema 3/122

***3/123** As principais características de uma pequena retroescavadeira estão mostradas na ilustração. O elemento BE (completo, com o cilindro hidráulico CD e as hastes de controle da caçamba DF e DE) tem uma massa de 200 kg, e um centro de massa em G_1. A caçamba e sua carga de argila têm uma massa de 140 kg e um centro de massa em G_2. Para determinar as características do projeto operacional da retroescavadeira, determine a força T no cilindro hidráulico AB em função da posição angular θ do elemento BE e faça um gráfico na faixa $0 \le \theta \le 90°$. Para que valor de θ a força T se anula? O elemento OH é fixo para esse exercício; observe que seu cilindro hidráulico de controle (não mostrado) vai de um ponto próximo a O até o pino I. Semelhantemente, o cilindro hidráulico de controle da caçamba CD é mantido em um comprimento fixo.

Resp. $T = 0$ em $\theta = 1{,}729°$

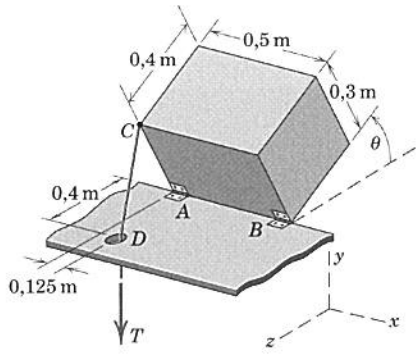


Dimensões em milímetros

Problema 3/123

***3/124** O sistema do Prob. 3/107 é mostrado novamente aqui. Só que agora, o sólido homogêneo de 125 kg está mostrado girado por um ângulo θ em torno do eixo AB da dobradiça. Determine e plote as seguintes quantidades como funções de θ, na faixa $0 \le \theta \le 60°$: T, A_y, A_z, B_x, B_y e B_z. A dobradiça em A não pode exercer esforço

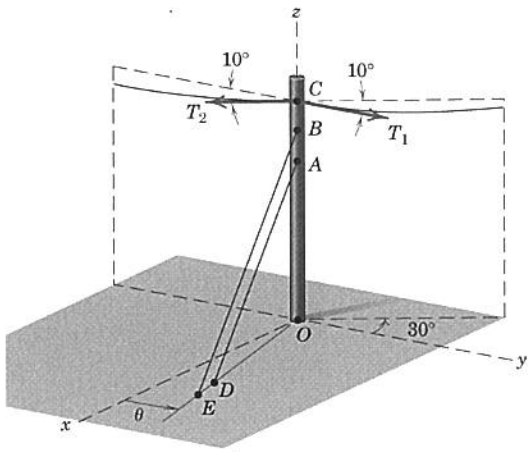
axial. Assuma que todas as componentes das forças na dobradiça estão nas direções coordenadas positivas.



Problema 3/124

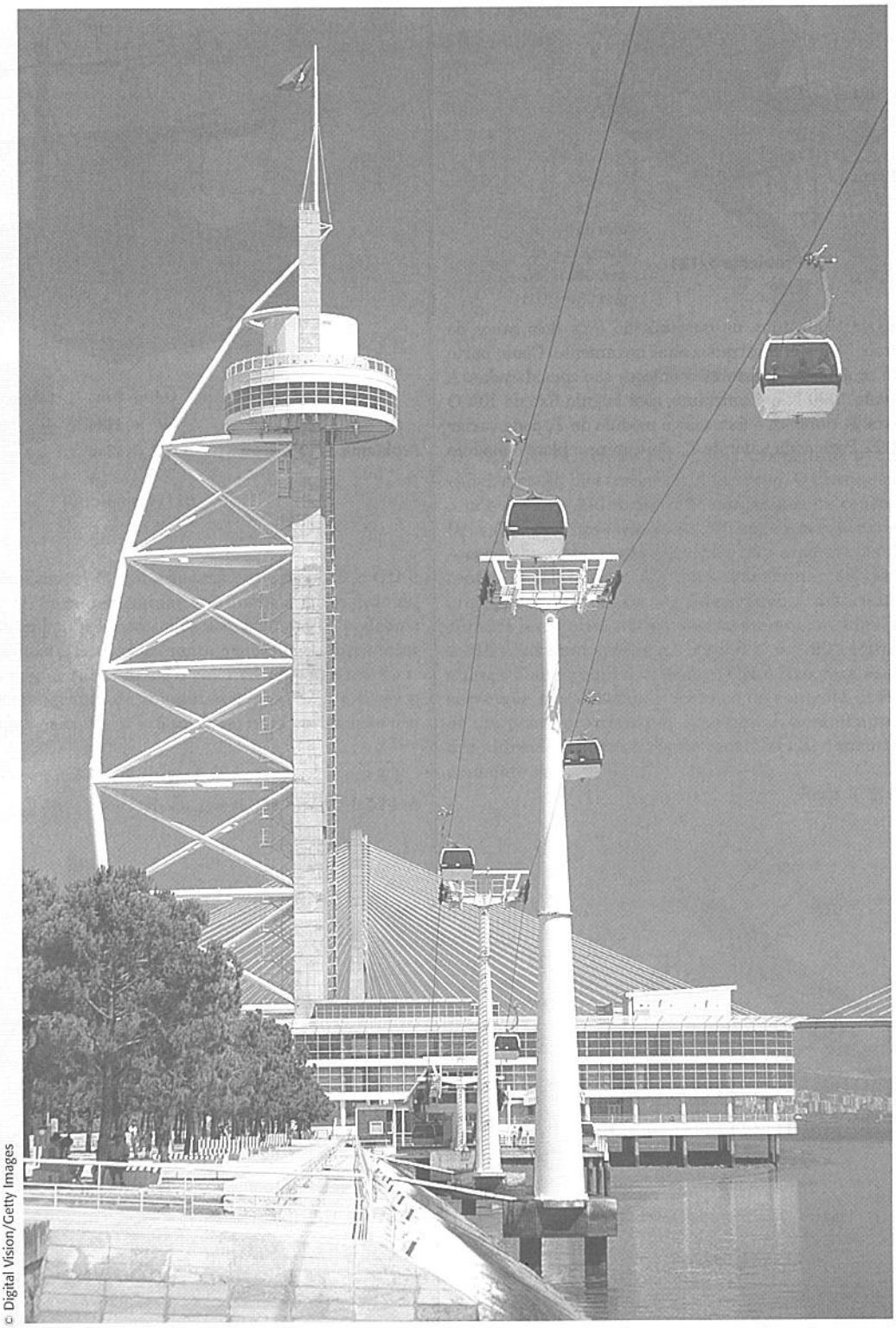
***3/125** O poste vertical, linha de transmissão e os dois cabos de amarração do Prob. 3/96 são mostrados aqui novamente. Como parte de um estudo do projeto, as seguintes condições são consideradas. A força trativa T_2 vale 1000 N e é constante, com ângulo fixo de 10°. O ângulo de 10° para T_1 também é fixo, mas o módulo de T_1 pode variar desde 0 até 2000 N. Para cada valor de T_1, determine e plote o módulo das tensões idênticas nos cabos AD e BE e o ângulo θ para o qual o momento em O será zero. Explicite os valores de T e θ para $T_1 = 1000$ N.

Resp. $T = 495$ N, $\theta = 15°$



$\overline{OA} = 9$ m $\quad \overline{OD} = 8$ m
$\overline{OB} = 11$ m $\quad \overline{OE} = 10$ m
$\overline{OC} = 13$ m

Problema 3/125



© Digital Vision/Getty Images

Essa vista de Lisboa, Portugal, mostra diversas estruturas. Em todos os casos, entretanto, os engenheiros tiveram que calcular a força suportada por cada componente principal da estrutura como um todo.

4 ESTRUTURAS

DESCRIÇÃO DO CAPÍTULO

4/1 Introdução
4/2 Treliças Planas
4/3 Método dos Nós
4/4 Método das Seções
4/5 Treliças Espaciais
4/6 Suportes e Máquinas
4/7 Revisão do Capítulo

4/1 INTRODUÇÃO

No Capítulo 3 estudamos o equilíbrio de um único corpo rígido ou de um sistema de elementos conectados, tratado como um único corpo rígido. Inicialmente desenhamos um diagrama de corpo livre mostrando todas as forças externas ao corpo isolado, e, então, aplicamos as equações de equilíbrio de força e momento. No Capítulo 4 focamos na determinação das forças internas a uma estrutura, ou seja, as forças de ação e reação entre os elementos conectados. Uma estrutura de engenharia é qualquer sistema de elementos conectados, construído para suportar ou transferir forças e resistir de forma segura às cargas a ele aplicadas. Para determinar as forças internas a uma estrutura de engenharia, devemos desmembrá-la e analisar os diagramas de corpo livre separados dos elementos individuais ou de combinações de elementos. Esta análise requer a aplicação cuidadosa da terceira lei de Newton, que afirma que cada ação é acompanhada por uma reação igual e oposta.

No Capítulo 4 analisamos as forças internas que atuam em diversos tipos de estrutura, especificamente, treliças, suportes e máquinas. Nesse tratamento consideramos apenas estruturas *estaticamente determinadas*, que não possuem mais restrições de apoio que as necessárias para manter uma configuração de equilíbrio. Assim, como já vimos, as equações de equilíbrio são adequadas para determinar todas as reações desconhecidas.

A análise de treliças, suportes e máquinas, e vigas, sob cargas concentradas constitui uma aplicação direta do material desenvolvido nos dois capítulos anteriores. O procedimento básico desenvolvido no Capítulo 3 para isolar um corpo por meio da construção de um diagrama de corpo livre correto é essencial para a análise de estruturas estaticamente determinadas.

4/2 TRELIÇAS PLANAS

Uma estrutura formada de elementos unidos em suas extremidades para formar uma estrutura rígida é denominada *treliça*. Pontes, apoios de telhados, guindastes e outras estruturas do gênero são exemplos comuns de treliças. Os elementos estruturais comumente usados são vigas em I ou em U, cantoneiras, barras e formas especiais que são unidas em suas extremidades por soldagem, conexões rebitadas, ou grandes parafusos ou pinos. Quando os elementos da treliça se situam essencialmente em um único plano, a treliça é denominada *treliça plana*.

Para pontes e estruturas semelhantes, treliças planas são comumente utilizadas juntamente com um conjunto de treliças colocado em cada lado da estrutura. Uma seção de uma estrutura típica de uma ponte está mostrada na Fig. 4/1. O peso combinado do pavimento e dos veículos é transferido às traves longitudinais, daí para as vigas cruzadas e, finalmente, levando em conta o peso das traves e das vigas cruzadas, para os nós superiores das duas treliças planas que formam os lados verticais da estrutura. Um modelo simplificado da estrutura da treliça está indicado no lado esquerdo da ilustração; as forças L representam as cargas nos nós.

Diversos exemplos de treliças comumente utilizadas, que podem ser analisadas como treliças planas, são mostrados na Fig. 4/2.

Treliças Simples

O elemento básico de uma treliça plana é o triângulo. Três barras unidas por pinos em suas extremidades, Fig. 4/3*a*, constituem uma estrutura rígida. O termo *rígido* é usado para significar não colapsável e também para significar que a deformação dos elementos devida às deformações internas induzidas é desprezível. Por outro lado, quatro ou mais barras unidas por pinos para formar um polígono com o mesmo número de lados constituem uma estrutura não rígida. Podemos tornar rígida, ou estável, a estrutura não rígida da Fig. 4/3*b* adicionando uma barra diagonal unindo A e D ou B e C, formando, assim, dois triângulos. Podemos aumentar a estrutura adicionando unidades extras formadas por duas barras conectadas nas extremidades, tais como DE e CE ou AF e DF, Fig. 4/3*c*, que são presas por pinos a dois nós fixos. Desta forma, toda a estrutura permanecerá rígida.

Estruturas construídas a partir de um triângulo básico, da maneira descrita, são conhecidas como *treliças simples*. Quando mais elementos do que os necessários para evitar o colapso estão presentes, a treliça é estaticamente indeterminada. Uma treliça estaticamente indeterminada não pode ser analisada apenas com as equações de equilíbrio. Elementos adicionais ou apoios que não são necessários

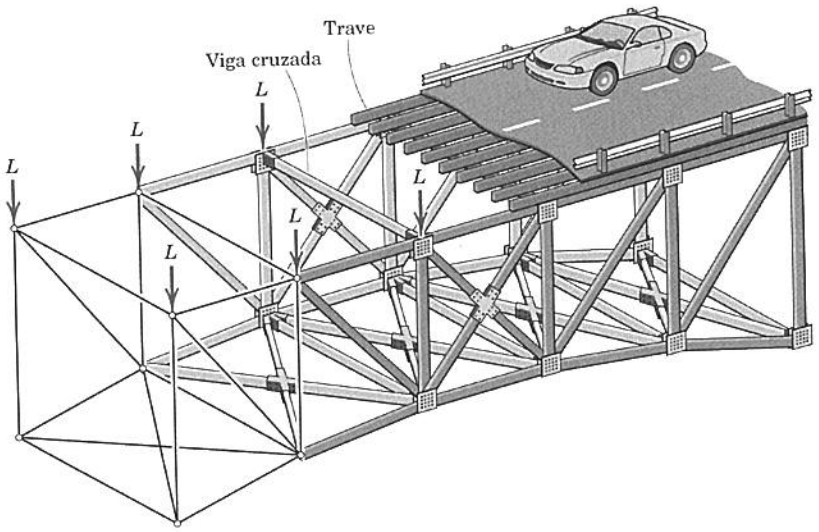
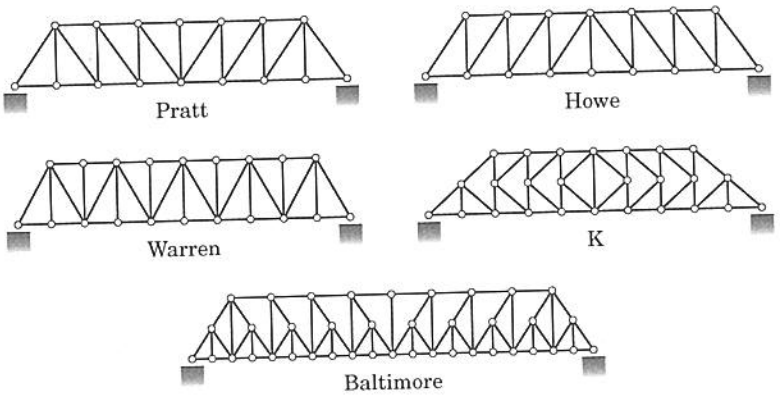


Figura 4/1



Treliças comumente utilizadas em pontes

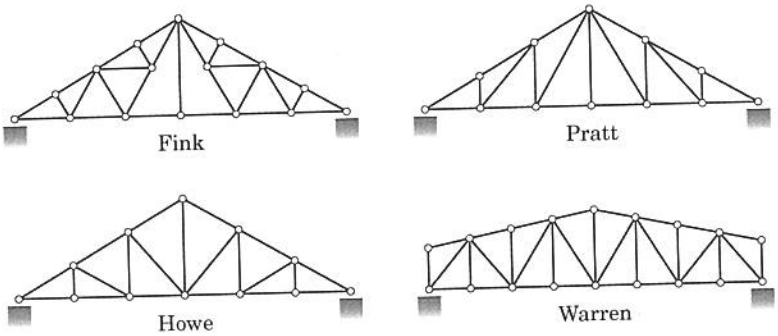


Figura 4/2 Treliças comumente utilizadas em telhados

para manter a configuração de equilíbrio são chamados de *redundantes*.

Para projetar uma treliça devemos primeiro determinar as forças nos vários elementos e então selecionar os tamanhos e as formas estruturais apropriadas para suportá-las. Diversas suposições são feitas na análise de forças em treliças simples. Primeiramente, consideramos que todos os elementos são *elementos de duas forças*. Um elemento de duas forças é aquele que está em equilíbrio sob a ação de apenas duas forças, como definido em termos gerais na Fig. 3/4 da Seção 3/3. Cada elemento de uma treliça é normalmente uma conexão reta, que une os dois pontos de aplicação da força. As duas forças são aplicadas nas extremidades do elemento e são necessariamente iguais, opostas e *colineares* para haver equilíbrio.

O elemento pode estar em tração ou compressão, como mostrado na Fig. 4/4. Quando representamos o equilíbrio de uma parte de um elemento de duas forças, a tração T ou a compressão C atuando na seção de corte é a mesma para todas as seções. Assumimos aqui que o peso do elemento é pe-

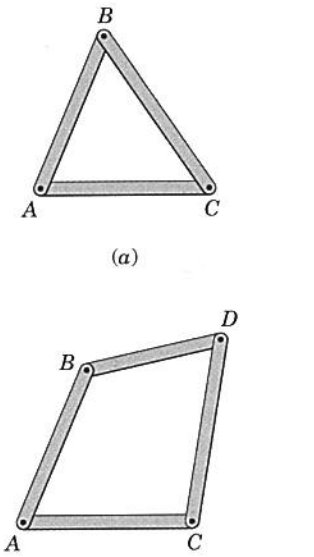


Figura 4/3

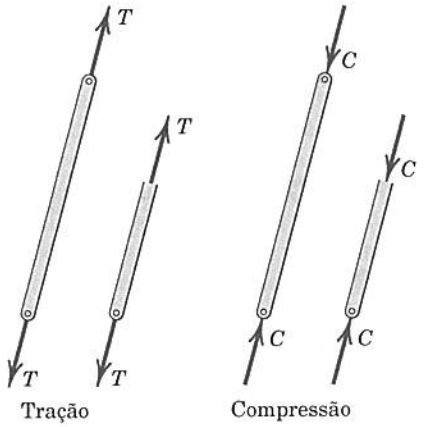


Figura 4/4 Elementos de duas forças

queno em comparação com a força que ele suporta. Se esse não for o caso, ou se precisarmos levar em consideração o pequeno efeito do peso, podemos substituir o peso W do elemento por duas forças, cada uma valendo $W/2$ se o elemento for uniforme, com cada força atuando em cada extremidade do elemento. Essas forças, na verdade, são tratadas como cargas externas aplicadas aos nós. Levar em conta o peso de um elemento dessa maneira fornece o resultado correto para a tração ou contração média ao longo do elemento, mas não levará em conta o efeito de curvatura do elemento.

Nós e Apoios de Treliças

Quando conexões soldadas ou rebitadas são usadas para unir elementos estruturais, podemos considerar normalmente que a conexão é um nó se as linhas de centro dos elementos forem concorrentes na junta como na Fig. 4/5.

Na análise de treliças simples, também consideramos que todas as forças externas são aplicadas nos nós. Essa condição é satisfeita na maioria das treliças. Em treliças de pontes, o pavimento é normalmente colocado sobre vigas cruzadas que são apoiadas nos nós, como mostrado na Fig. 4/1.

Para treliças grandes, um rolete, suporte oscilante ou algum tipo de junta deslizante é usado em um dos apoios para permitir dilatação e contração devido a variações de temperatura ou deformações devidas às cargas aplicadas. Treliças e suportes nos quais não se faça este tipo de previsão são estaticamente indeterminados, como explicado na Seção 3/3. A Fig. 3/1 mostra exemplos desses tipos de nós.

Dois métodos para a análise de forças em treliças simples serão colocados. Cada método será explicado para a treliça

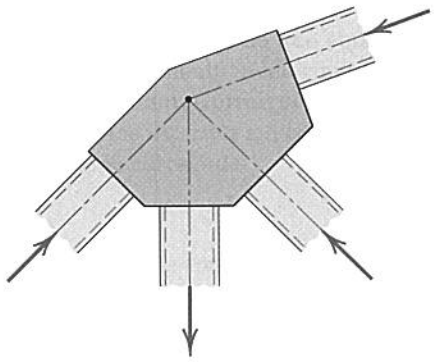
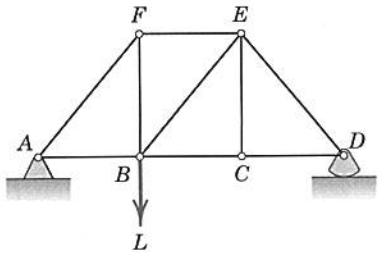


Figura 4/5



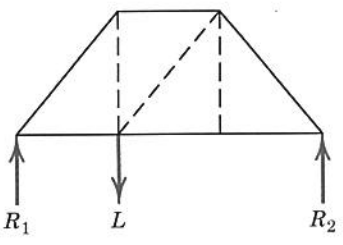


Figura 4/6 (b)

simples mostrada na Fig. 4/6*a*. O diagrama de corpo livre da treliça como um todo está mostrado na Fig. 4/6*b*. As reações externas são normalmente determinadas primeiro, aplicando as equações de equilíbrio à treliça como um todo. Em seguida, é realizada a análise de forças para o restante da treliça.

4/3 Método dos Nós

Este método para determinação das forças nos elementos de uma treliça consiste em satisfazer as condições de equilíbrio para as forças que atuam em cada nó. Portanto, o método lida com o equilíbrio de forças concorrentes e apenas duas equações de equilíbrio independentes estão envolvidas.

Começamos a análise com qualquer nó onde exista ao menos uma carga conhecida e onde não mais do que duas forças incógnitas estejam presentes. A solução pode ser iniciada pelo nó na extremidade esquerda. Seu diagrama de corpo livre está mostrado na Fig. 4/7. Com os nós indicados por letras, normalmente designamos a força em cada elemento pelas duas letras que definem as suas extremidades. As direções corretas das forças devem ser evidentes por inspeção, nesse caso simples. Os diagramas de corpo livre de partes dos elementos *AF* e *AB* também estão mostrados para indicar claramente o mecanismo de ação e reação. O elemento *AB* na verdade faz contato no lado esquerdo do nó, apesar da força *AB* estar desenhada a partir do lado direito e estar mostrada agindo no sentido de se afastar do nó. Assim, se desenharmos de maneira consistente as setas das forças do *mesmo* lado do nó em que está o elemento, a força de tração (tal como *AB*) sempre será indicada por uma seta que se *afasta* do nó e a força de compressão (tal como *AF*) sempre estará indicada por uma seta apontando *para* o nó. O módulo de *AF* é obtido a partir da equação $\Sigma F_y = 0$ e *AB* é então determinado de $\Sigma F_x = 0$.

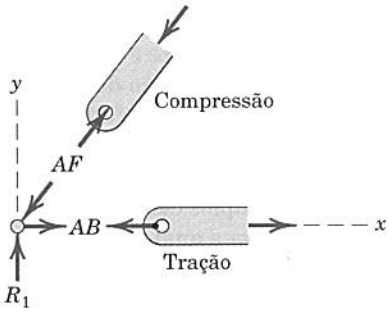


Figura 4/7

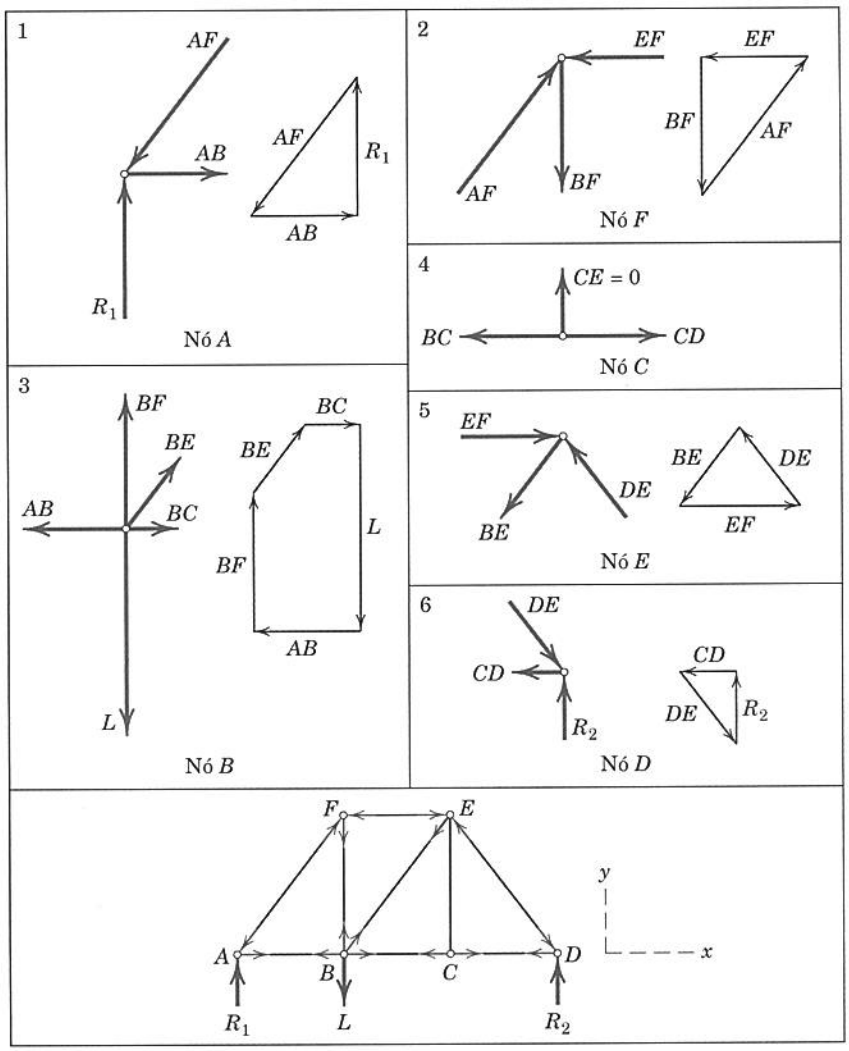


Figura 4/8

© Stephen Wilkes/The Image Bank/Getty Images

A estrutura dessa ponte da cidade de Nova York sugere que elementos de uma treliça simples não precisam ser retos.

O nó F pode ser analisado em seguida, já que agora ele contém apenas duas incógnitas, EF e BF. Prosseguindo para o próximo nó que tenha não mais do que duas incógnitas, analisamos subseqüentemente os nós B, C, E e D, nesta ordem. A Fig. 4/8 mostra o diagrama de corpo livre para cada nó e seu polígono de forças correspondente, que representa graficamente as duas condições de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$. Os números indicam a ordem na qual os nós são analisados. Observe que quando se chega finalmente ao nó D, a reação calculada R_2 deve estar em equilíbrio com as forças nos elementos CD e ED, que foram determinadas anteriormente dos dois nós vizinhos. Esta condição fornece uma verificação de que o cálculo está correto. Note que isolar o nó C mostra que a força em CE é zero quando a equação $\Sigma F_y = 0$ for aplicada. A força neste elemento não seria zero, evidentemente, se uma carga vertical externa fosse aplicada em C.

Muitas vezes é conveniente indicar a força de tração T e a de compressão C dos vários elementos diretamente no diagrama original da treliça, desenhando setas se afastando dos nós, para tração, e apontando para os nós, para compressão. Esta notação está ilustrada na parte de baixo da Fig. 4/8.

Algumas vezes não podemos, inicialmente, atribuir o sentido correto para uma ou ambas as forças incógnitas atuando em um dado nó. Neste caso, podemos fazer uma atribuição arbitrária. Uma força calculada negativamente indica que o sentido assumido inicialmente está incorreto.

Redundância Interna e Externa

Se uma treliça plana tem mais apoios externos do que os necessários para garantir uma configuração de equilíbrio estável, a treliça como um todo é estaticamente indeterminada e os apoios extras constituem redundância *externa*. Se uma treliça tem mais elementos internos do que os necessários para evitar colapso quando a treliça é removida de seus apoios, então os elementos extras constituem redundância *interna* e a treliça é, novamente, estaticamente indeterminada.

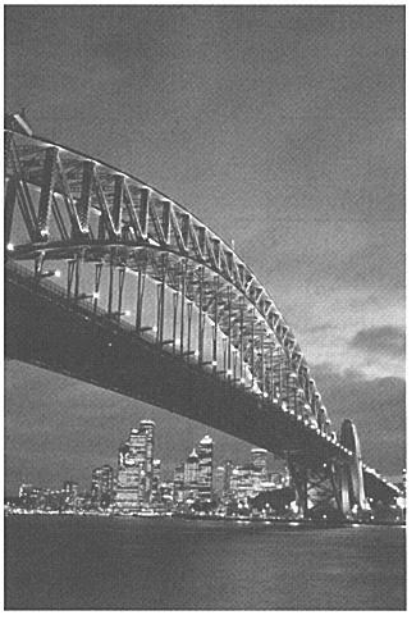
Para uma treliça que é estaticamente determinada externamente existe uma relação específica entre o número de seus elementos e o número de seus nós, necessária para haver estabilidade interna sem redundância. Como podemos especificar o equilíbrio de cada nó por duas equações escalares de força, existem ao todo $2j$ equações deste tipo para uma treliça com j nós. Para a treliça completa composta de m elementos de duas forças e tendo no máximo três reações de apoio desconhecidas, existem no total $m + 3$ incógnitas (m forças de tração ou compressão e três reações). Assim, para qualquer treliça plana, a equação $m + 3 = 2j$ será satisfeita se a treliça é estaticamente determinada internamente.

Uma treliça plana *simples*, formada inicialmente a partir de um triângulo e na qual são adicionados dois novos elementos para posicionar cada novo nó em relação à estrutura existente, satisfaz a relação automaticamente. A condição vale para o triângulo inicial, para o qual $m = j = 3$, e m aumenta de 2 para cada nó adicionado enquanto j aumenta de 1. Algumas outras treliças (não simples) estaticamente determinadas, tais como a treliça em K na Fig. 4/2, são organizadas diferentemente, mas pode-se mostrar que satisfazem a mesma relação.

Esta equação é uma condição necessária para estabilidade, mas não é uma condição suficiente, já que um ou mais dos m elementos pode ser organizado de forma a não contribuir para uma configuração estável da treliça como um todo. Se $m + 3 > 2j$, existem mais elementos do que equações independentes e a treliça é estaticamente indeterminada internamente com elementos redundantes presentes. Se $m + 3 < 2j$, existe carência de elementos internos e a treliça é instável e entrará em colapso quando carregada.

Condições Especiais

É comum encontrar diversas condições especiais na análise de treliças. Quando dois elementos colineares estão sob compressão, como indicado na Fig. 4/9a, é necessário adicio-


© Photodisc/Media Bakery

A ponte Harbour Bridge em Sidney, Austrália

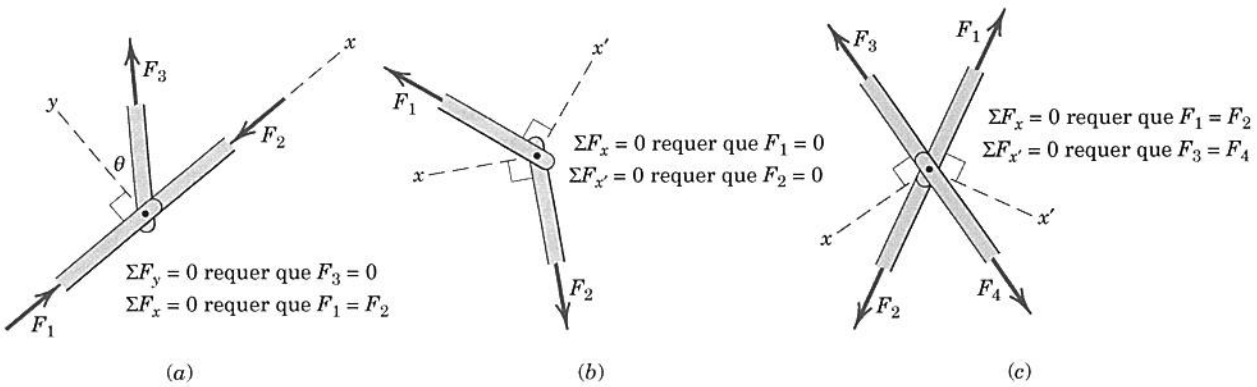


Figura 4/9

nar um terceiro elemento para manter o alinhamento dos dois elementos e prevenir flambagem. A partir de um somatório de forças na direção y vê-se que a força F_3 no terceiro elemento deve ser zero, e que na direção x, $F_1 = F_2$. Esta conclusão é válida independentemente do ângulo θ e também se os elementos colineares estão sob tração. Se uma força externa com uma componente na direção y fosse aplicada ao nó, então F_3 não valeria mais zero.

Quando dois elementos não colineares são unidos como mostrado na Fig. 4/9*b*, então, na ausência de uma carga externa aplicada a este nó, as forças em ambos os elementos devem ser zero, como podemos ver através dos dois somatórios de força.

Quando dois pares de elementos colineares estão unidos como mostrado na Fig. 4/9*c*, as forças em cada par devem ser iguais e opostas. Esta conclusão deriva dos somatórios de força indicados na figura.

É comum usar tirantes cruzados em painéis de treliças, como mostrado na Fig. 4/10*a*. Este tipo de painel é estaticamente indeterminado se cada tirante puder suportar tanto tração quanto compressão. No entanto, quando os tirantes são elementos flexíveis incapazes de suportar compressão, tal como são os cabos, então apenas o elemento em tração atua e podemos ignorar o outro elemento. A partir da assimetria do carregamento, é normalmente evidente como o painel defletirá. Se a deflexão for como a indicada na Fig. 4/10*b*, então o elemento *AB* deverá ser mantido e o elemento *CD* ignorado. Quando esta escolha não puder ser feita por inspeção, podemos escolher arbitrariamente o elemento a ser mantido. Se a força de tração considerada for positiva no cálculo, a escolha terá sido correta. Se a força de tração assumida se mostra negativa, então o elemento oposto deve ser mantido e o cálculo refeito.

Podemos evitar a resolução simultânea das equações de equilíbrio para duas forças incógnitas em um nó, através da escolha cuidadosa dos eixos de referência. Assim, para o nó indicado esquematicamente na Fig. 4/11, onde L é conhecido e F_1 e F_2 são incógnitas, um somatório de forças na direção x elimina qualquer referência a F_1 e um somatório de forças na direção x' elimina qualquer referência a F_2. Quando os ângulos envolvidos não são facilmente determinados, então pode ser preferível a resolução simultânea das equações usando um único conjunto de direções de referência para as duas incógnitas.

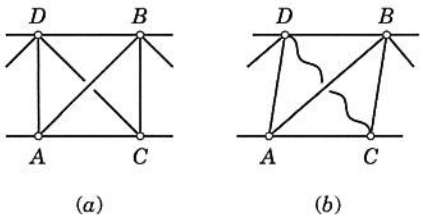


Figura 4/10

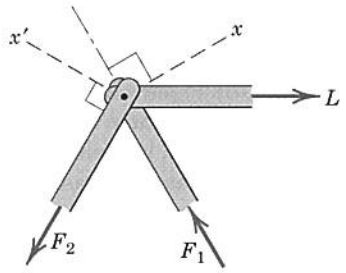
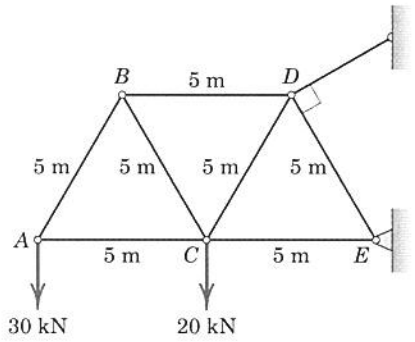


Figura 4/11

Exemplo 4/1

Calcule, pelo método dos nós, a força em cada elemento da treliça em balanço carregada.

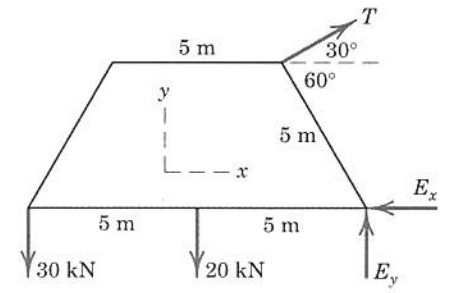


Solução. Se não fosse desejado calcular as reações externas em D e E, a análise para a treliça em balanço poderia começar pelo nó na extremidade carregada. No entanto, esta treliça será analisada completamente, de forma que o primeiro passo será calcular as forças externas em D e E a partir do diagrama de corpo livre da treliça como um todo. As equações de equilíbrio fornecem

$$[\Sigma M_E = 0] \qquad 5T - 20(5) - 30(10) = 0 \qquad T = 80 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad 80 \cos 30° - E_x = 0 \qquad E_x = 69{,}3 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 80 \operatorname{sen} 30° + E_y - 20 - 30 = 0 \qquad E_y = 10 \text{ kN}$$



Em seguida desenhamos diagramas de corpo livre mostrando as forças que atuam em cada um dos nós. A correta atribuição dos sentidos assumidos para as forças é verificada quando cada nó é considerado em seqüência. Não deve haver dúvida quanto ao sentido correto das forças no nó A. O equilíbrio requer

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 0{,}866AB - 30 = 0 \qquad AB = 34{,}6 \text{ kN } T \qquad \textit{Resp.}$$

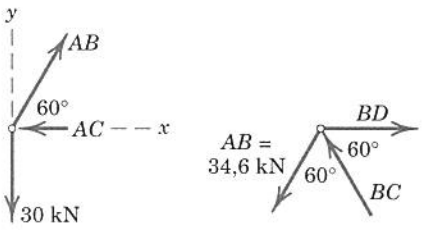
$$[\Sigma F_x = 0] \qquad AC - 0{,}5(34{,}6) = 0 \qquad AC = 17{,}32 \text{ kN } C \qquad \textit{Resp.}$$

① onde T significa tração e C significa compressão.

O nó B deve ser analisado em seguida, já que existem mais do que duas forças incógnitas no nó C. A força BC deve dar uma componente para cima e, portanto, BD deve equilibrar a força à esquerda. Novamente, as forças são obtidas de

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 0{,}866BC - 0{,}866(34{,}6) = 0 \qquad BC = 34{,}6 \text{ kN } C \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad BD - 2(0{,}5)(34{,}6) = 0 \qquad BD = 34{,}6 \text{ kN } T \qquad \textit{Resp.}$$



Nó A Nó B

O nó C agora contém apenas duas incógnitas que são determinadas da mesma forma que antes:

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 0{,}866CD - 0{,}866(34{,}6) - 20 = 0$$

$$CD = 57{,}7 \text{ kN } T \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad CE - 17{,}32 - 0{,}5(34{,}6) - 0{,}5(57{,}7) = 0$$

$$CE = 63{,}5 \text{ kN } C \qquad \textit{Resp.}$$

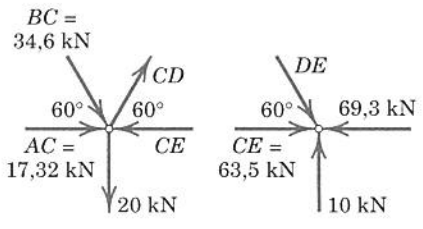
Finalmente, do nó E resulta

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 0{,}866DE = 10 \qquad DE = 11{,}55 \text{ kN } C \qquad \textit{Resp.}$$

e a equação $\Sigma F_x = 0$ é verificada.

Sugestão Útil

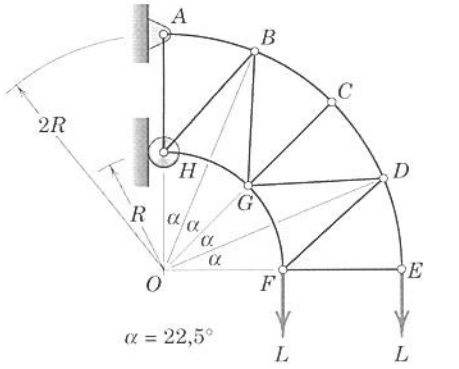
① Deve ser enfatizado que a designação tra-tiva/compressiva se refere ao *elemento*, não ao nó. Observe que desenhamos a seta da força do mesmo lado do nó em que o elemento que exerce a força. Desta forma, tração (seta se afastando do nó) é distinguida de compressão (seta apontando para o nó).



Nó C Nó E

Exemplo 4/2

A treliça simples mostrada suporta duas cargas, cada uma de módulo L. Determine as forças nos elementos DE, DF, DG e CD.

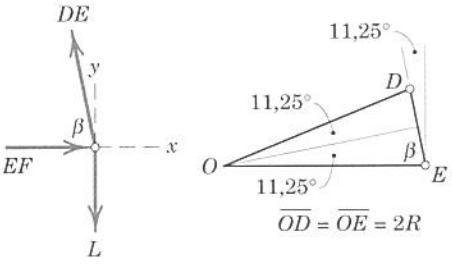


Solução. Observamos, primeiramente, que os elementos curvos dessa treliça simples são todos elementos de duas forças, de modo que o efeito de cada elemento curvo na treliça é o mesmo que o de um elemento retilíneo.

Podemos começar com o nó E, porque existem apenas duas forças incógnitas atuando aí. Referindo-se ao diagrama de corpo livre e à geometria respectiva para o nó E, observamos que $\beta = 180° - 11{,}25° - 90° = 78{,}8°$.

① $[\Sigma F_y = 0]$ $\quad DE \operatorname{sen} 78{,}8° - L = 0 \quad DE = 1{,}020L\ T$ *Resp.*

$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad EF - DE \cos 78{,}8° = 0 \quad EF = 0{,}1989L\ C$



Devemos agora nos mover para o nó F, já que ainda existem três forças incógnitas no nó D. A partir do diagrama geométrico,

$$\gamma = \tan^{-1}\left[\frac{2R \operatorname{sen} 22{,}5°}{2R \cos 22{,}5° - R}\right] = 42{,}1°$$

A partir do diagrama de corpo livre da junta F,

$[\Sigma F_x = 0]$ $\quad -GF \cos 67{,}5° + DF \cos 42{,}1° - 0{,}1989L = 0$

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad GF \operatorname{sen} 67{,}5° + DF \operatorname{sen} 42{,}1° - L = 0$

A solução simultânea dessas duas equações leva a

$$GF = 0{,}646L\ T \qquad DF = 0{,}601L\ T \qquad \textit{Resp.}$$

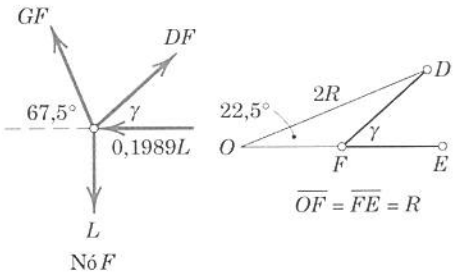
Sugestão Útil

① Em vez de calcular e usar o ângulo $\beta = 78{,}8°$ nas equações de força, poderíamos ter usado diretamente o ângulo de 11,25°.

Para o elemento DG, nos movemos para o diagrama de corpo livre do nó D e a sua respectiva geometria.

$$\delta = \tan^{-1}\left[\frac{2R \cos 22{,}5° - 2R \cos 45°}{2R \operatorname{sen} 45° - 2R \operatorname{sen} 22{,}5°}\right] = 33{,}8°$$

$$\epsilon = \tan^{-1}\left[\frac{2R \operatorname{sen} 22{,}5° - R \operatorname{sen} 45°}{2R \cos 22{,}5° - R \cos 45°}\right] = 2{,}92°$$



Então, a partir do nó D:

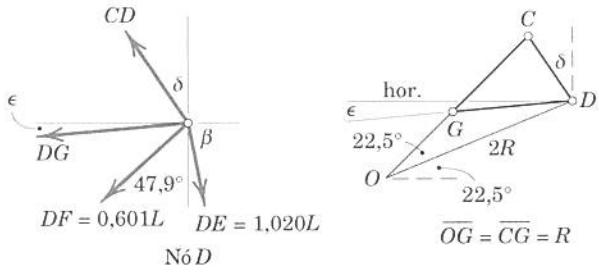
$[\Sigma F_x = 0]$ $-DG \cos 2{,}92° - CD \operatorname{sen} 33{,}8° - 0{,}601L \operatorname{sen} 47{,}9° + 1{,}020L \cos 78{,}8° = 0$

$[\Sigma F_y = 0]$ $-DG \operatorname{sen} 2{,}92° + CD \cos 33{,}8° - 0{,}601L \cos 47{,}9° - 1{,}020L \operatorname{sen} 78{,}8° = 0$

Cuja solução simultânea é

$CD = 1{,}617L\ T \qquad DG = -1{,}147L$ ou $DG = 1{,}147L\ C$ *Resp.*

Observe que ϵ está com uma representação exagerada nas figuras que acompanham esse exemplo.

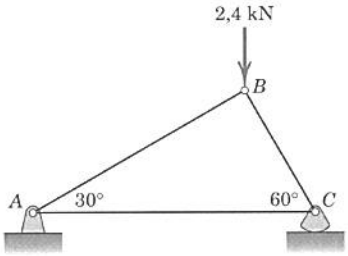


PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

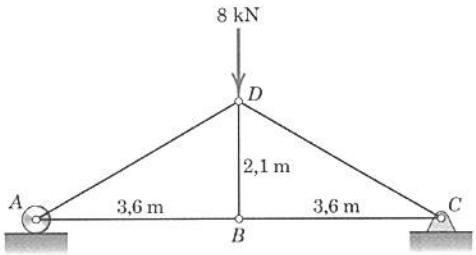
4/1 Determine a força em cada elemento da treliça carregada. Explique por que não é necessário conhecer o comprimento dos elementos.

Resp. $AB = 1{,}2$ kN C, $AC = 1{,}039$ kN T
$BC = 2{,}08$ kN C



Problema 4/1

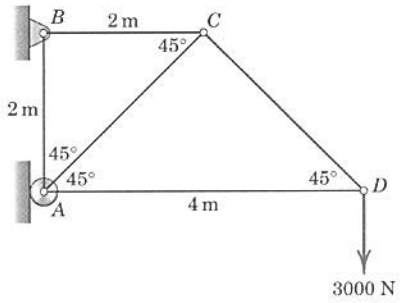
4/2 Determine a força em cada elemento da treliça carregada. Identifique, por inspeção, qualquer elemento de força nula.



Problema 4/2

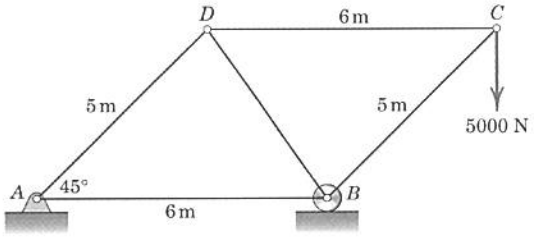
4/3 Determine a força em cada elemento da treliça carregada.

Resp. $AB = 3000$ N T, $AC = 4240$ N C, $CD = 4240$ N T
$AD = 3000$ N C, $BC = 6000$ N T



Problema 4/3

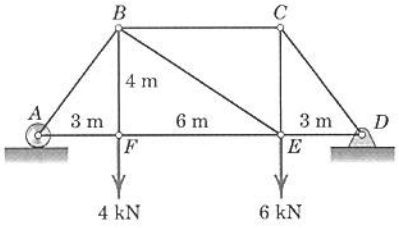
4/4 Determine a força em cada elemento da treliça carregada.



Problema 4/4

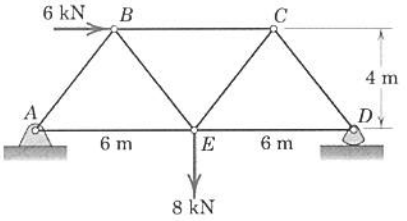
4/5 Determine a força em cada elemento da treliça carregada.

Resp. $AB = 5{,}63$ kN C, $AF = 3{,}38$ kN T
$BC = 4{,}13$ kN C, $BE = 0{,}901$ kN T
$BF = 4$ kN T, $CD = 6{,}88$ kN C
$CE = 5{,}50$ kN T, $DE = 4{,}13$ kN T
$EF = 3{,}38$ kN T



Problema 4/5

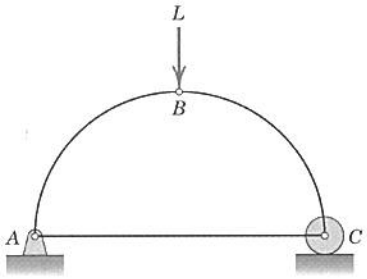
4/6 Calcule a força em cada elemento da treliça carregada. Todos os triângulos são isósceles.



Problema 4/6

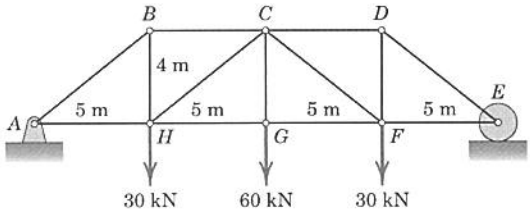
4/7 Determine a força no elemento AC da treliça carregada. Os dois elementos com formato de 1/4 de um círculo atuam como elementos de duas forças.

Resp. $AC = \dfrac{L}{2}T$



Problema 4/7

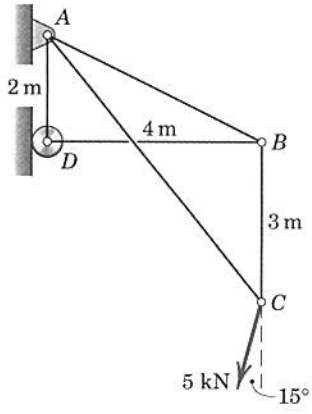
4/8 Determine a força em cada elemento da treliça carregada. Utilize a simetria da treliça e do carregamento.



Problema 4/8

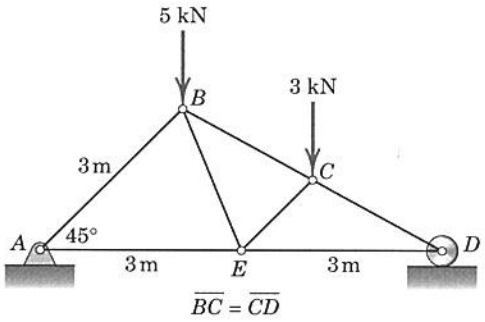
4/9 Determine a força em cada elemento da treliça carregada.

Resp. $AB = 14{,}42$ kN T, $AC = 2{,}07$ kN C, $AD = 0$
$BC = 6{,}45$ kN T, $BD = 12{,}89$ kN C



Problema 4/9

4/10 Determine as forças nos elementos *BE* e *CE* da treliça carregada.

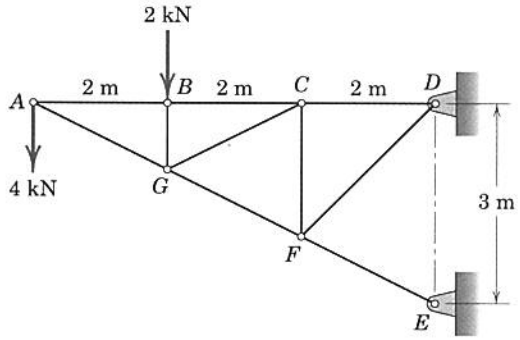


Problema 4/10

Problemas Representativos

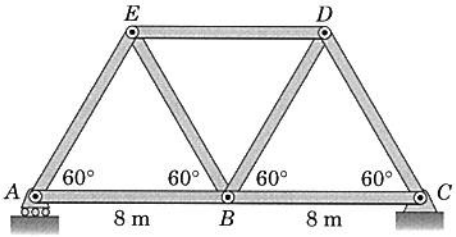
4/11 Calcule as forças nos elementos *CG* e *CF* para a treliça mostrada.

Resp. $CG = 2{,}24$ kN T, $CF = 1$ kN C



Problema 4/11

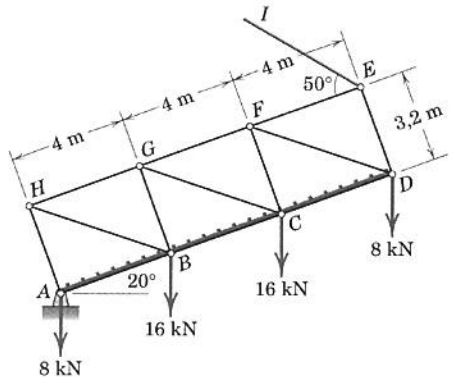
4/12 Cada elemento da treliça é uma barra uniforme de 8 m pesando 400 kg. Calcule a tração ou compressão média em cada elemento, devida aos pesos dos elementos.



Problema 4/12

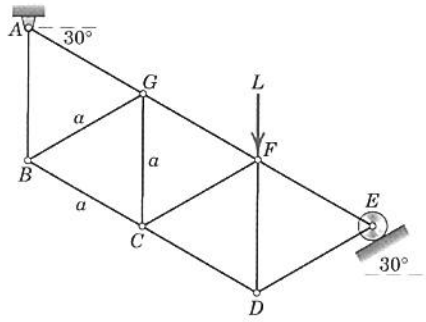
4/13 Uma ponte levadiça está sendo levantada por um cabo *EI*. As quatro cargas mostradas nos nós são devidas ao peso do pavimento. Determine as forças nos elementos *EF*, *DE*, *DF*, *CD* e *FG*.

Resp. $EF = 15{,}46$ kN C, $DE = 18{,}43$ kN T
$DF = 17{,}47$ kN C, $CD = 10{,}90$ kN T
$FG = 29{,}1$ kN C



Problema 4/13

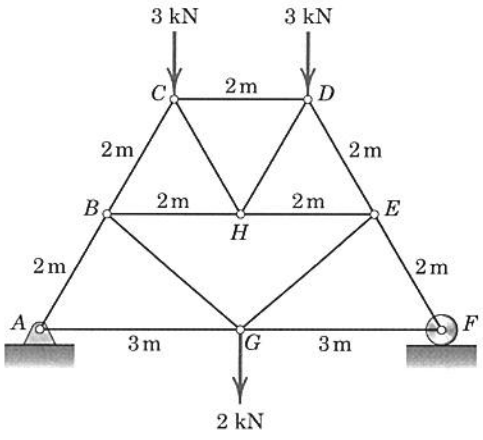
4/14 A treliça é formada por triângulos equiláteros de lado a e está carregada e apoiada como mostrado. Determine as forças nos elementos *EF*, *DE* e *DF*.



Problema 4/14

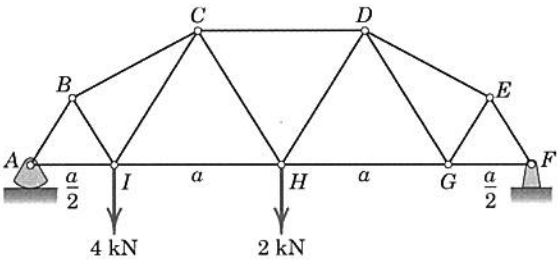
4/15 Determine as forças nos elementos *BC* e *BG* da treliça carregada.

Resp. $BC = 3{,}46$ kN C, $BG = 1{,}528$ kN T



Problema 4/15

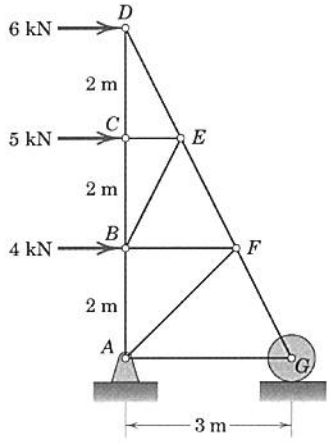
4/16 Determine as forças nos elementos *BI*, *CI* e *HI* para a treliça carregada. Todos os ângulos são 30°, 60° ou 90°.



Problema 4/16

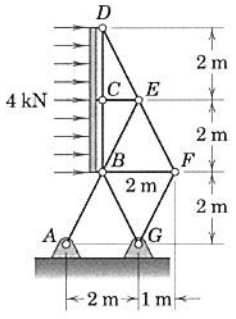
4/17 Determine as forças nos elementos *AF*, *BE*, *BF* e *CE* da treliça carregada.

Resp. $AF = 6{,}13$ kN T, $BE = 5{,}59$ kN T
$BF = 6{,}50$ kN C, $CE = 5$ kN C



Problema 4/17

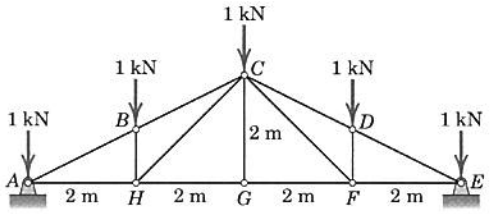
4/18 A treliça da placa de sinalização é projetada para suportar uma carga horizontal de 4 kN devida ao vento. Uma análise separada mostra que 5/8 dessa força são transmitidos para o nó central em *C* e o restante é dividido igualmente entre *D* e *B*. Calcule as forças nos elementos *BE* e *BC*.



Problema 4/18

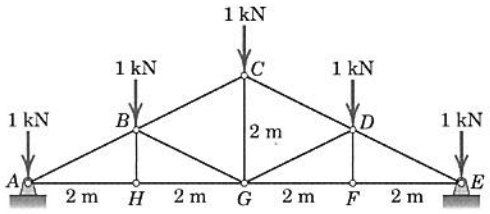
4/19 Uma carga devida a neve transfere as forças mostradas aos nós superiores de um telhado em forma de treliça Pratt. Despreze quaisquer reações horizontais nos apoios e determine as forças em todos os elementos.

Resp. $AB = DE = BC = CD = 3{,}35$ kN C
$AH = EF = 3$ kN T, $BH = DF = 1$ kN C
$CF = CH = 1{,}414$ kN T, $FG = GH = 2$ kN T



Problema 4/19

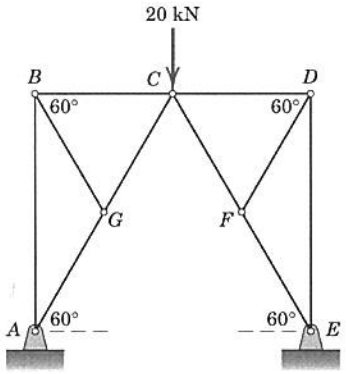
4/20 O carregamento do Prob. 4/19 é mostrado aplicado a um telhado em forma de treliça Howe. Despreze quaisquer reações horizontais nos apoios e determine as forças em todos os elementos. Compare com os resultados do Prob. 4/19.



Problema 4/20

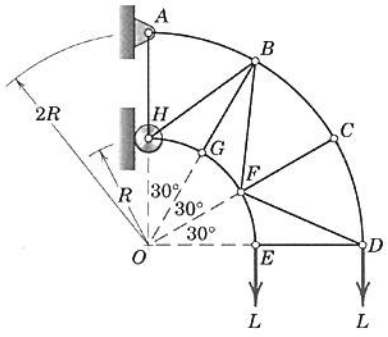
4/21 Determine a força em cada elemento do par de treliças que suporta a carga de 20 kN no nó comum *C*.

Resp. $AB = BC = BG = 0$, $AG = CG = 11{,}55$ kN C



Problema 4/21

4/22 Determine a força no elemento *BF* da treliça carregada.



Problema 4/22

4/23 O quadro retangular é composto de quatro elementos perimetrais de duas forças e de dois cabos *AC* e *BD* que são incapazes de

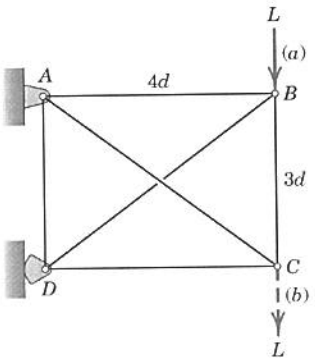
suportar compressão. Determine as forças em todos os elementos devidas à carga L na posição (a) e depois na posição (b).

Resp. (*a*) $AB = AD = BD = 0, BC = L\ C$

$$AC = \frac{5L}{3}\ T, CD = \frac{4L}{3}\ C$$

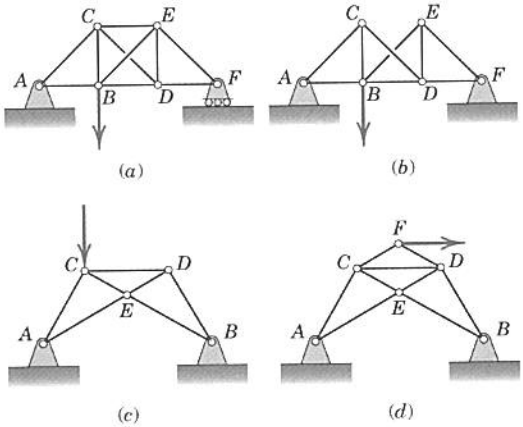
(*b*) $AB = AD = BC = BD = 0$

$$AC = \frac{5L}{3}\ T, CD = \frac{4L}{3}\ C$$



Problema 4/23

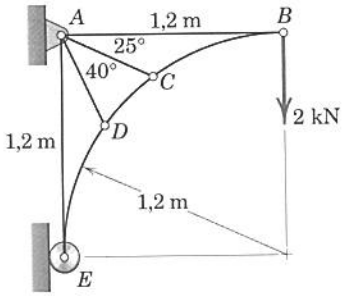
4/24 Verifique o fato de que cada treliça contém um ou mais elementos de redundância e proponha duas mudanças distintas, cada uma das quais deve eliminar a redundância e gerar uma estrutura estaticamente determinada completamente. Todos os elementos podem suportar compressão e tração.



Problema 4/24

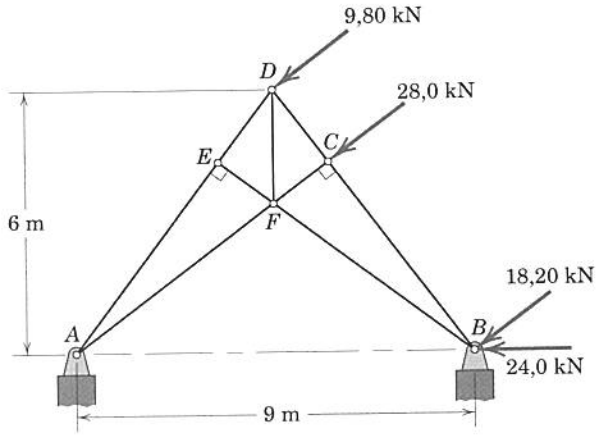
4/25 Determine as forças nos elementos AC e AD da treliça carregada.

Resp. $AC = AD = 3{,}12$ kN C



Problema 4/25

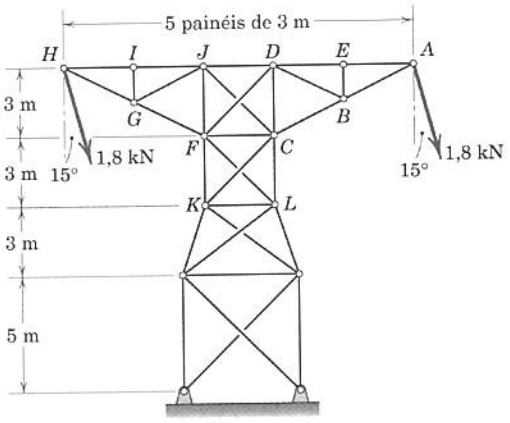
4/26 A análise do vento atuando em uma pequena igreja do Havaí, que suportou os ventos de 280 km/h do furacão Iniki em 1992, mostrou que as forças transmitidas para cada um dos painéis de treliça do telhado foram como indicado. Trate a estrutura como uma treliça simples simétrica e despreze qualquer componente horizontal da reação do apoio em A. Identifique o elemento da treliça que suporta a maior força, em tração ou compressão, e calcule esta força.



Problema 4/26

▶4/27 A torre para uma linha de transmissão é modelada pela treliça mostrada. Pode-se considerar que os elementos cruzados nas seções centrais da treliça somente suportam tração. Calcule as forças induzidas nos elementos AB, DB e CD, para as cargas de 1,8 kN aplicadas no plano vertical.

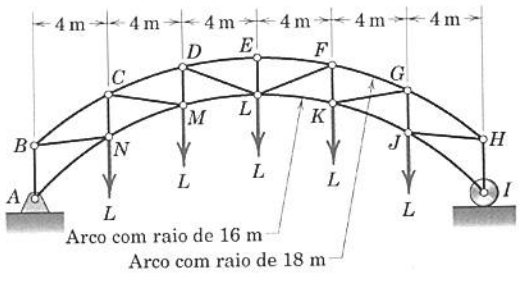
Resp. $AB = 3{,}89$ kN $C, DB = 0, CD = 0{,}932$ kN C



Problema 4/27

▶4/28 Determine a força no elemento CM da treliça carregada.

Resp. $CM = 3{,}41L\ T$



Problema 4/28

4/4 Método das Seções

Ao se analisar treliças planas pelo método dos nós, precisamos de apenas duas das três equações de equilíbrio porque os procedimentos envolvem forças concorrentes em cada nó. Podemos tirar vantagem da terceira equação ou equação de equilíbrio dos momentos, selecionando uma seção inteira da treliça para o corpo livre em equilíbrio sob a ação de um sistema de forças não concorrentes. Este *método das seções* tem a vantagem básica de que a força em praticamente qualquer elemento de interesse pode ser determinada diretamente da análise de uma seção que corte o elemento. Assim, não é necessário fazer o cálculo de nó a nó até que o elemento em questão seja atingido. Ao escolher uma seção da treliça observamos que, em geral, não mais do que três elementos cujas forças são desconhecidas devem ser cortados, pois existem apenas três relações de equilíbrio independentes disponíveis.

Ilustração do Método

O método das seções será agora ilustrado para a treliça na Fig. 4/6, que foi usada na explicação do método dos nós. A treliça está mostrada novamente na Fig. 4/12*a* para referência imediata. As reações externas são inicialmente calculadas como no método dos nós, considerando a treliça como um todo.

Vamos determinar a força no elemento BE, por exemplo. Uma seção imaginária, indicada pela linha tracejada, é passada pela treliça, cortando-a em duas partes, Fig. 4/12*b*. Essa seção corta três elementos cujas forças são inicialmente desconhecidas. Para que a porção da treliça de cada lado da seção se mantenha em equilíbrio, é necessário aplicar a cada elemento cortado a força que era exercida sobre ele pelo elemento que foi cortado fora. Para treliças simples compostas de elementos retilíneos de duas forças, estas forças, sejam trativas ou compressivas, sempre estarão na direção dos respectivos elementos. A seção da esquerda está em equilíbrio sob a ação da força aplicada L, da reação na extremidade R_1 e das três forças exercidas nos elementos cortados pela seção da direita, que foi removida.

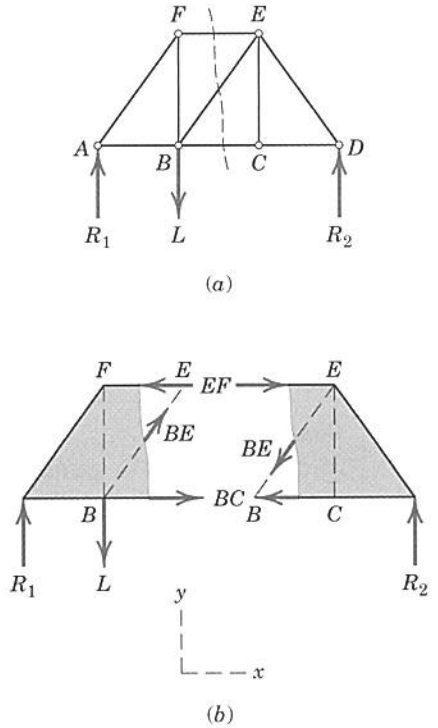


Figura 4/12

Normalmente, podemos desenhar as forças com seus sentidos corretos por meio de uma aproximação visual dos requisitos para haver equilíbrio. Desta forma, ao equilibrar os momentos em relação ao ponto B para a seção da esquerda, a força EF é claramente para a esquerda, o que a torna compressiva, porque ela atua na direção da seção cortada do elemento EF. A carga L é maior do que a reação R_1, de forma que a força BE deve ser para cima e para a direita para dar o componente para cima necessário para o equilíbrio vertical. A força BE é, portanto, trativa, já que ela atua para longe da seção cortada.

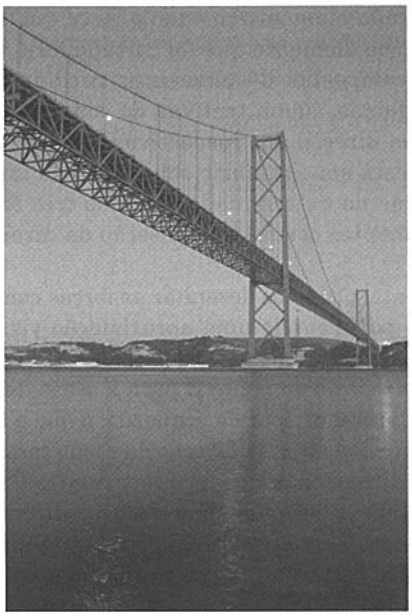
Com os módulos aproximados de R_1 e L em mente, vemos que o equilíbrio de momentos em torno do ponto E requer que BC seja para a direita. Uma olhada casual sobre a treliça deveria levar à mesma conclusão quando se percebe que o elemento horizontal inferior se distenderá sob o efeito trativo causado pela flexão. A equação de momentos em torno do nó B elimina três forças da relação e EF pode ser determinada diretamente. A força BE é calculada da equação de equilíbrio para a direção y. Finalmente, determinamos BC equilibrando os momentos em torno do ponto E. Desta forma, cada uma das três incógnitas foi determinada independentemente das outras duas.

A seção à direita da treliça, Fig. 4/12*b*, está em equilíbrio sob a ação de R_2 e das mesmas três forças nos elementos cortados aplicadas nos sentidos opostos aos da seção à esquerda. O sentido correto para as forças horizontais pode ser facilmente visualizado do equilíbrio de momentos em torno dos pontos B e E.

Considerações Adicionais

É essencial entender que no método das seções uma porção inteira da treliça é considerada como um único corpo em equilíbrio. Assim, as forças em elementos internos à seção não estão envolvidas na análise da seção como um todo. Para tornar claros o corpo livre e as forças que atuam externamente nele, a seção de corte passa, preferencialmente, através dos elementos e não dos nós. Podemos usar qualquer parte de uma treliça para os cálculos, mas a que envolver o menor número de forças fornecerá, normalmente, a solução mais simples.

Em alguns casos, os métodos das seções e dos nós podem ser combinados para uma solução eficiente. Por exemplo, suponha que desejemos encontrar a força em um elemento central de uma grande treliça. Além disso, suponha que não é possível passar uma seção por este elemento sem passar por pelo menos quatro elementos desconhecidos. Pode ser possível determinar as forças em elementos vizinhos pelo método das seções e então progredir até o elemento desconhecido pelo método dos nós. Este tipo de combinação dos dois méto-



© Photodisc/Media Bakery

Muitas treliças simples são periódicas, já que existem seções estruturais idênticas e repetitivas.

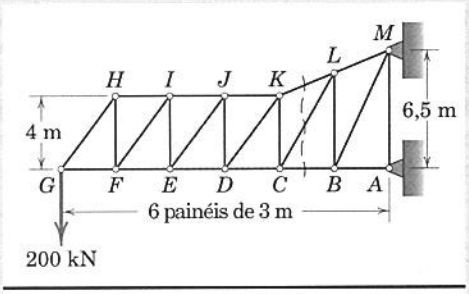
dos pode ser mais eficiente do que o uso exclusivo de um ou outro método.

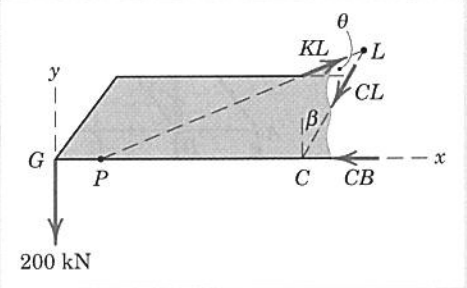
As equações de momento trazem grande vantagem ao método das seções. Deve-se escolher um centro de momento, na seção ou fora dela, através do qual passam tantas forças incógnitas quanto possível.

Nem sempre é possível atribuir o sentido correto de uma força incógnita quando o diagrama de corpo livre de uma seção é inicialmente desenhado. Uma vez que uma atribuição arbitrária seja feita, uma resposta positiva confirmará o sentido suposto e um resultado negativo mostrará que a força está no sentido oposto ao assumido. Uma notação alternativa preferida por alguns é definir arbitrariamente todas as forças incógnitas como positivas no sentido trativo (para longe da seção) e deixar o sinal algébrico da resposta distinguir entre tração e compressão. Desta forma, um sinal positivo significaria tração e um sinal negativo significaria compressão. Por outro lado, a vantagem de atribuir, sempre que possível, forças em seu sentido correto no diagrama de corpo livre de uma seção é que isto enfatiza a ação física das forças mais diretamente e esta prática é a preferida aqui.

Exemplo 4/3

Calcule as forças induzidas nos elementos KL, CL e CB pela carga de 200 kN na treliça em balanço.





Solução. Apesar das componentes verticais das reações em A e M serem estaticamente indeterminadas devido aos dois suportes fixos, todos os elementos, exceto AM, são estaticamente determinados. Podemos passar uma seção diretamente através dos elementos KL, CL e CB e analisar a porção da treliça à esquerda desta seção como um corpo ① rígido estaticamente determinado.

O diagrama de corpo livre da parte da treliça à esquerda da seção está mostrado. O somatório de momentos em relação a L verifica rapidamente a atribuição de CB como compressiva e um somatório de momentos em relação a C mostra rapidamente que KL está sob tração. O sentido de CL não é tão evidente até que observemos que KL e CB se interceptam em um ponto P à direita de G. Um somatório de momentos em relação a P elimina referência a KL e CB e mostra que CL deve ser compressiva para equilibrar o momento da força de 200 kN em relação a P. Com estas considerações em mente, a solução se torna direta, já que agora vemos como determinar cada uma das três incógnitas independentemente das outras duas.

② Fazer o somatório dos momentos em relação a L requer determinar o braço de alavanca $\overline{BL} = 4 + (6{,}5 - 4)/2 = 5{,}25$m. Assim,

$$[\Sigma M_L = 0] \qquad 200(5)(3) - CB(5{,}25) = 0 \qquad CB = 571 \text{ kN } C \qquad \textit{Resp.}$$

Em seguida fazemos os momentos em relação a C, o que requer o cálculo de cos θ. Das dimensões dadas vemos que $\theta = \tan^{-1}(5/12)$, de forma que cos $\theta = 12/13$. Portanto,

$$[\Sigma M_C = 0] \qquad 200(4)(3) - \tfrac{12}{13}KL(4) = 0 \qquad KL = 650 \text{ kN } T \qquad \textit{Resp.}$$

Finalmente, podemos encontrar CL por um somatório de momentos em relação a P, cuja distância até C é dada por $\overline{PC}/4 = 6/(6{,}5 - 4)$ ou $\overline{PC} = 9{,}60$m. Precisamos também de β, que é dado por $\beta = \tan^{-1}(\overline{CB}/\overline{BL}) = \tan^{-1}(3/5{,}25) = 29{,}7°$ e cos $\beta = 0{,}868$. Agora temos

③ $$[\Sigma M_p = 0] \qquad 200(12 - 9{,}60) - CL(0{,}868)(9{,}60) = 0$$

$$CL = 57{,}6 \text{ kN } C \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestões Úteis

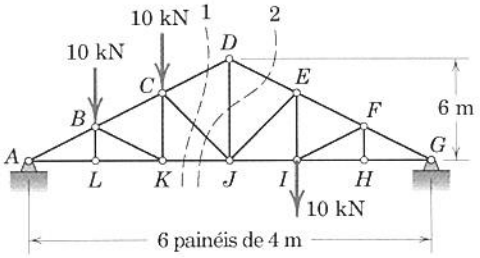
① Observamos que a análise pelo método dos nós requereria trabalhar com oito nós para calcular as três forças em questão. Assim, o método das seções oferece uma vantagem considerável neste caso.

② Poderíamos ter começado com momentos em relação a C ou P também.

③ Poderíamos ter determinado CL por um somatório de forças tanto na direção x quanto na direção y.

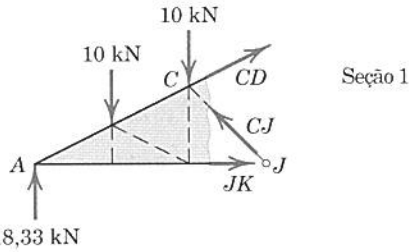
Exemplo 4/4

Calcule a força no elemento DJ da treliça de telhado Howe ilustrada. Despreze quaisquer componentes horizontais de força nos apoios.



Solução. Não é possível passar uma seção por DJ sem cortar quatro elementos cujas forças sejam desconhecidas. Apesar de três destes elementos, cortados pela seção 2, serem concorrentes em J e, portanto, a equação dos momentos em relação a J poder ser usada para obter DE, a força em DJ não pode ser obtida a partir dos dois princípios de equilíbrio remanescentes. É necessário considerar primeiro a seção 1 adjacente antes de analisar a seção 2.

O diagrama de corpo livre da seção 1 está desenhado e inclui a reação de 18,33 kN em A, que é previamente calculada do equilíbrio da treliça como um todo. Ao atribuir os sentidos adequados para as forças atuando nos três elementos cortados, vemos que um equilíbrio de momentos em relação a A elimina os efeitos de CD e JK e claramente requer que CJ seja para cima e para a esquerda. Um equilíbrio de momentos em relação a C elimina o efeito das três forças concorrentes em C e indica que JK deve ser para a direita para prover suficiente momento anti-horário. Novamente, deveria ser bastante claro que a barra inferior está sob tração devido à tendência à flexão da treliça. Apesar de dever ser também aparente que a barra superior está sob compressão, para efeito de ① ilustração a força em CD será arbitrariamente tratada como trativa.



Pela análise da seção 1, CJ é obtido de

$$[\Sigma M_A = 0] \qquad 0{,}707CJ(12) - 10(4) - 10(8) = 0 \qquad CJ = 14{,}14 \text{ kN } C$$

Nessa equação o momento de CJ é calculado considerando suas componentes horizontal e vertical atuando no ponto J. O equilíbrio de momentos em relação a J requer

$$[\Sigma M_J = 0] \qquad 0{,}894CD(6) + 18{,}33(12) - 10(4) - 10(8) = 0$$

$$CD = -18{,}63 \text{ kN}$$

O momento de CD em relação a J é calculado aqui considerando que suas duas compo- ② nentes atuam através de D. O sinal de menos indica que foi atribuído o sentido errado a CD.

Então, $$CD = 18{,}63 \text{ kN } C$$

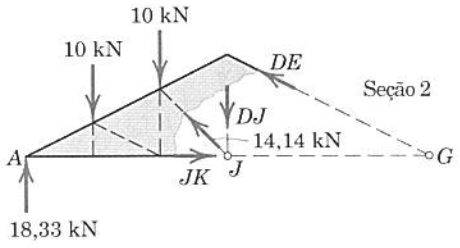
③ Do diagrama de corpo livre da seção 2, que agora inclui o valor conhecido de CJ, um equilíbrio de momentos em relação a G elimina DE e JK. Assim,

$$[\Sigma M_G = 0] \qquad 12DJ + 10(16) + 10(20) - 18{,}33(24) - 14{,}14(0{,}707)(12) = 0$$

$$DJ = 16{,}67 \text{ kN } T \qquad \textit{Resp.}$$

Novamente, o momento de CJ é determinado de suas componentes, considerando que elas atuam em J. A resposta para DJ é positiva, de forma que o sentido trativo assumido está correto.

Um enfoque alternativo para o problema todo é utilizar a seção 1 para determinar CD e então usar o método dos nós aplicado à D para determinar DJ.



Sugestões Úteis

① Não há problema em atribuir uma ou mais forças no sentido errado, desde que os cálculos sejam consistentes com a suposição. Uma resposta negativa mostrará a necessidade de reverter o sentido da força.

② Se desejado, o sentido de CD pode ser mudado no diagrama de corpo livre e o sinal algébrico de CD revertido nos cálculos. Ou então, pode-se deixar o trabalho como está, com uma nota informando o sentido correto.

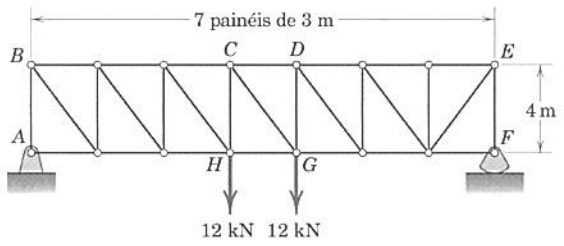
③ Observe que poder-se-ia tomar uma seção através dos elementos CD, DJ e DE, que cortaria apenas três elementos desconhecidos. No entanto, como as forças nestes elementos são todas concorrentes em D, uma equação de momentos em relação a D não daria nenhuma informação sobre elas. As duas equações de força remanescentes não seriam suficientes para determinar as três incógnitas.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

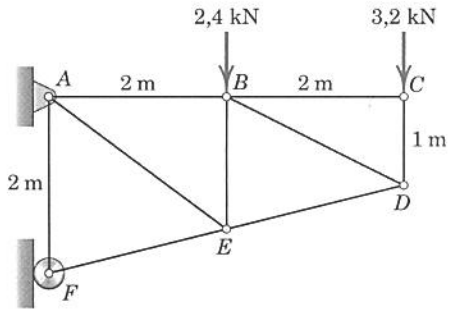
4/29 Determine as forças nos elementos CG e GH.

Resp. $CG = 0, GH = 27$ kN T



Problema 4/29

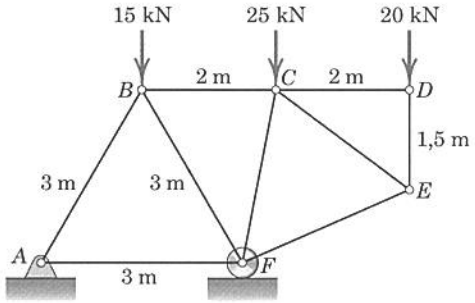
4/30 Determine a força no elemento AE da treliça carregada.



Problema 4/30

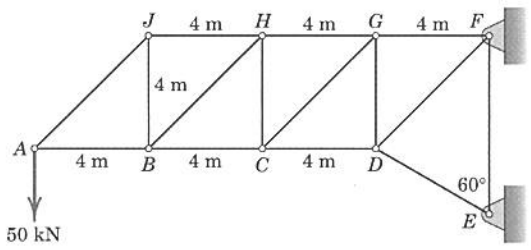
4/31 Determine a força no elemento BC da treliça carregada.

Resp. $BC = 24{,}1$ kN T



Problema 4/31

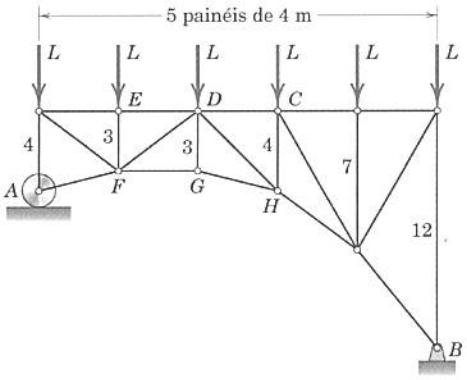
4/32 Determine as forças nos elementos GH e CG para a treliça carregada e apoiada como mostrado. A indeterminação estática dos apoios afeta seu cálculo?



Problema 4/32

4/33 Determine a força no elemento DG da treliça carregada.

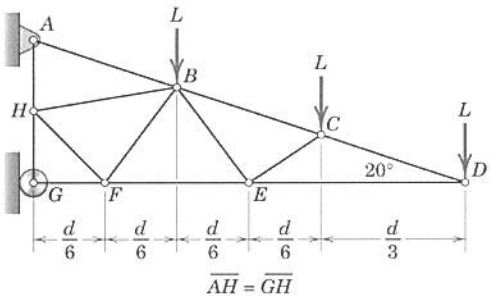
Resp. $DG = LT$



Dimensões em metros

Problema 4/33

4/34 Determine a força no elemento BE da treliça carregada.

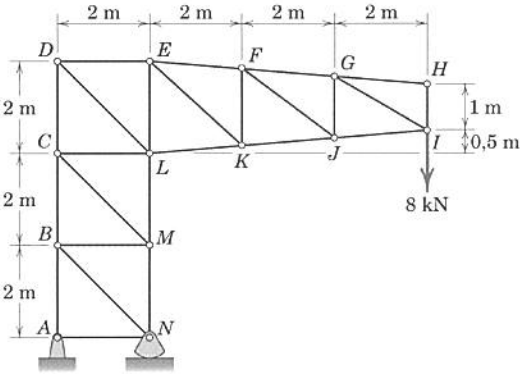


Problema 4/34

Problemas Representativos

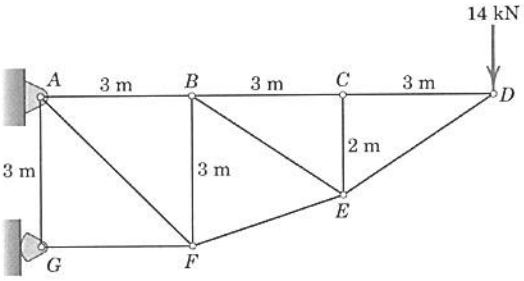
4/35 Determine as forças nos elementos DE e DL.

Resp. $DE = 24$ kN T, $DL = 33{,}9$ kN C



Problema 4/35

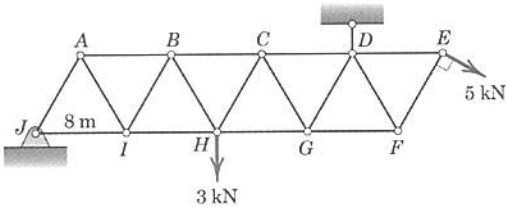
4/36 Calcule as forças nos elementos BC, BE e EF. Determine cada força a partir de uma equação de equilíbrio que a contenha como a única incógnita.



Problema 4/36

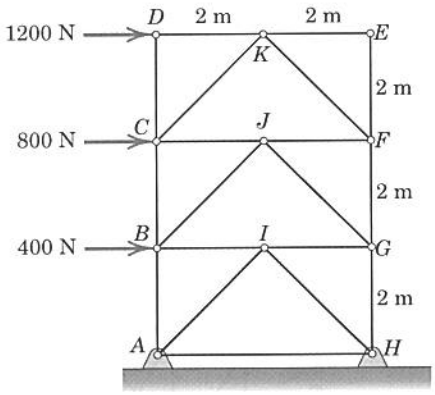
4/37 Calcule as forças nos elementos *BC*, *CD* e *CG* da treliça carregada, formada por triângulos equiláteros, com lados de 8 m de comprimento.

Resp. $BC = 1{,}155$ kN T, $CD = 5{,}20$ kN T
$CG = 4{,}04$ kN C



Problema 4/37

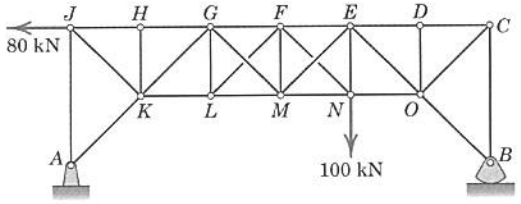
4/38 Determine as forças nos elementos *BC* e *FG* da treliça simétrica carregada. Mostre que esse cálculo pode ser realizado usando uma seção e duas equações, cada uma das quais contendo apenas uma das duas incógnitas. Os resultados são afetados pela indeterminação estática dos apoios na base?



Problema 4/38

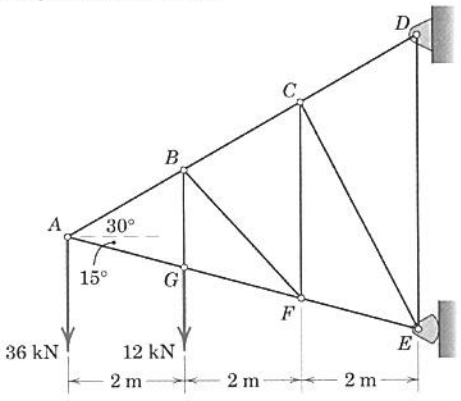
4/39 A treliça mostrada é formada por triângulos retângulos de 45°. Os elementos cruzados nos dois painéis centrais são barras de amarração esbeltas incapazes de suportar compressão. Mantenha as duas barras que estão sob tração e calcule os módulos de suas forças trativas. Encontre também a força no elemento *MN*.

Resp. $FN = GM = 84{,}8$ kN T, $MN = 20$ kN T



Problema 4/39

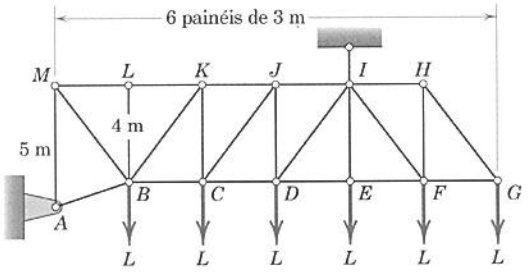
4/40 Determine a força no elemento *BF*.



Problema 4/40

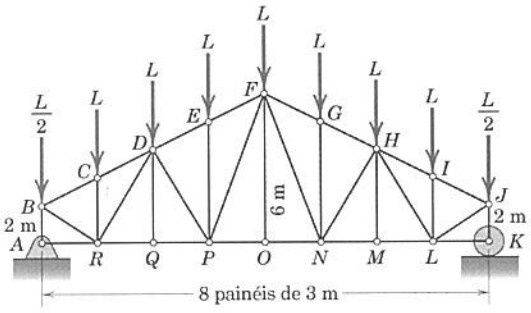
4/41 Determine as forças nos elementos *CD*, *CJ* e *DJ*.

Resp. $CD = 0{,}562L$ C, $CJ = 1{,}562L$ T
$DJ = 1{,}250L$ C



Problema 4/41

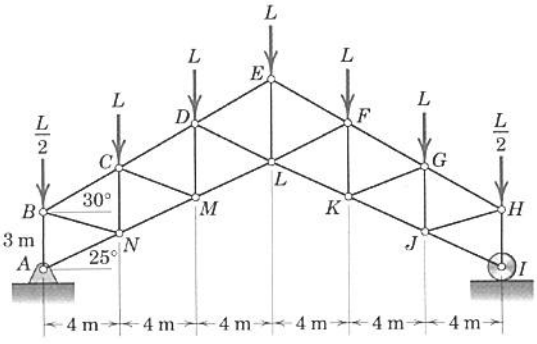
4/42 Calcule a força no elemento *HN* da treliça carregada.



Problema 4/42

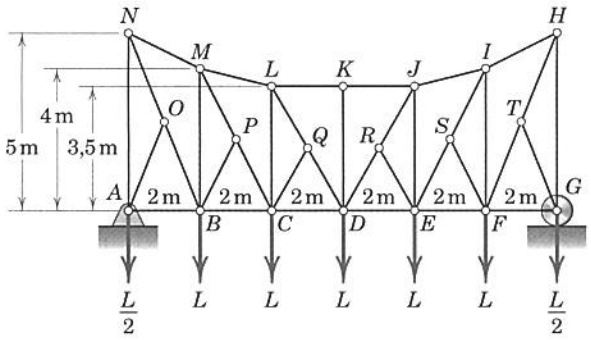
4/43 Determine as forças nos elementos *DE*, *DL*, *LM* e *EL* da treliça simétrica carregada.

Resp. $DE = 4{,}80L$ C, $DL = 0{,}0446L$ T, $LM = 4{,}54L$ T
$EL = 3{,}80L$ T



Problema 4/43

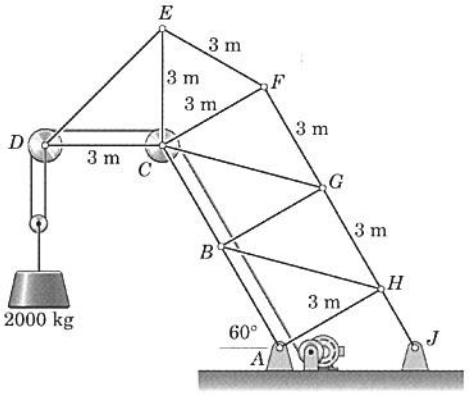
4/44 Determine as forças nos elementos *DQ* e *CQ* da treliça simétrica carregada.



Problema 4/44

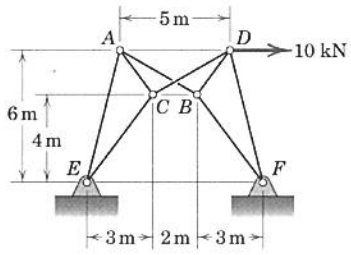
4/45 Calcule as forças nos elementos *CB*, *CG* e *FG* da treliça carregada, sem calcular primeiro a força em qualquer outro elemento.

Resp. $CB = 56{,}2$ kN C, $CG = 13{,}87$ kN T
$FG = 19{,}62$ kN T



Problema 4/45

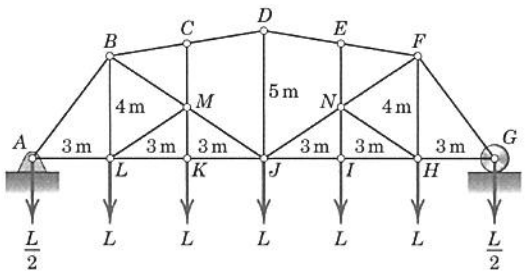
4/46 Os quadros articulados *ACE* e *DFB* estão ligados por duas barras articuladas, *AB* e *CD*, que se cruzam sem estarem interligadas. Calcule a força em *AB*.



Problema 4/46

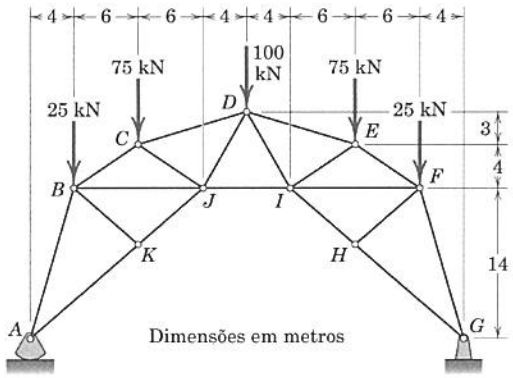
4/47 Determine a força no elemento *JM* da treliça carregada.

Resp. $JM = 0{,}0901L$ T



Problema 4/47

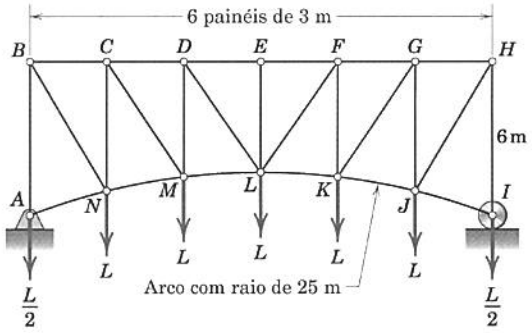
4/48 Determine as forças nos elementos *DE*, *EI*, *FI* e *HI* da treliça em arco de um telhado.



Problema 4/48

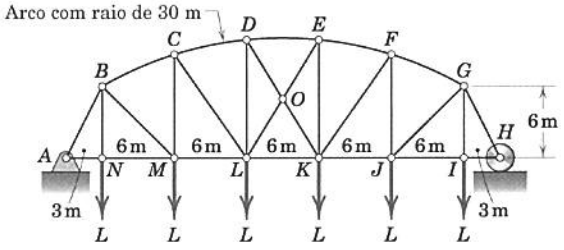
4/49 Determine a força no elemento *GK* da treliça simétrica carregada.

Resp. $GK = 2{,}13L$ T



Problema 4/49

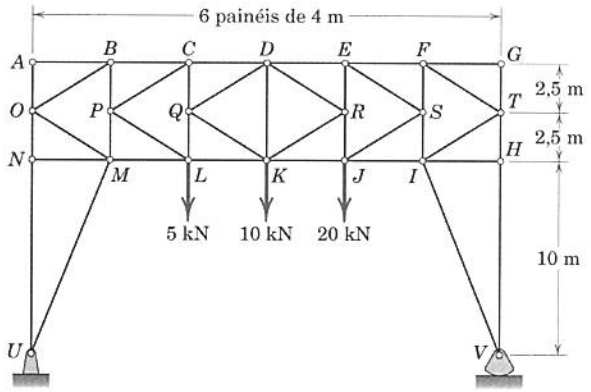
4/50 Determine a força no elemento *CL* da treliça carregada. O raio de curvatura da corda superior *BCDEFG* vale 30 m.



Problema 4/50

▶4/51 Determine a força no elemento *DK* da treliça para placas de sinalização carregada.

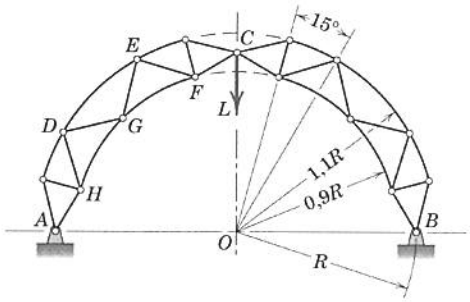
Resp. $DK = 5$ kN T



Problema 4/51

▶**4/52** Determine a força no elemento *DG* da treliça composta. Todas as juntas se situam em linhas radiais subentendendo ângulos de 15° como indicado, e os elementos curvos agem como elementos de duas forças. Distância $\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OB} = R$.

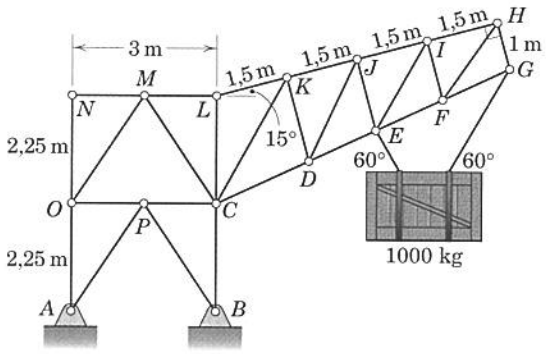
Resp. $DG = 0{,}569L\ C$



Problema 4/52

▶**4/53** Determine a força no elemento *CK* da treliça carregada.

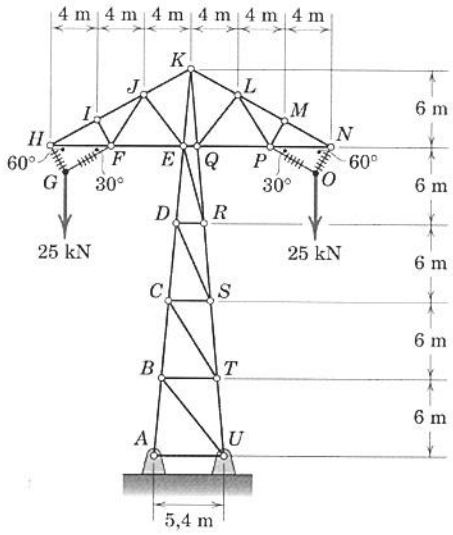
Resp. $CK = 9290$ N C



Problema 4/53

▶**4/54** Um modelo de projeto para uma torre de linha de transmissão está mostrado na figura. Os elementos *GH*, *FG*, *OP* e *NO* são cabos isolados; todos os outros elementos são barras de aço. Para o carregamento mostrado, calcule as forças nos elementos *FI*, *FJ*, *EJ*, *EK* e *ER*. Use uma combinação de métodos se desejado.

Resp. $FI = ER = 0$, $FJ = 7{,}81$ kN T
$EJ = 3{,}61$ kN C, $EK = 22{,}4$ kN C



Problema 4/54

4/5 Treliças Espaciais

Uma *treliça espacial* é o equivalente tridimensional da treliça plana descrita nas três seções anteriores. A treliça espacial idealizada consiste de conexões rígidas unidas em suas extremidades por juntas articuladas (este tipo de junta foi ilustrado na Fig. 3/8 da Seção 3/4). Enquanto para a treliça plana, um triângulo de barras unidas por pinos forma a unidade básica não colapsável, uma treliça espacial, por outro lado, requer seis barras unidas em suas extremidades, formando as arestas de um tetraedro, como a unidade básica não colapsável. Na Fig. 4/13*a* as duas barras *AD* e *BD* unidas em *D* requerem um terceiro apoio *CD* para evitar que o triângulo *ADB* gire em torno de *AB*. Na Fig. 4/13*b* a base de apoio é substituída por três outras barras *AB*, *BC* e *AC* para formar um tetraedro que não depende da base para sua própria rigidez.

Podemos formar uma nova unidade rígida para estender a estrutura, com três barras concorrentes adicionais cujas extremidades são presas aos três nós fixos da estrutura existente. Assim, na Fig. 4/13*c* as barras *AF*, *BF* e *CF* são ligadas à fundação e, portanto, fixam o ponto *F* no espaço. Da mesma forma o ponto *H* é fixo no espaço pelas barras *AH*, *DH* e *CH*. As três barras adicionais *CG*, *FG* e *HG* são presas aos três pontos fixos *C*, *F* e *H* e, portanto, fixam o ponto *G* no espaço. O ponto fixo *E* é criado de maneira similar. Vemos agora que a estrutura é inteiramente rígida. As duas cargas aplicadas mostradas resultarão em forças sobre todos os elementos. Uma treliça espacial formada desta maneira é chamada de treliça espacial *simples*.

Idealmente, deve existir suporte pontual, tal como o dado por uma junta articulada, nas conexões de uma treliça espacial para impedir flexão dos elementos. Como nos nós rebitados ou soldados das treliças planas, se as linhas de centro

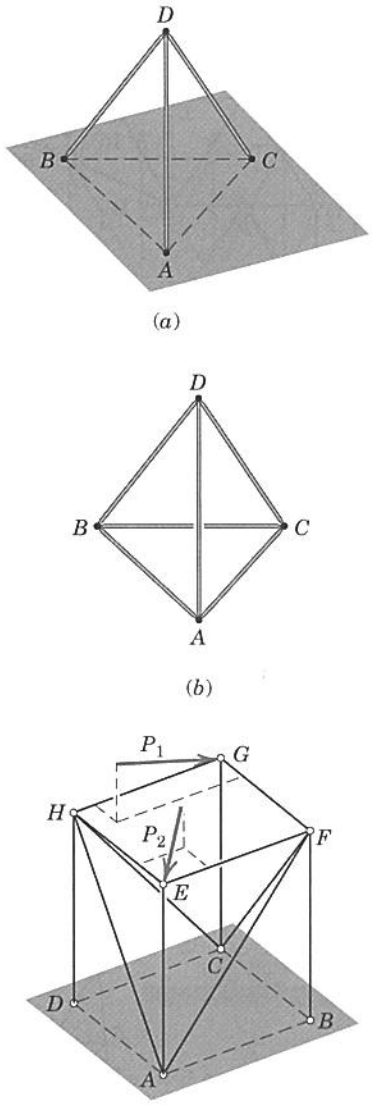


Figura 4/13

dos elementos unidos se interceptam em um ponto, podemos justificar a suposição de elementos de duas forças sob tração ou compressão simples.

Treliças Espaciais Estaticamente Determinadas

Quando uma treliça espacial é apoiada externamente de forma que ela seja estaticamente determinada como um todo, existe uma relação entre o número de seus nós e o número de elementos necessários para haver estabilidade interna sem redundância. Como o equilíbrio de cada nó é especificado por três equações escalares de força, existem ao total $3j$ equações deste tipo para uma treliça espacial com j nós. Para a treliça inteira composta de m elementos existem m incógnitas (as forças trativas ou compressivas nos elementos) mais seis incógnitas devido às reações nos apoios, no caso geral de uma estrutura espacial estaticamente determinada. Assim, para qualquer treliça espacial, a equação $m + 6 = 3j$ será satisfeita se a treliça é estaticamente determinada internamente. Uma treliça espacial *simples* satisfaz esta relação automaticamente. Começando com o tetraedro inicial, para o qual a equação é válida, a estrutura é estendida pela adição de três elementos e um nó de cada vez, preservando, assim, a validade da equação.

Como no caso de uma treliça plana, esta relação é uma condição necessária para estabilidade, mas não é uma condição suficiente já que um ou mais dos m elementos pode ser posicionado de tal forma que não contribua para uma configuração estável da treliça como um todo. Se $m + 6 > 3j$, existem mais elementos do que equações independentes e a treliça é estaticamente indeterminada internamente, com elementos redundantes presentes. Se $m + 6 < 3j$, existe uma carência de elementos internos e a treliça é instável e sujeita a colapso sob carga. Esta relação entre o número de nós e o número de elementos é muito útil no projeto preliminar de uma treliça espacial estável, já que a configuração não é tão óbvia como para uma treliça plana, onde a geometria para a determinação estática é, em geral, bem aparente.

Método dos Nós para Treliças Espaciais

O método dos nós desenvolvido na Seção 4/3 para treliças planas pode ser estendido diretamente para treliças espaciais, satisfazendo completamente a equação vetorial

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad (4/1)$$

para cada nó. Normalmente começamos a análise em um nó onde atuam pelo menos uma força conhecida e não mais do que três forças incógnitas. Nós adjacentes nos quais não mais do que três forças incógnitas atuem podem ser então analisados em seguida.

Esta técnica passo a passo, por nós, tende a minimizar o número de equações simultâneas a serem resolvidas quando devemos determinar as forças em todos os elementos da treliça espacial. Por esta razão, apesar de não ser facilmente reduzido a uma rotina, este enfoque é recomendado. No entanto, como procedimento alternativo, podemos simplesmente escrever $3j$ equações de nós aplicando a Eq. 4/1 a todos os

© Achim Gaasterland/laif/Redux

Esta treliça espacial é usada para sustentar equipamentos de observação em Bottrop, Alemanha.

nós da treliça espacial. O número de incógnitas será $m + 6$ se a estrutura não for colapsável quando for removida de seus apoios e estes apoios fornecerem seis reações externas. Se, por outro lado, não existirem elementos redundantes, então, o número de equações ($3j$) igualará o número de incógnitas ($m + 6$), e todo o sistema de equações pode ser resolvido simultaneamente para as incógnitas. Devido ao grande número de equações envolvidas, uma solução por computador é normalmente necessária. Com este último enfoque, não é necessário começar em um nó onde atuam ao menos uma força conhecida e não mais do que três incógnitas.

Método das Seções para Treliças Espaciais

O método das seções desenvolvido no item anterior também pode ser aplicado a treliças espaciais. As duas equações vetoriais

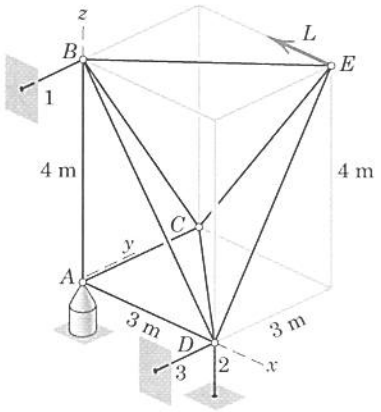
$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad \Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

devem ser satisfeitas para qualquer seção da treliça, onde o somatório dos momentos ser nulo valerá para todos os eixos de momento. Como as duas equações vetoriais são equivalentes a seis equações escalares, concluímos que uma seção não deve, em geral, passar através de mais do que seis elementos cujas forças sejam desconhecidas. No entanto, o método das seções para treliças espaciais não é muito usado porque raramente se encontra um eixo de momento que elimine todas, exceto uma, das incógnitas, como no caso de treliças planas.

A notação vetorial é bastante vantajosa para expressar os termos nas equações de força e momento para treliças espaciais, e é usada no exemplo que se segue.

Exemplo 4/5

A treliça espacial consiste do tetraedro rígido $ABCD$ ancorado por uma junta articulada em A e impedido de girar em torno dos eixos x, y e z, pelas conexões 1, 2 e 3, respectivamente. A carga L é aplicada ao nó E, que é preso rigidamente ao tetraedro pelas três conexões adicionais. Calcule as forças nos elementos do nó E e indique o procedimento para determinação das forças nos elementos restantes da treliça.



Solução. Primeiramente, notamos que a treliça está apoiada com seis restrições apropriadamente colocadas, que são as três em A e as conexões 1, 2 e 3. Além disso, com $m = 9$ elementos e $j = 5$ nós, a condição $m + 6 = 3j$ de suficiência de elementos para formar uma estrutura não colapsável é satisfeita.

As reações externas em A, B e D podem ser facilmente calculadas como um primeiro passo, apesar de seus valores virem a ser determinados a partir da solução seqüencial
① de todas as forças em cada um dos nós.

Começamos com um nó no qual atuem ao menos uma força conhecida e não mais do que três forças incógnitas que, neste caso, é o nó E. O diagrama de corpo livre do nó E está mostrado com todos os vetores de força arbitrariamente colocados em seus sentidos
② positivos de tração (saindo da junta). As expressões vetoriais para as três forças incógnitas são

$$\mathbf{F}_{EB} = \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j}),\ \mathbf{F}_{EC} = \frac{F_{EC}}{5}(-3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}),\ \mathbf{F}_{ED} = \frac{F_{ED}}{5}(-3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

O equilíbrio do nó E requer

$$[\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}] \qquad \mathbf{L} + \mathbf{F}_{EB} + \mathbf{F}_{EC} + \mathbf{F}_{ED} = \mathbf{0} \qquad \text{ou}$$

$$-L\mathbf{i} + \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \frac{F_{EC}}{5}(-3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) + \frac{F_{ED}}{5}(-3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

Rearrumando os termos dá

$$\left(-L - \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} - \frac{3F_{EC}}{5}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} - \frac{3F_{ED}}{5}\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{4F_{EC}}{5} - \frac{4F_{ED}}{5}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

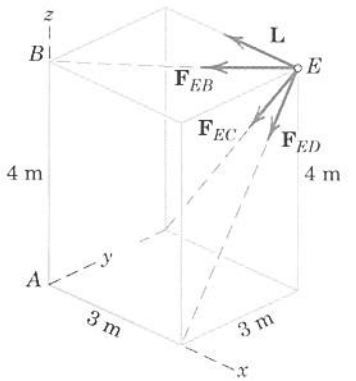
Igualando os coeficientes dos vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ a zero obtêm-se as três equações

$$\frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} + \frac{3F_{EC}}{5} = -L \qquad \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}} + \frac{3F_{ED}}{5} = 0 \qquad F_{EC} + F_{ED} = 0$$

Sugestões Úteis

① *Sugestão:* Desenhe um diagrama de corpo livre para a treliça como um todo e verifique que as forças externas atuando na treliça são $\mathbf{A}_x = L\mathbf{i}$, $\mathbf{A}_y = L\mathbf{j}$, $\mathbf{A}_z = (4L/3)\mathbf{k}$, $\mathbf{B}_y = 0$, $\mathbf{D}_y = -L\mathbf{j}$, $\mathbf{D}_z = -(4L/3)\mathbf{k}$.

② Com esta suposição, um valor numérico negativo para uma força indica compressão.



Resolvendo as equações obtemos

$$F_{EB} = -L/\sqrt{2} \qquad F_{EC} = -5L/6 \qquad F_{ED} = 5L/6 \qquad \textit{Resp.}$$

Assim, concluímos que F_{EB} e F_{EC} são forças compressivas e que F_{ED} é trativa.

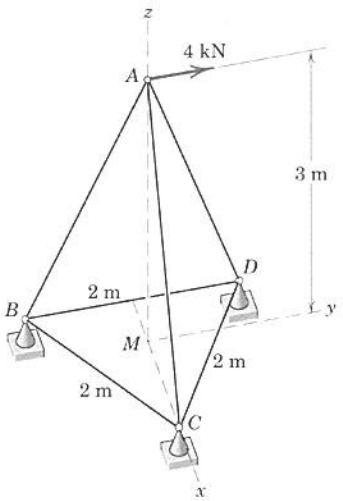
A menos que tenhamos calculado as reações externas primeiro, devemos analisar em seguida o nó C com o valor conhecido de F_{EC} e as três incógnitas F_{CB}, F_{CA} e F_{CD}. O procedimento é idêntico ao utilizado para o nó E. Os nós B, D e A são então analisados da mesma forma e nesta ordem, o que limita as incógnitas escalares a três para cada nó. As reações externas calculadas dessas análises devem, evidentemente, concordar com os valores que podem ser determinados inicialmente de um estudo da treliça como um todo.

PROBLEMAS

(Nos problemas a seguir use positivo para tração e negativo para compressão.)

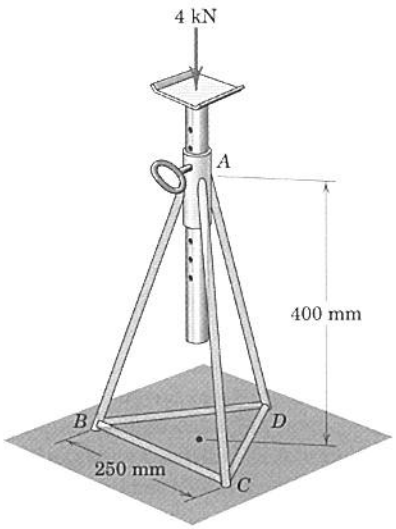
4/55 Determine as forças nos elementos AB, AC e AD. O ponto M é o centróide do triângulo BCD.

Resp. $T_{AB} = 6{,}43$ kN, $T_{AC} = 0$, $T_{AD} = -6{,}43$ kN.



Problema 4/55

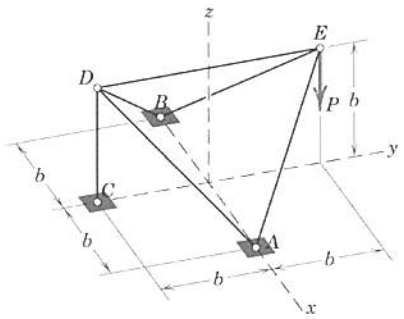
4/56 A base de um suporte para automóveis forma um triângulo equilátero com comprimento de aresta de 250 mm e está centrada em relação ao tubo cilíndrico A. Modele a estrutura como se fosse composta de nós articulados e determine as forças nos elementos BC, BC e CD. Despreze qualquer componente de reação horizontal sob os pés B, C e D.



Problema 4/56

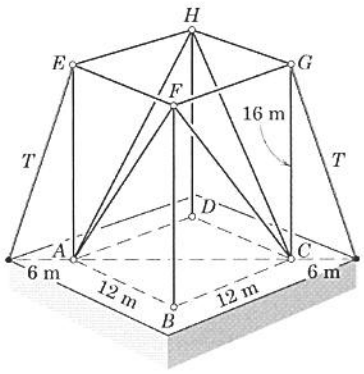
4/57 A treliça espacial com a forma de um tetraedro está sustentada por conexões articuladas nos pontos A e B na sua base e está impedida de girar em torno de AB pela barra vertical de amarração CD. Após escrever as componentes de reação verticais sob a treliça simétrica, em A e B, desenhe um diagrama de corpo livre da configuração triangular dos elementos BDE e determine a componente x da força exercida pela fundação da treliça em B.

Resp. $B_x = P$



Problema 4/57

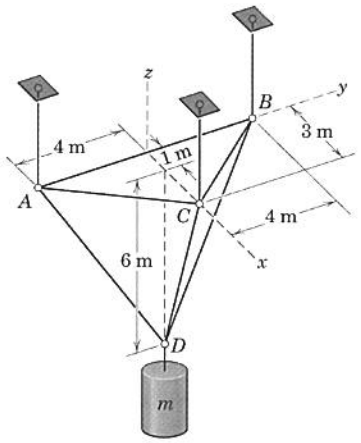
4/58 A treliça espacial retangular com 16 m de altura é erguida sobre uma base horizontal quadrada com 12 m de lado. Cabos de amarração são presos à estrutura em E e G como mostrado e são esticados até que a tração T em cada cabo valha 9 kN. Calcule a força F em cada elemento diagonal.



Problema 4/58

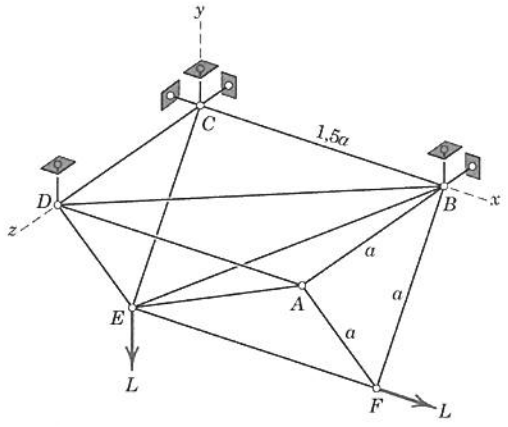
4/59 A treliça espacial tetraédrica tem uma base horizontal *ABC* na forma de um triângulo isósceles e pernas *AD*, *BD* e *CD* que suportam a massa *m* no ponto *D*. Cada vértice da base é suspenso por um cabo vertical preso em suportes superiores. Calcule as forças induzidas nos elementos *AC* e *AB*.

Resp. $F_{AC} = -\frac{5}{54}mg$, $F_{AB} = -\frac{4}{27}mg$



Problema 4/59

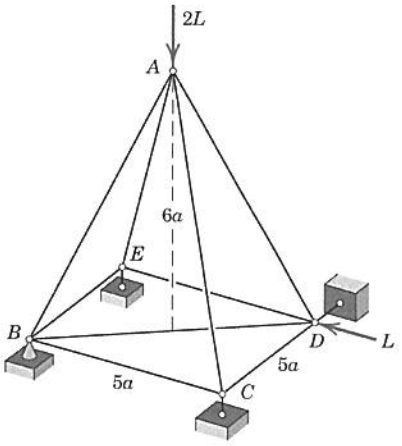
4/60 Para a treliça espacial mostrada, verifique a suficiência dos apoios e também o número e arranjo dos elementos para garantir que ela seja estaticamente determinada, tanto externa quanto internamente. Determine as forças nos elementos *AE*, *BE*, *BF* e *CE*.



Problema 4/60

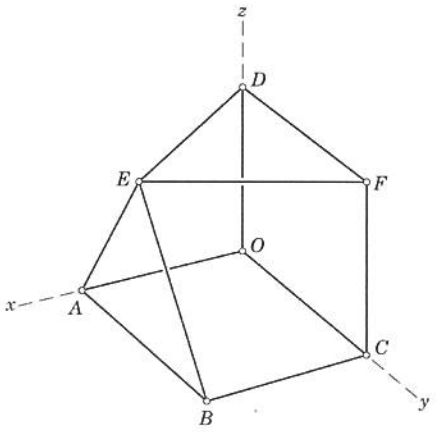
4/61 Determine a força no elemento *BD* da pirâmide regular de base quadrada.

Resp. $BD = -2{,}00L$



Problema 4/61

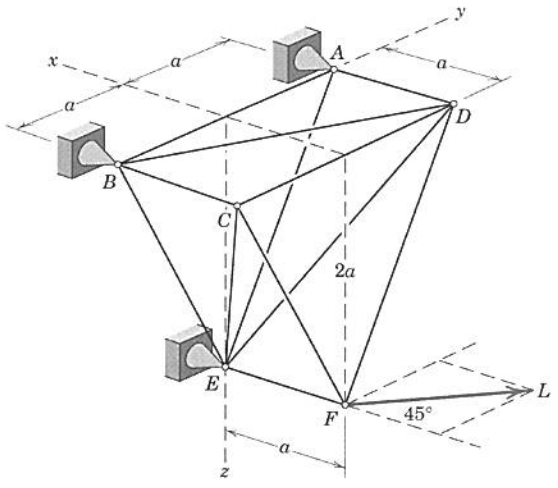
4/62 Uma treliça espacial está sendo projetada com os elementos mostrados. Quantos elementos adicionais são necessários para tornar a treliça estável internamente? Nomeie os elementos (especificando suas extremidades) que poderiam gerar uma possível configuração de estabilidade interna.



Problema 4/62

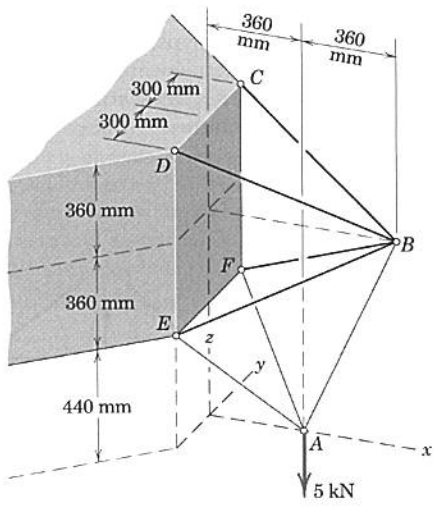
4/63 A treliça espacial mostrada está presa aos suportes fixos em *A*, *B* e *E* e está carregada pela força *L*, que tem componentes *x* e *y* iguais mas não tem componente *z* (vertical). Mostre que existe um número suficiente de elementos para garantir estabilidade interna e que seu posicionamento é adequado para este objetivo. Em seguida determine as forças nos elementos *CD*, *BC* e *CE*.

Resp. $F_{BC} = \frac{L\sqrt{2}}{4}$, $F_{CD} = 0$, $F_{CE} = -\frac{L\sqrt{3}}{2}$



Problema 4/63

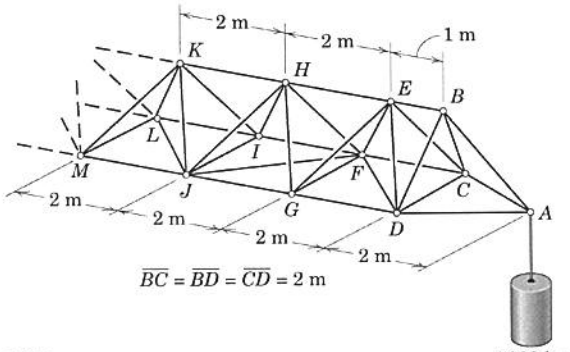
4/64 A seção *BCDEF* da treliça piramidal é simétrica em relação ao plano vertical *x*-*z* como mostrado. Os cabos *AE*, *AF* e *AB* suportam uma carga de 5 kN. Determine a força no elemento *BE*.



Problema 4/64

▶**4/65** A lança comprida de uma grua de construção, da qual uma parte é mostrada, é um exemplo de uma estrutura periódica composta por unidades estruturais iguais e repetidas. Use o método das seções para encontrar as forças nos elementos *FJ* e *GJ*.

Resp. $FJ = 0$, $BGJ = -70{,}8$ kN

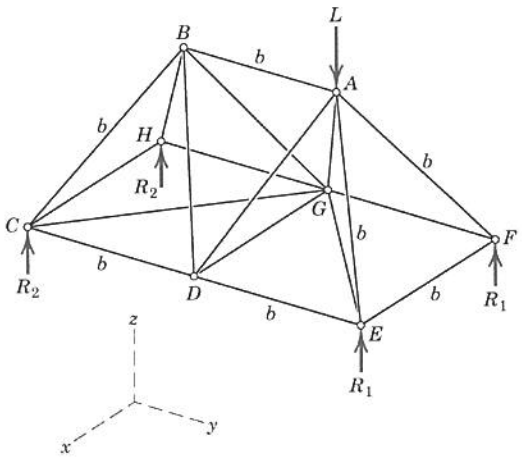


Problema 4/65

▶**4/66** Uma treliça espacial é formada por duas pirâmides sobre bases quadradas idênticas no plano horizontal *x*-*y*, tendo a aresta *DG* comum. A treliça está carregada no vértice *A* pela força *L* direcionada para baixo e está sustentada em seus vértices pelas reações mostradas. Todos os elementos, exceto as duas diagonais das bases, têm o mesmo comprimento *b*. Tire vantagem dos dois planos verticais de simetria e determine as forças em *AB* e *DA*. (Observe que o elemento *AB* impede as duas pirâmides de girar em torno de *DG*).

Resp. $AB = -\dfrac{\sqrt{2}L}{4}$

$DA = -\dfrac{\sqrt{2}L}{8}$



Problema 4/66

4/6 Suportes e Máquinas

Uma estrutura é denominada *suporte* ou *máquina* se ao menos um de seus elementos individuais é um *elemento multiforça*. Um elemento multiforça é definido como aquele com três ou mais forças atuando nele, ou aquele com duas ou mais forças e um ou mais momentos atuando nele. Suportes são estruturas que são projetadas para sustentar cargas aplicadas e são normalmente fixos em uma posição. Máquinas são estruturas que contêm partes móveis e são projetadas para transmitir forças ou torques de entrada para forças ou torques de saída.

Como suportes e máquinas contêm elementos multiforça, as forças nestes elementos *não* estarão, em geral, nas direções dos elementos. Portanto, não podemos analisar estas estruturas pelos métodos desenvolvidos nas Seções 4/3, 4/4 e 4/5 porque estes métodos se aplicam a treliças simples compostas de elementos de duas forças onde as forças estão nas direções dos elementos.

Corpos Rígidos Interligados com Elementos Multiforça

No Capítulo 3 discutimos o equilíbrio de corpos multiforça, mas nos concentramos no equilíbrio de um corpo rígido *único*. Na presente seção, focalizamos o equilíbrio de corpos rígidos *interligados* que incluem elementos multiforça. Apesar da maioria desses corpos poder ser analisada como sistemas bidimensionais, existem inúmeros exemplos de suportes e máquinas que são tridimensionais.

As forças atuando em cada elemento de um sistema interligado são encontradas isolando o elemento com um diagrama de corpo livre e aplicando as equações de equilíbrio. O *princípio da ação e reação* deve ser observado cuidadosamente quando representamos as forças de interação nos diagramas de corpo livre separados. Se a estrutura contém mais elementos ou apoios do que os necessários para impedir o colapso, então, como no caso das treliças, o problema é estaticamente indeterminado e os princípios de equilíbrio, apesar de necessários, não são suficientes para encontrar a solução. Apesar de muitos suportes e máquinas serem estaticamente

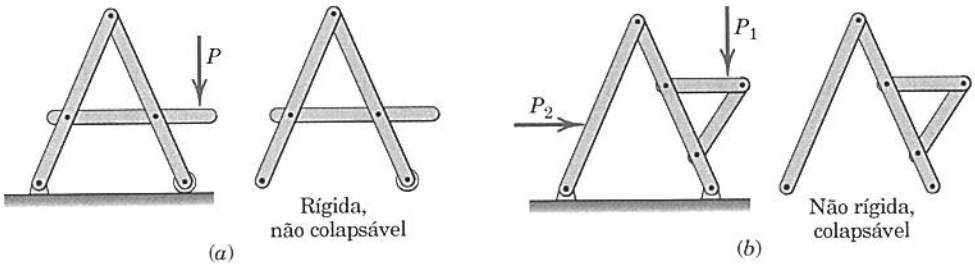


Figura 4/14

indeterminados, vamos considerar nessa seção apenas aqueles que são estaticamente determinados.

Se o suporte ou máquina forma uma unidade rígida por si só quando removido de seus apoios, como o suporte em A na Fig. 4/14*a*, é melhor iniciar a análise estabelecendo todas as forças externas à estrutura, que é tratada como um único corpo rígido. Então, desmembramos a estrutura e consideramos o equilíbrio de cada parte separadamente. As equações de equilíbrio para as diversas partes serão relacionadas por meio dos termos envolvendo as forças de interação. Se a estrutura não é uma unidade rígida por si só, mas depende de seus apoios externos para ter rigidez, como ilustrado na Fig. 4/14*b*, então o cálculo das reações dos apoios externos não pode ser completado até que a estrutura seja desmembrada e as partes individuais sejam analisadas.

Representação das Forças e Diagramas de Corpo Livre

Na maioria dos casos a análise de suportes e máquinas é facilitada pela representação das forças em termos de suas componentes retangulares. Este é especialmente o caso quando as dimensões das partes são dadas em direções mutuamente perpendiculares. A vantagem dessa representação é que o cálculo dos braços de alavanca é simplificado. Em alguns problemas tridimensionais, particularmente quando momentos são avaliados em relação a eixos que não são paralelos aos eixos coordenados, o uso da notação vetorial é vantajoso.

Não é sempre possível atribuir o sentido correto para cada força ou suas componentes quando se desenha os diagramas de corpo livre, tornando-se necessário fazer uma atribuição arbitrária. Em qualquer caso, é *absolutamente necessário* que uma força seja *consistentemente* representada nos diagramas para corpos que interagem, e que envolvam a força em questão. Assim, para dois corpos unidos pelo pino *A*, Fig. 4/15*a*, as componentes da força devem ser consistentemente representadas em sentidos *opostos* nos diagramas de corpo livre separados.

Para um nó articulado entre elementos de um suporte espacial, devemos aplicar o princípio da ação e reação às três componentes, como mostrado na Fig. 4/15*b*. Pode-se descobrir que os sentidos atribuídos estão errados quando os sinais algébricos das componentes são determinados no cálculo. Se A_x, por exemplo, for determinado como negativo, está na verdade atuando no sentido oposto àquele originalmente representado. Coerentemente, teríamos que inverter a direção da força em *ambos* os elementos e inverter o sinal de seus termos nas equações. Ou podemos deixar a representação na forma original e o sentido correto da força será depreendido do sinal negativo. Se escolhermos usar a notação vetorial na identificação das forças, então devemos ter o cuidado de usar um sinal positivo para uma ação e um sinal negativo para a reação correspondente, como mostrado na Fig. 4/16.

Ocasionalmente podemos precisar resolver duas ou mais equações simultaneamente de forma a separar as incógnitas. Na maioria dos casos, no entanto, podemos evitar soluções simultâneas pela escolha cuidadosa do elemento ou grupo de elementos para o diagrama de corpo livre, e por uma escolha cuidadosa dos eixos de momento que eliminarão termos indesejados das equações. O método de solução descrito nos parágrafos anteriores é ilustrado nos exemplos seguintes.

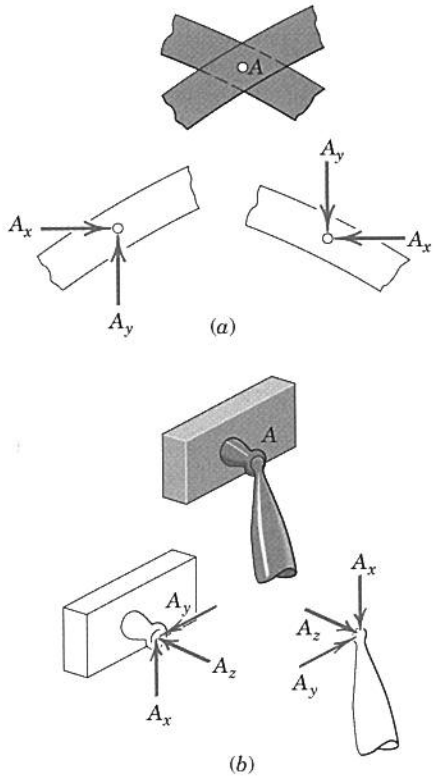


Figura 4/15

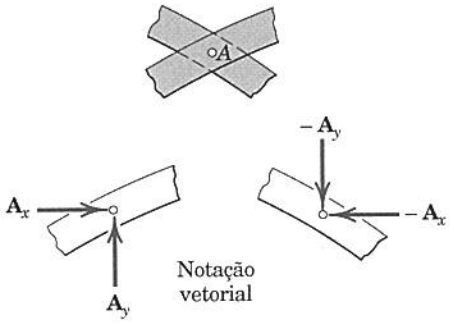
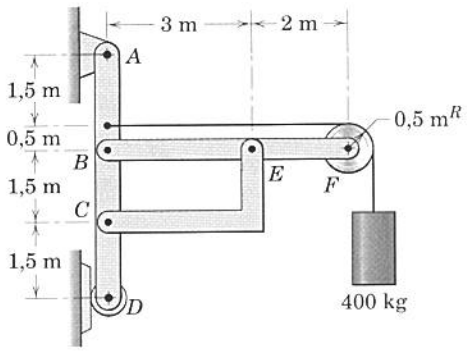


Figura 4/16

Exemplo 4/6

O suporte sustenta a carga de 400 kg da maneira mostrada. Despreze os pesos dos elementos quando comparados às forças induzidas pela carga e calcule as componentes horizontal e vertical de todas as forças atuando em cada um dos elementos.



Solução. Primeiramente observamos que os três elementos de sustentação que constituem o suporte formam uma estrutura rígida que pode ser analisada como uma única unidade. Observamos também que o arranjo dos apoios externos torna o suporte estaticamente determinado. ①

A partir do diagrama de corpo livre do suporte como um todo determinamos as reações externas. Assim,

$$[\Sigma M_A = 0] \qquad 5{,}5(0{,}4)(9{,}81) - 5D = 0 \qquad D = 4{,}32 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad A_x - 4{,}32 = 0 \qquad A_x = 4{,}32 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad A_y - 3{,}92 = 0 \qquad A_y = 3{,}92 \text{ kN}$$

Em seguida desmembramos o suporte e desenhamos os diagramas de corpo livre separados para cada elemento. Os diagramas são organizados em suas posições relativas aproximadas para ajudar a seguir as forças de interação em comum. As reações externas recém-determinadas são colocadas no diagrama para AD. As outras forças conhecidas são as forças de 3,92 kN exercidas pelo eixo da polia no elemento BF, conforme obtido do diagrama de corpo livre da polia. A tração de 3,92 kN no cabo também é mostrada atuando em seu ponto de amarração em AD.

Em seguida, as componentes de todas as forças incógnitas são mostradas nos diagramas. Aqui observamos que CE é um elemento de duas forças. As componentes de força sobre CE têm reações iguais e opostas, que estão mostradas sobre BF em E e sobre AD em C. Podemos não reconhecer à primeira vista o verdadeiro sentido das componentes em B, de forma que elas podem ser atribuídas de forma arbitrária, mas consistente. ②

A solução pode seguir usando uma equação de momento em torno de B ou E para o elemento BF, seguida pelas duas equações de força. Desta forma,

$$[\Sigma M_B = 0] \qquad 3{,}92(5) - \tfrac{1}{2}E_x(3) = 0 \qquad E_x = 13{,}08 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad B_y + 3{,}92 - 13{,}08/2 = 0 \qquad B_y = 2{,}62 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad B_x + 3{,}92 - 13{,}08 = 0 \qquad B_x = 9{,}15 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Valores numéricos positivos das incógnitas significam que consideramos corretamente seus sentidos nos diagramas de corpo livre. O valor de $C_x = E_x = 13{,}08$ kN obtido por inspeção do diagrama de corpo livre de CE é agora colocado no diagrama para AD, junto com os valores de B_x e B_y recém-determinados. As equações de equilíbrio podem agora ser aplicadas ao elemento AD como uma verificação, já que todas as forças que nele atuam já foram calculadas. As equações dão

$$[\Sigma M_C = 0] \qquad 4{,}32(3{,}5) + 4{,}32(1{,}5) - 3{,}92(2) - 9{,}15(1{,}5) = 0$$

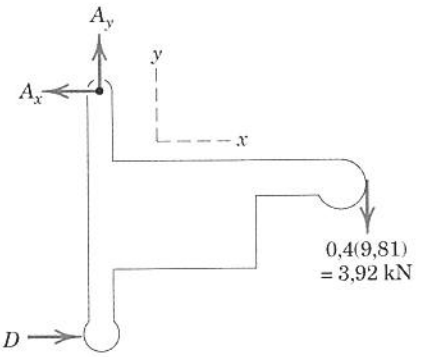
$$[\Sigma F_x = 0] \qquad 4{,}32 - 13{,}08 + 9{,}15 + 3{,}92 + 4{,}32 = 0$$

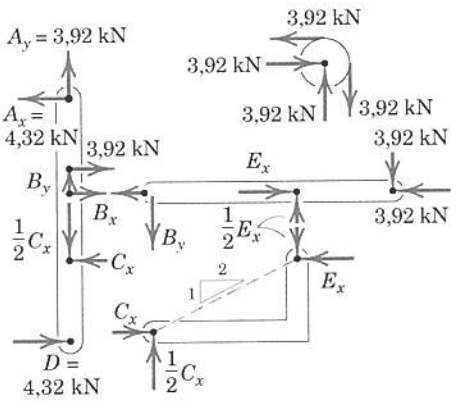
$$[\Sigma F_y = 0] \qquad -13{,}08/2 + 2{,}62 + 3{,}92 = 0$$

Sugestões Úteis

① Vemos que o suporte corresponde à categoria ilustrada na Fig. 4/14*a*.

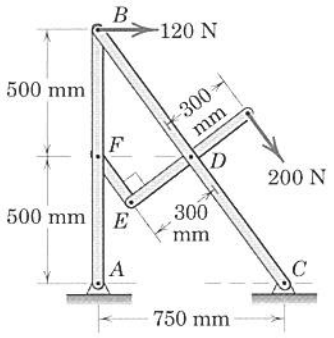
② Sem essa observação, a solução do problema seria muito mais longa, porque as três equações de equilíbrio para o elemento BF conteriam quatro incógnitas: B_x, B_y, E_x e E_y. Note que a direção da linha que une os dois pontos de aplicação da força, e não a forma do elemento, determina a direção das forças atuando em um elemento de duas forças.





Exemplo 4/7

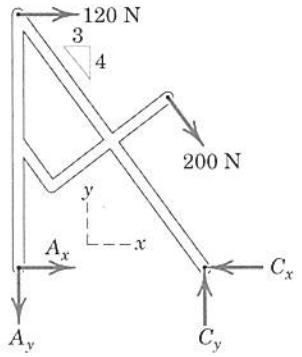
Despreze o peso do suporte e calcule as forças atuando em todos os seus elementos.



Solução. Observamos, primeiramente, que o suporte não é uma unidade rígida quando
① removido de seus apoios, já que *BDEF* é um quadrilátero móvel e não um triângulo rígido. Conseqüentemente, as reações externas não podem ser completamente determinadas até que os elementos individuais sejam analisados. No entanto, podemos determinar as componentes verticais das reações em A e C a partir do diagrama de corpo
② livre do suporte como um todo. Assim,

$$[\Sigma M_C = 0] \quad 200(0,3) + 120(0,1) - 0,750A_y = 0 \quad A_y = 240 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad C_y - 200(4/5) - 240 = 0 \quad C_y = 400 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$



Em seguida, desmembramos o suporte e desenhamos o diagrama de corpo livre de cada parte. Como *EF* é um elemento de duas forças, a direção da força em E sobre *ED* e em F sobre *AB* é conhecida. Consideramos que a força de 120 N é aplicada ao nó como
③ uma parte do elemento *BC*. Não deve haver dificuldade em atribuir as direções corretas para as forças E, F, D e B_x. A direção de B_y, no entanto, não pode ser atribuída por inspeção e, portanto, é arbitrariamente mostrada apontando para baixo em *AB* e para cima em *BC*.

Elemento ED. As duas incógnitas são facilmente obtidas por

$$[\Sigma M_D = 0] \quad 200(0,3) - 0,3E = 0 \quad E = 200 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F = 0] \quad D - 200 - 200 = 0 \quad D = 400 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

Elemento EF. Claramente, F é igual e oposto a E com módulo de 200 N.

Elemento AB. Como F agora é conhecido determinamos B_x, A_x e B_y de

$$[\Sigma M_A = 0] \quad 200(3/5)(0,5) - B_x(1,0) = 0 \quad B_x = 60 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad A_x + 60 - 200(3/5) = 0 \quad A_x = 60 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad 200(4/5) - 240 - B_y = 0 \quad B_y = -80 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

O sinal de menos mostra que escolhemos a direção errada para B_y.

Elemento BC. Os resultados para B_x, B_y e D são agora transferidos para *BC* e a incóg-
④ nita restante C_x é encontrada de

$$[\Sigma F_x = 0] \quad 120 + 400(3/5) - 60 - C_x = 0 \quad C_x = 300 \text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

Podemos aplicar as duas equações de equilíbrio restantes como uma verificação. Assim,

$$[\Sigma F_y = 0] \quad 400 + (-80) - 400(4/5) = 0$$

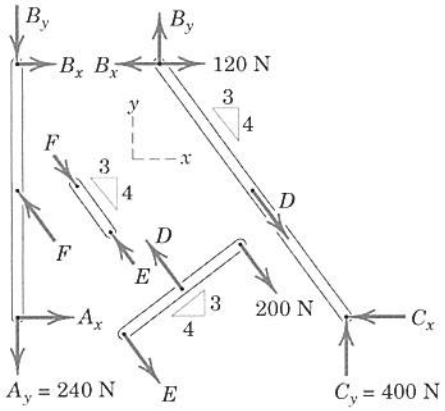
$$[\Sigma M_C = 0] \quad (120 - 60)(1,0) + (-80)(0,75) = 0$$

Sugestões Úteis

① Vemos que este suporte corresponde à categoria ilustrada na Fig. 4/14*b*.

② As direções de A_x e C_x não são óbvias inicialmente e podem ser atribuídas arbitrariamente e serem corrigidas mais tarde, se necessário.

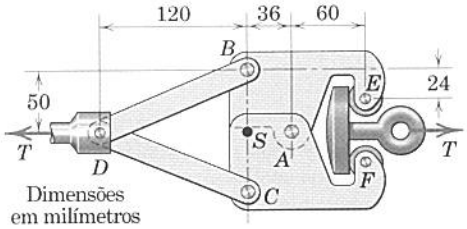
③ Alternativamente, a força de 120 N poderia ser aplicada ao nó considerado como parte de *BA*, com a conseqüente mudança na reação B_x.

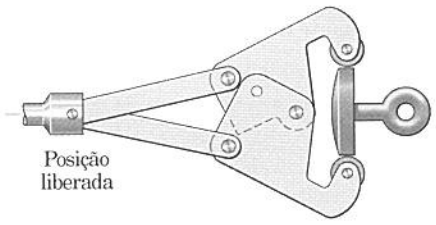


④ Alternativamente, poderíamos ter retornado ao diagrama de corpo livre do suporte como um todo e encontrado C_x.

Exemplo 4/8

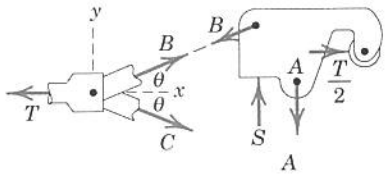
A máquina mostrada é projetada como um dispositivo de proteção contra sobrecargas, que libera a carga quando ela excede um valor predeterminado T. Um pino de cisalhamento S feito de um metal macio é inserido em um furo na metade inferior e sofre a ação da metade superior. Quando a força total sobre o pino exceder sua resistência, ele quebrará. As duas metades então giram em torno de A sob a ação das forças trativas em BD e CD, como mostrado no segundo esquema, e os roletes E e F liberam o olhal. Determine a tensão máxima admissível T se o pino S cisalhar quando a força total sobre ele for de 800 N. Calcule também a força correspondente sobre pino da articulação A.





Solução. Devido à simetria analisamos apenas um dos dois elementos articulados. A parte superior foi escolhida e seu diagrama de corpo livre está desenhado junto com o da conexão em D. Devido à simetria, as forças em S e A não têm componentes em x. Os
① elementos de duas forças BD e CD exercem forças de mesmo módulo $B = C$ na conexão em D. O equilíbrio da conexão dá

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad B\cos\theta + C\cos\theta - T = 0 \qquad 2B\cos\theta = T$$
$$B = T/(2\cos\theta)$$



Do diagrama de corpo livre da parte superior escrevemos o equilíbrio de momentos em torno do ponto A. Substituindo $S = 800$ N e a expressão para B obtemos

② $$[\Sigma M_A = 0] \qquad \frac{T}{2\cos\theta}(\cos\theta)(50) + \frac{T}{2\cos\theta}(\operatorname{sen}\theta)(36) - 36(800) - \frac{T}{2}(26) = 0$$

Substituindo $\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta = 5/12$ e resolvendo para T obtém-se

$$T\left(25 + \frac{5(36)}{2(12)} - 13\right) = 28\,800$$

$$T = 1477 \text{ N} \qquad \text{ou} \qquad T = 1{,}477 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Finalmente, o equilíbrio na direção y nos dá

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad S - B\operatorname{sen}\theta - A = 0$$

$$800 - \frac{1477}{2(12/13)}\frac{5}{13} - A = 0 \qquad A = 492 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

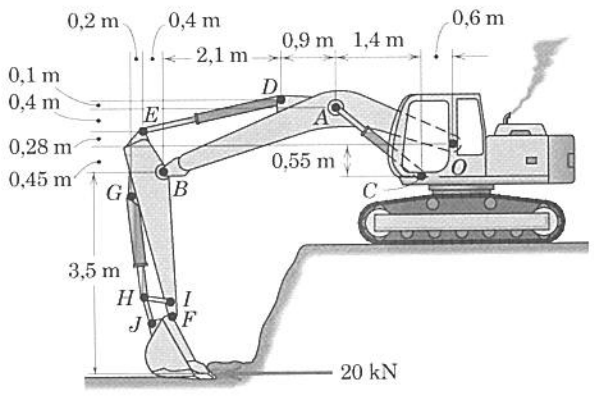
Sugestões Úteis

① É sempre útil identificar simetria. Aqui ela nos diz que as forças atuando nas duas partes agem como imagens refletidas uma da outra em relação ao eixo x. Assim, não podemos ter uma ação em um elemento na direção positiva dos x e sua reação no outro elemento na direção negativa dos x. Conseqüentemente as forças em S e A não têm componentes em x.

② Tome cuidado para não esquecer o momento da componente y de B. Note que as unidades usadas aqui são newton-milímetros.

Exemplo 4/9

Na posição particular mostrada, a escavadeira aplica uma força de 20 kN paralela ao chão. Existem dois cilindros hidráulicos AC para controlar o braço OAB e um único cilindro DE para controlar o braço $EBIF$. (*a*) Determine a força nos cilindros hidráulicos AC e a pressão p_{AC} agindo em seus pistons, que têm um diâmetro específico de 95 mm. (*b*) Determine também a força no cilindro hidráulico DE e a pressão p_{DE} atuando em seu pistom de 105 mm de diâmetro. Despreze os pesos dos elementos, em comparação aos efeitos da força de 20 kN.



Solução. (*a*) Começamos construindo um diagrama de corpo livre de todo o conjunto do braço. Observe que incluímos apenas as dimensões necessárias para esta parte do problema — detalhes dos cilindros *DE* e *GH* são desnecessários neste momento.

$[\Sigma M_O = 0] \qquad -20\,000(3{,}95) - 2F_{AC}\cos 41{,}3°(0{,}68) + 2F_{AC}\operatorname{sen} 41{,}3°(2) = 0$

$$F_{AC} = 48\,800 \text{ N ou } 48{,}8 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

① $F_{AC} = p_{AC}A_{AC}, p_{AC} = \dfrac{F_{AC}}{A_{AC}} = \dfrac{48\,800}{\left(\pi \dfrac{0{,}095^2}{4}\right)} = 6{,}89(10^6)$ Pa ou 6,89 MPa *Resp.*

Sugestão Útil

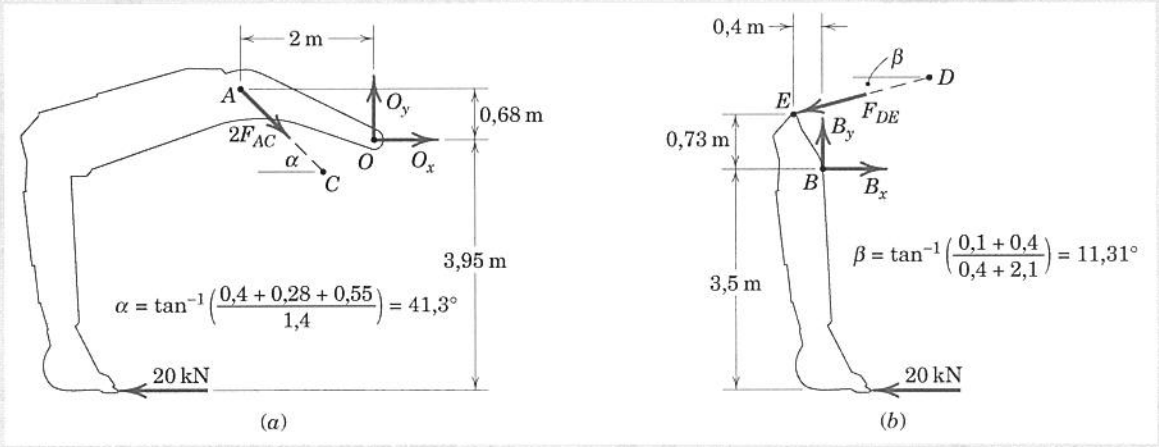
① Lembre que força = (pressão)(área).

(*b*) Para o cilindro *DF*, nós "cortamos" o conjunto em uma posição que faz com que a força desejada no cilindro seja externa ao nosso diagrama de corpo livre. Isso implica isolar o braço vertical *EBIF*, juntamente com a caçamba e a força aplicada.

$[\Sigma M_B = 0] \qquad -20\,000(3{,}5) + F_{DE}\cos 11{,}31°(0{,}73) + F_{DE}\operatorname{sen} 11{,}31°(0{,}4) = 0$

$$F_{DE} = 88\,100 \text{ N ou } 88{,}1 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$p_{DE} = \frac{F_{DE}}{A_{DE}} = \frac{88\,100}{\left(\pi \dfrac{0{,}105^2}{4}\right)} = 10{,}18(10^6) \text{ Pa ou } 10{,}18 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$



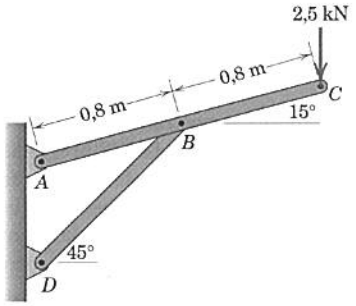
PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

(A não ser se for informado de outra forma, despreze a massa dos vários elementos e qualquer atrito nos problemas que se seguem.)

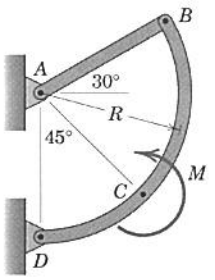
4/67 Determine a força no elemento *BD* e as forças suportadas por todos os nós do suporte carregado.

Resp. $BD = 9{,}66$ kN, $A = 8{,}09$ kN
$B = D = 9{,}66$ kN



Problema 4/67

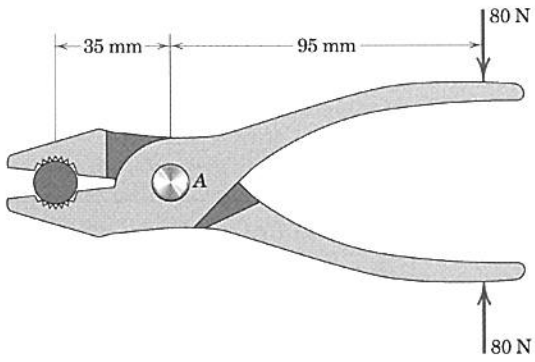
4/68 Determine a força suportada por cada nó da treliça carregada.



Problema 4/68

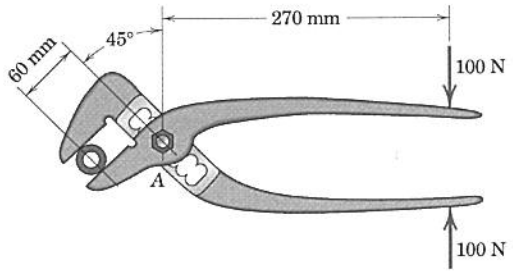
4/69 Para um aperto de 80 N nos manetes do alicate, determine a força *F* aplicada ao bastão redondo por cada garra. Além disso, calcule a força suportada pelo pino em *A*.

Resp. $F = 217$ N, $A = 297$ N



Problema 4/69

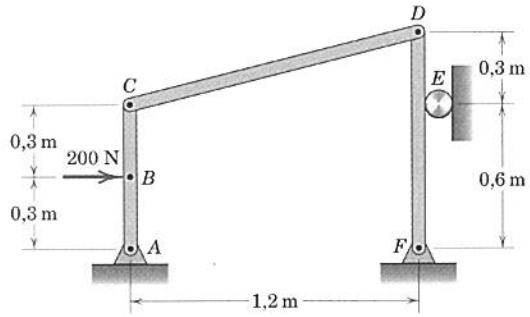
4/70 Calcule a força suportada pelo pino em A para o alicate com junta deslizante sob um aperto de 100 N.



Problema 4/70

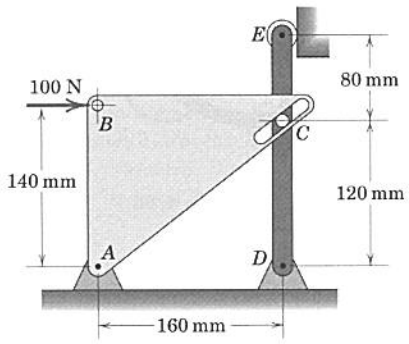
4/71 Determine a força suportada pelo rolete em E.

Resp. $E = 150$ N



Problema 4/71

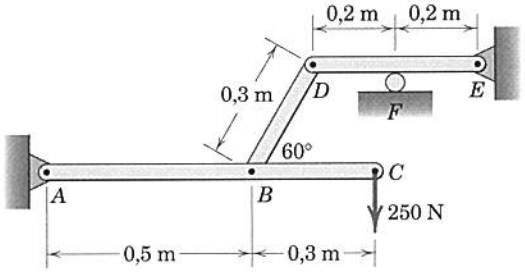
4/72 Calcule o módulo da força atuando no pino em D. O pino C está preso em DE e desliza no rasgo liso existente na placa triangular.



Problema 4/72

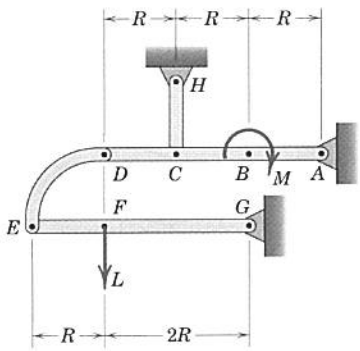
4/73 Determine a reação no rolete F para o suporte carregado mostrado.

Resp. $F = 800$ N



Problema 4/73

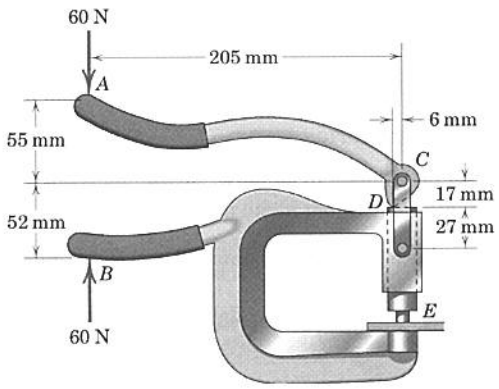
4/74 Para qual valor do momento M a força no elo CH será nula, dados os valores da carga L e da dimensão R.



Problema 4/74

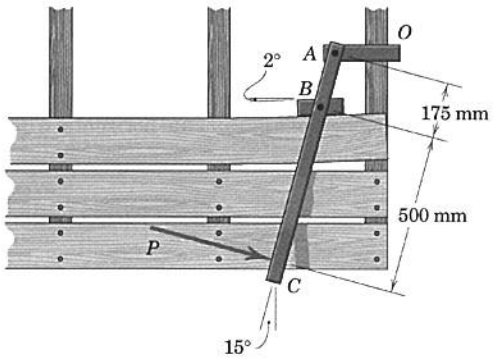
4/75 A prensa manual é útil para atividades tais como rebitar ou fazer furos. Que força P é aplicada na folha metálica em E dado que forças de 60 N são aplicadas nas manoplas?

Resp. $P = 2050$ N



Problema 4/75

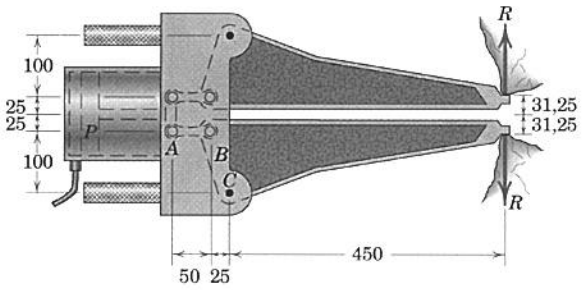
4/76 O dispositivo mostrado é usado para desentortar pranchas de deques, imediatamente antes de pregá-las aos caibros. Existe uma presilha inferior (não mostrada) em O, que fixa a peça OA a um dos caibros, de maneira que o pivô A pode ser considerado fixo. Para uma dada força P exercida perpendicularmente ao manete ABC como mostrado, determine a força normal correspondente N aplicada à prancha torta próximo ao ponto B. Despreze o atrito.



Problema 4/76

4/77 O dispositivo "garras da vida" é utilizado por equipes de resgate para abrir passagem em destroços, ajudando assim a soltar vítimas de acidentes. Se uma pressão de 3,5 MPa é desenvolvida atrás do pistom P de área $13(10^3)$ mm^2, determine a força vertical R exercida pelas extremidades das garras sobre os destroços, para a posição mostrada. Note que, para esta posição, a conexão AB, e seu par, estão ambas horizontais na figura.

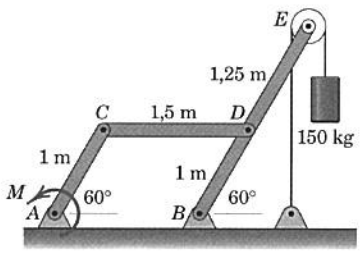
Resp. $R = 5{,}06$ kN



Dimensões em milímetros

Problema 4/77

4/78 Determine o momento M que deve ser aplicado em A, para manter o suporte em equilíbrio estático na posição mostrada. Calcule também o módulo da reação do pino em A.

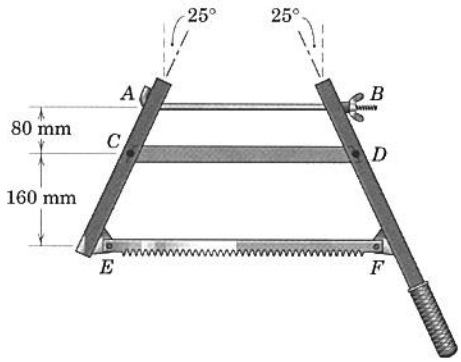


Problema 4/78

Problemas Representativos

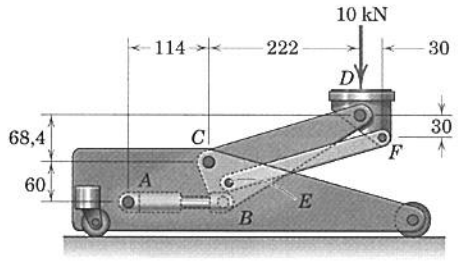
4/79 A borboleta B da serra dobrável é apertada até que a tração na barra AB valha 200 N. Determine a força na lâmina da serra EF e o módulo F da força suportada pelo pino C.

Resp. $EF = 100$ N T, $F = 300$ N



Problema 4/79

4/80 Os elementos de um macaco hidráulico estão mostrados na figura. $CDFE$ é um paralelogramo. Calcule a força no cilindro hidráulico AB devida à força suportada de 10 kN, como mostrado. Qual é a força no elo EF?

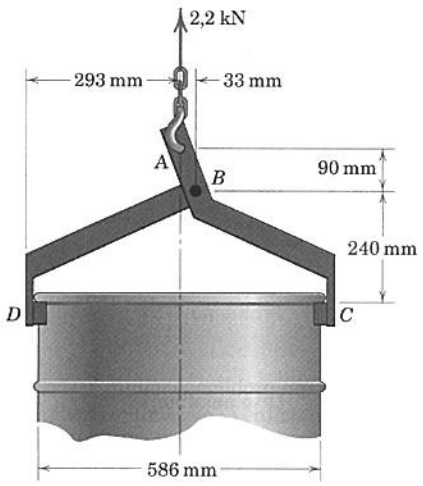


Dimensões em milímetros

Problema 4/80

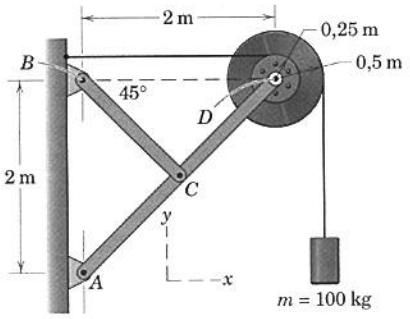
4/81 O dispositivo mostrado é usado para levantar tambores de 55 galões. Determine o módulo da força exercida em B.

Resp. $B = 1{,}855$ kN



Problema 4/81

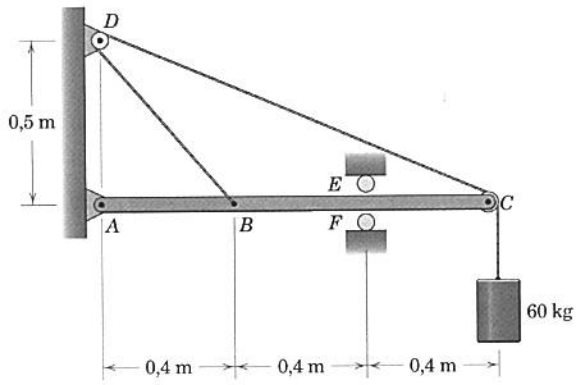
4/82 Determine as componentes x e y da força **C**, que o elemento BC exerce sobre o elemento ACD. Os cabos são enrolados firmemente em torno das duas polias, que estão aparafusadas entre si.



Problema 4/82

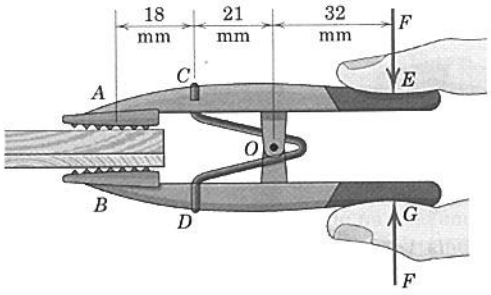
4/83 Determine o módulo da reação do pino em A e o módulo e a direção da força de reação nos roletes. As polias em C e D são pequenas.

Resp. $A = 999$ N, $F = 314$ N (para cima)



Problema 4/83

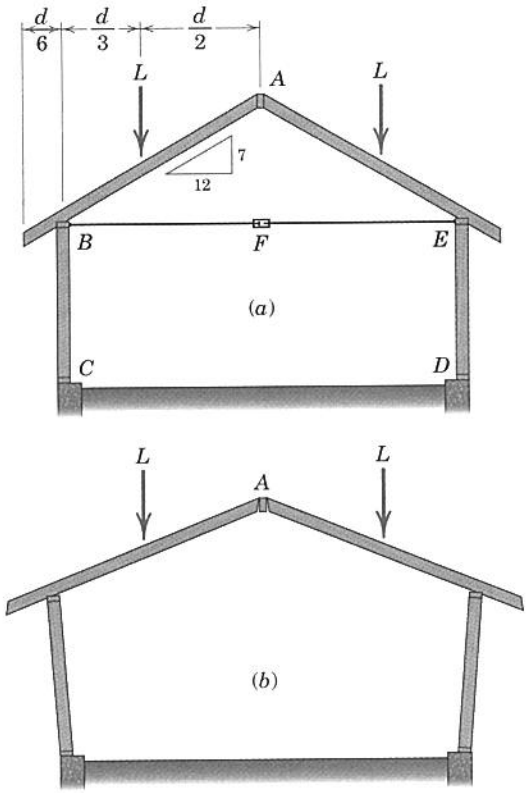
4/84 Se uma força $F = 15$ N é necessária para soltar o pregador, quais são as reações normais em A e em B se $F = 0$?



Problema 4/84

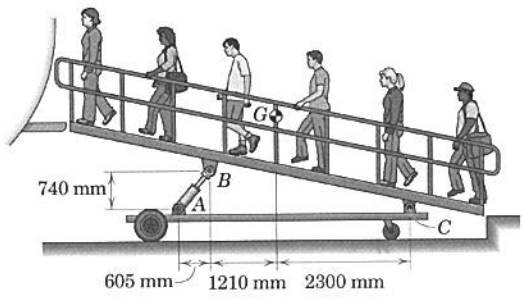
4/85 A figura ilustra um problema comum associado a estruturas simples. Sob os carregamentos L, os caixilhos podem girar, a viga da cumeeira em A pode abaixar e as paredes BC e DE podem girar para fora, como mostrado na parte b da figura. Esse fenômeno é às vezes observado claramente em estruturas antigas de madeira em fazendas, como uma deflexão central da viga da cumeeira quando vista de lado. Uma solução simples é mostrada na parte a da figura. Uma corrente ou cabo é esticado entre as presilhas em B e E e o parafuso de ajuste F é apertado até que uma força trativa adequada seja atingida, prevenindo, desta forma, a inclinação das paredes para fora. Para valores dados da dimensão d e das cargas pontuais L (que resultam das cargas distribuídas devidas aos pesos da viga da cumeeira, do telhado e de quaisquer cargas adicionais, tal como da neve), calcule a força trativa T necessária para que não existam forças direcionadas para fora nas paredes em B e E. Assuma que o apoio dos caixilhos na viga da cumeeira é puramente horizontal e que todas as juntas são livres para girar.

Resp. $T = \frac{24}{35}L$



Problema 4/85

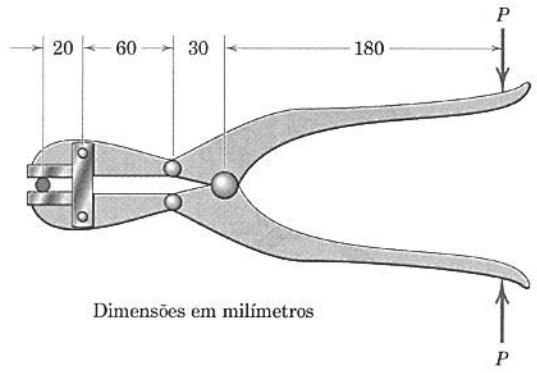
4/86 A rampa é usada para embarque de passageiros em um pequeno avião de transporte. A massa total da rampa e de seis passageiros vale 750 kg, com centro de massa em G. Determine a força no cilindro hidráulico AB e o módulo da reação do pino em C.



Problema 4/86

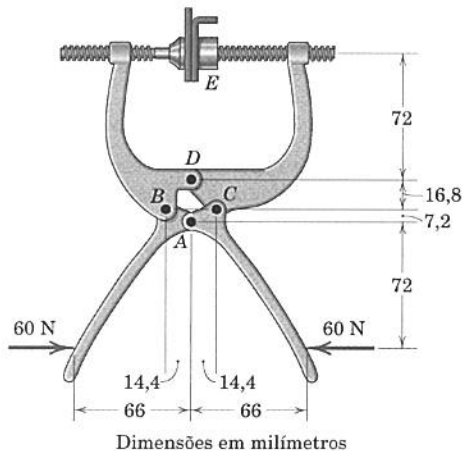
4/87 Um pequeno cortador de parafusos e barras operado manualmente está mostrado no esboço. Para um aperto manual de $P = 150$ N, determine a força Q desenvolvida por cada garra sobre a barra a ser cortada.

Resp. $Q = 2{,}7$ kN



Problema 4/87

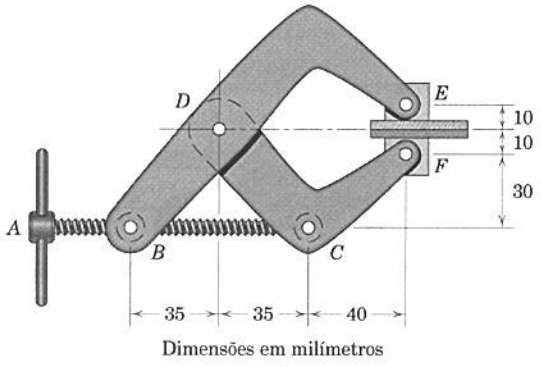
4/88 O grampo mostrado na figura é freqüentemente usado em operações de soldagem. Determine a força de aperto sobre as duas peças metálicas em E e os módulos das forças suportadas pelos pinos A, B e D.



Problema 4/88

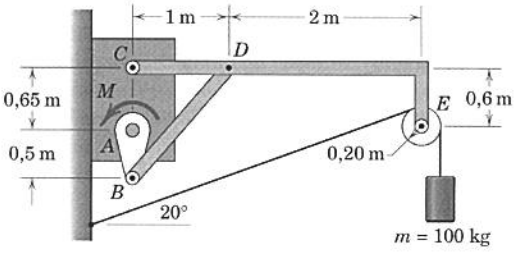
4/89 O grampo é ajustado de forma a exercer um par de forças compressivas de 200 N sobre as placas entre suas garras pivotadas. Determine a força no eixo rosqueado BC e o módulo da reação do pino em D.

Resp. $BC = 375$ N C, $D = 425$ N



Problema 4/89

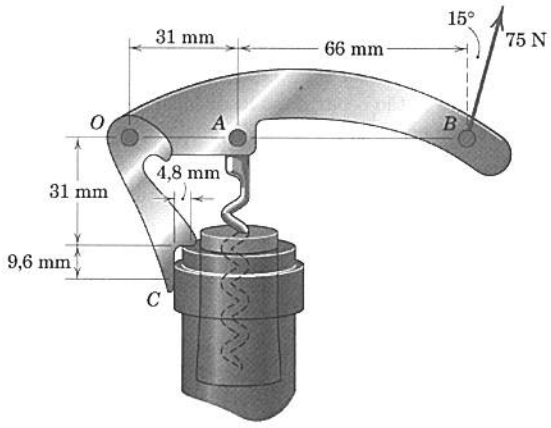
4/90 Quando a biela AB está na posição vertical, o eixo CD está na posição horizontal e o cabo faz um ângulo de 20° com a horizontal. Calcule o momento M necessário para haver equilíbrio no suporte.



Problema 4/90

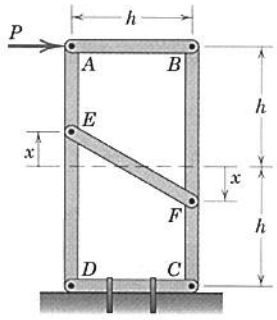
4/91 Uma força de 75 N é aplicada ao cabo OAB do saca-rolhas. Determine a força de extração F exercida sobre a rolha.

Resp. $F = 227$ N



Problema 4/91

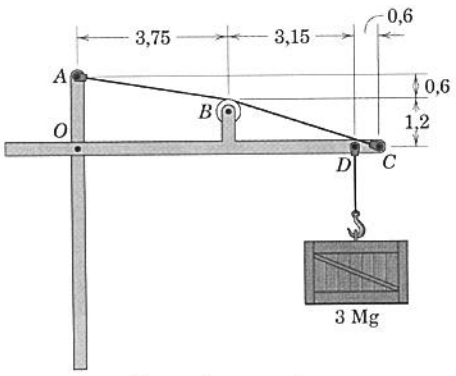
4/92 A figura representa a estrutura de uma unidade de armazenamento em prateleiras, onde as prateleiras intermediárias não estão mostradas. A variável x representa diferentes configurações de fixação. Determine, e faça um gráfico na faixa $0 \le \frac{x}{h} \le 1$, a força no suporte EF, devida à força aplicada P. O que acontece se $x = 0$?



Problema 4/92

4/93 O guindaste simples suporta uma carga de 3 Mg. Determine a força de tração T no cabo e o módulo da reação no pino em O.

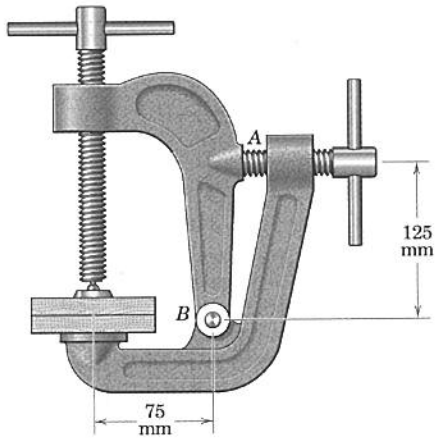
Resp. $T = 114{,}2$ kN, $O = 113{,}4$ kN



Dimensões em metros

Problema 4/93

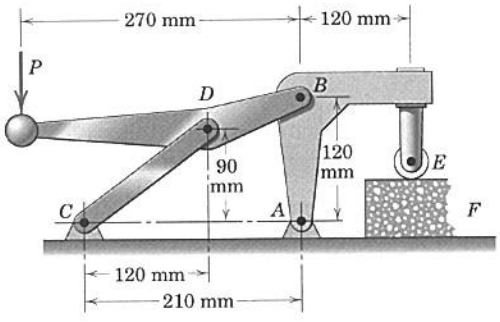
4/94 A morsa com dois atuadores mostrada na figura é usada para dar uma força de aperto adicional quando os parafusos são apertados. Se o parafuso vertical é apertado para produzir uma força de aperto de 3 kN e então o parafuso horizontal é apertado até que a força no parafuso em A seja duplicada, encontre a reação total R no pino em B.



Problema 4/94

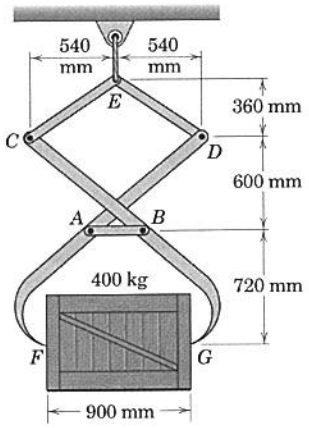
4/95 Determine a força de aperto vertical em E em termos da força P aplicada ao cabo do rebitador, que mantém a peça F em seu lugar.

Resp. $E = 7{,}2P$



Problema 4/95

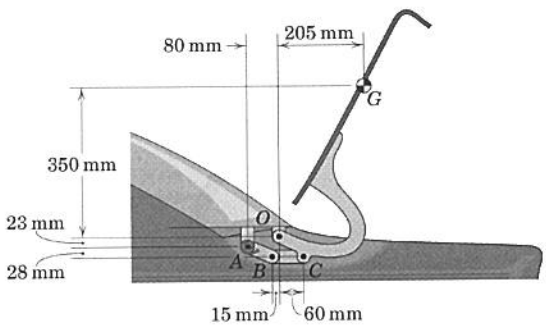
4/96 Calcule a força na conexão AB das garras de elevação que se cruzam sem se tocar.



Problema 4/96

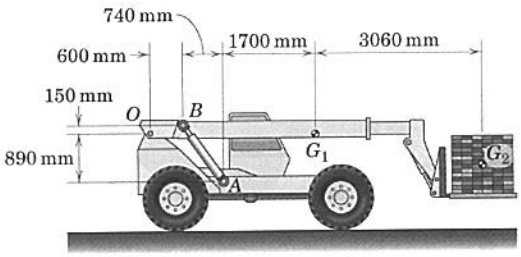
4/97 Os elementos de um mecanismo acionado por uma mola, da tampa do porta-malas de um carro, estão mostrados na figura. Para a posição de equilíbrio mostrada, determine o momento M_A que cada uma das duas molas de torção em A deve exercer sobre a conexão AB. A massa da tampa do porta-malas é de 18 kg, com centro de massa em G. Os efeitos dos pesos dos outros elementos podem ser desprezados.

Resp. $M_A = 9{,}94$ N · m, no sentido anti-horário



Problema 4/97

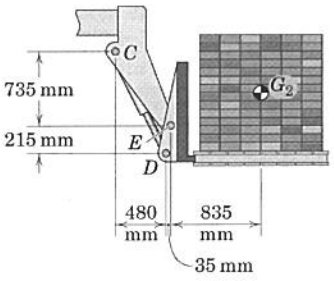
4/98 A máquina mostrada é usada para mover itens pesados, tal como estrados de tijolos, em locais de construção. Para a posição horizontal mostrada da lança, determine a força em cada um dos dois cilindros hidráulicos AB. A massa da lança é de 1500 kg, com centro de massa em G_1, e a massa do cubo de tijolos é de 2000 kg, com centro de massa em G_2.



Problema 4/98

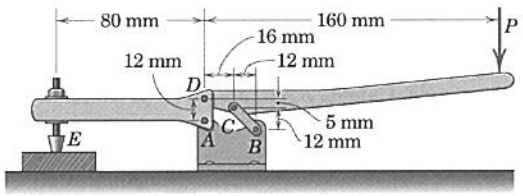
4/99 O estrado da empilhadeira da máquina do Prob. 4/98 está mostrado com detalhes dimensionais adicionais. Determine a força no cilindro hidráulico único, CD. A massa de cubo de tijolos é de 2000 kg, com centro de massa em G_2. Você pode desprezar os efeitos da massa dos componentes do estrado.

Resp. $F_{CD} = 127{,}8$ kN



Problema 4/99

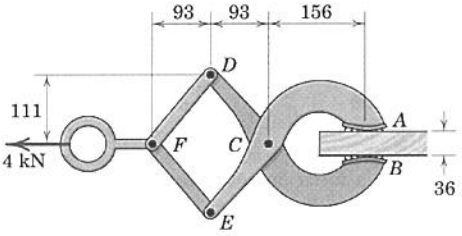
4/100 Determine a força de aperto vertical em E em termos da força P aplicada ao cabo do rebitador.



Problema 4/100

4/101 O dispositivo mostrado é usado para arrastar estrados de madeira carregados pelo chão de armazéns. A placa de madeira mostrada é um dos diversos elementos que compõem a base do estrado. Para a carga de 4 kN aplicada por uma empilhadeira, determine o módulo da força suportada pelo pino C e as forças normais de aperto em A e em B.

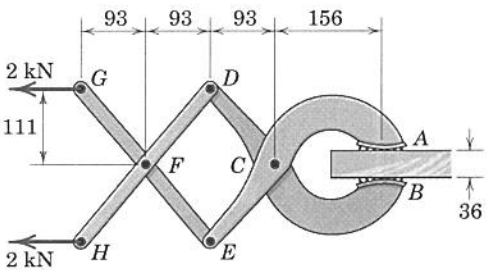
Resp. $C = 5{,}46$ kN , $A_n = B_n = 3{,}08$ kN



Dimensões em milímetros

Problema 4/101

4/102 Uma modificação feita no puxador do estrado do Prob. 4/101 é mostrada aqui. Para a mesma força líquida de 4 kN, como no Prob. 4/101, determine o módulo da força suportada pelo pino C e as forças normais de aperto em A e em B.

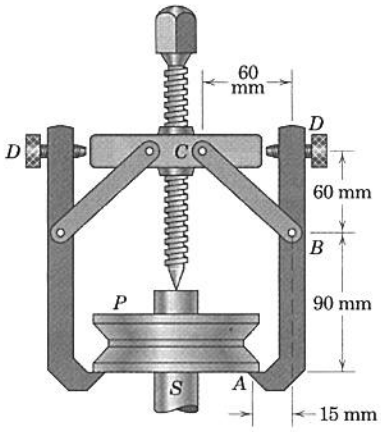


Dimensões em milímetros

Problema 4/102

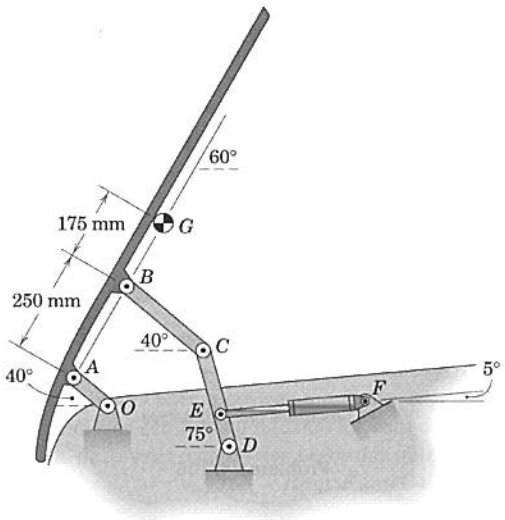
4/103 A figura mostra um sacador de rodas que é projetado para remover uma polia para correias em V de seu eixo de encaixe apertado S por meio do rosqueamento do parafuso central. Se a polia começa a deslizar do eixo quando a compressão no parafuso atinge 1,2 kN, calcule o módulo da força suportada por cada garra em A. Os parafusos de ajuste D suportam força horizontal e mantêm os braços laterais paralelos ao parafuso central.

Resp. $A = 0{,}626$ kN



Problema 4/103

4/104 Os elementos da estrutura do capô de um carro com dobradiça frontal estão mostrados na figura. As conexões leves BC e CD e o amortecedor pressurizado EF mantêm o capô na posição aberta mostrada. Nesta posição, o capô está livre para girar no sentido horário em torno do pino O; o pino A está travado até que o capô tenha sido abaixado a uma posição quase horizontal. Para um capô com uma massa de 40 kg, com centro de gravidade em G, determine a força de compressão mínima C no amortecedor que manterá a posição aberta do capô. Observe que existem duas conexões OA espaçadas ao longo da frente do carro, mas apenas um conjunto das outras conexões localizadas no interior do pára-lama frontal direito.



$\overline{AO} = 100$ mm $\quad \overline{DE} = 75$ mm

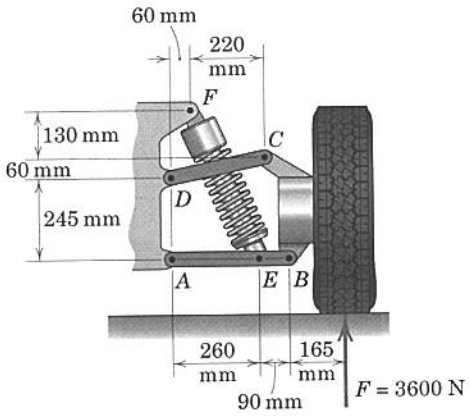
$\overline{BC} = \overline{CD} = 225$ mm

Problema 4/104

4/105 Os elementos da suspensão traseira de um carro com tração dianteira estão mostrados na figura. Determine o módulo da força

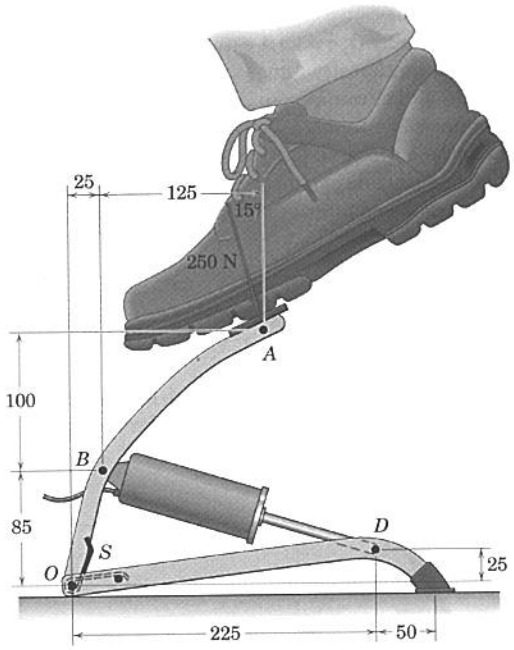
em cada junta, se a força normal F exercida sobre o pneu tem um módulo de 3600N.

Resp. $A = 4550$ N, $B = 4410$ N
$C = D = 1898$ N, $E = F = 5920$ N



Problema 4/105

4/106 Uma força de 250 N é aplicada à bomba de ar operada a pedal. A mola de retorno S exerce um momento de 3 N · m no elemento OBA para a posição mostrada. Determine a força de compressão C correspondente no cilindro BD. Se o diâmetro do pistão no cilindro é de 45 mm, estime a pressão de ar gerada para essas condições. Especifique quaisquer suposições.

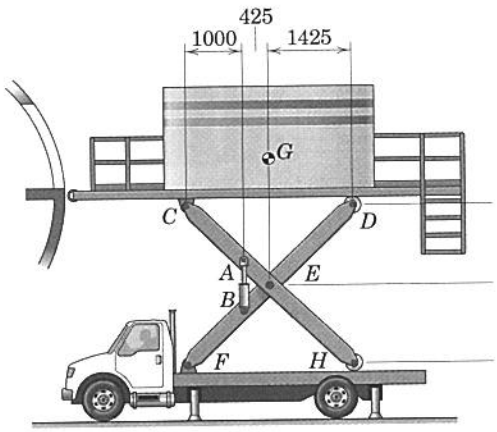


Dimensões em milímetros

Problema 4/106

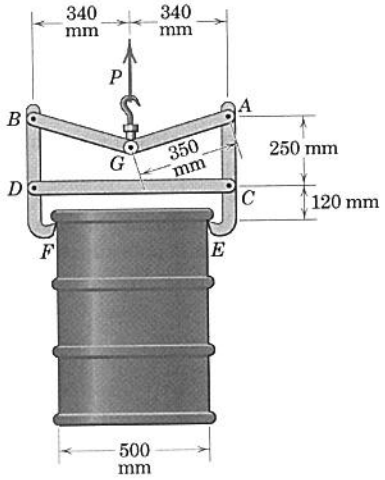
4/107 O caminhão mostrado é usado para entregar refeições para aviões. A unidade elevada tem uma massa de 1000 kg, com centro de massa em G. Determine a força necessária no cilindro hidráulico AB.

Resp. $F_{AB} = 32{,}9$ kN



Problema 4/107

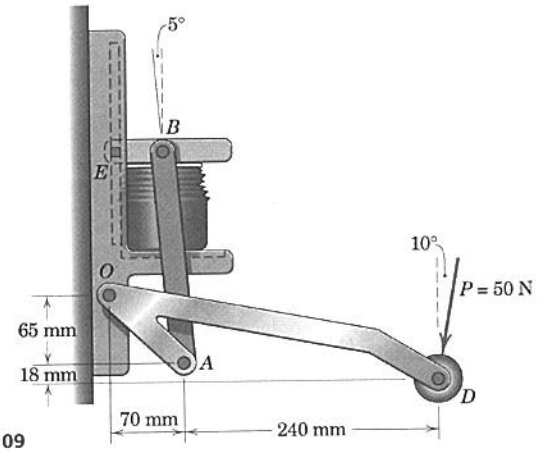
4/108 Uma ponte rolante para transportar tambores de aço de 135 kg é mostrada. Calcule o módulo da força exercida no tambor em E e F.



Problema 4/108

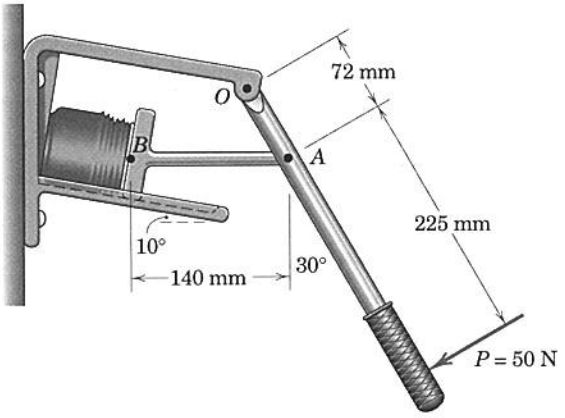
4/109 Determine a força de compressão C exercida sobre a lata para uma força aplicada $P = 50$ N quando o esmagador de latas está na posição mostrada. Note que existem duas conexões AB e duas AOD, com um par de conexões de cada lado da parte fixa do esmagador. Além disso, o pino B está na linha vertical central da lata. Finalmente, note que as pequenas projeções quadradas E da garra móvel se deslocam nos rasgos internos da armação fixa.

Resp. $C = 249$ N



Problema 4/109

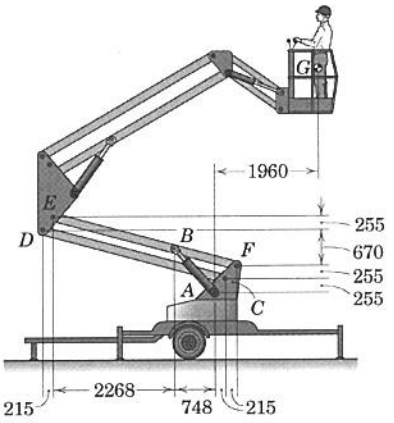
4/110 Determine a força de compressão C exercida sobre a lata para uma força aplicada $P = 50$ N quando o esmagador de latas está na posição mostrada. O ponto B está centrado no fundo da lata.



Problema 4/110

4/111 Determine a força no cilindro AB devida ao peso combinado da caçamba e do operador. A massa combinada é de 180 kg, com centro de massa em G.

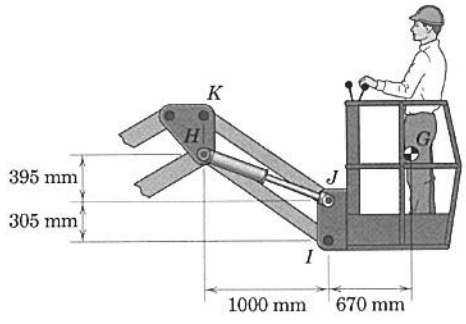
Resp. $F_{AB} = 9200$ N



Dimensões em milímetros

Problema 4/111

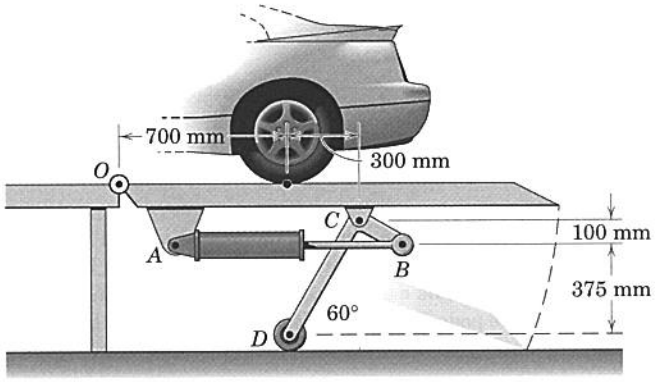
4/112 Detalhes adicionais da caçamba do guindaste do Prob. 4/111 estão dados na figura. Determine a força no cilindro HJ devido aos efeitos da massa combinada de 180 kg da caçamba e do operador, com centro de massa em G.



Problema 4/112

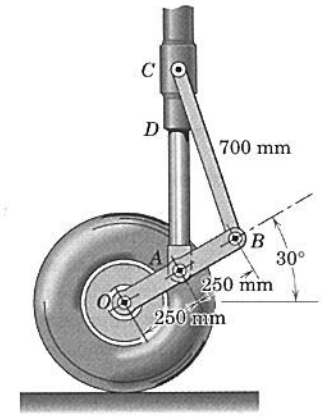
4/113 O elevador para carros permite que o carro seja movido para a plataforma, após o que as rodas traseiras são levantadas. Se o carregamento devido a ambas as rodas traseiras vale 6 kN, determine a força no cilindro hidráulico AB. Despreze o peso da plataforma. O elemento BCD é um suporte em ângulo reto preso por um pino à plataforma em C.

Resp. $AB = 15{,}87$ kN C



Problema 4/113

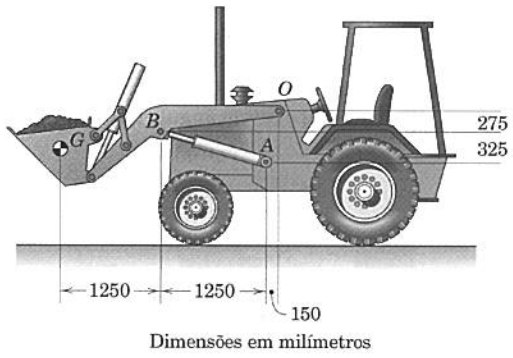
4/114 O trem de pouso do avião consiste no cilindro D com pistão hidráulico e mola, e nas duas conexões articuladas OB e CB. Se a roda está se movendo ao longo da pista a velocidade constante e suportando uma carga constante e estável de 24 kN, calcule a força total suportada pelo pino em A.



Problema 4/114

4/115 Determine a força no cilindro hidráulico AB e o módulo da reação no pino em O para a posição mostrada. A caçamba e sua carga têm uma massa combinada de 2000 kg, com centro de massa em G. Você pode desprezar o efeito dos pesos dos outros elementos.

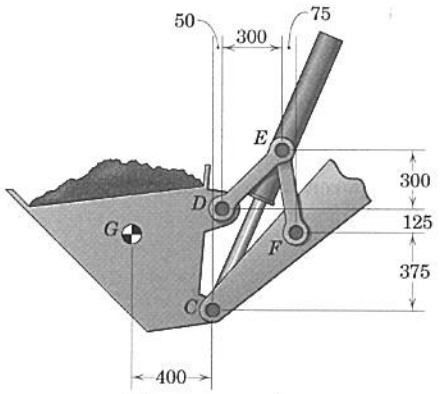
Resp. $F_{AB} = 84{,}1$ kN, $O = 81{,}4$ kN



Dimensões em milímetros

Problema 4/115

4/116 Considere o detalhe dimensional adicional para o sistema de carga do Prob. 4/115. Determine a força no cilindro hidráulico *CE*. A massa da caçamba e de sua carga é de 2000 kg, com centro de massa em *G*. Você pode desprezar os efeitos dos pesos dos outros elementos.

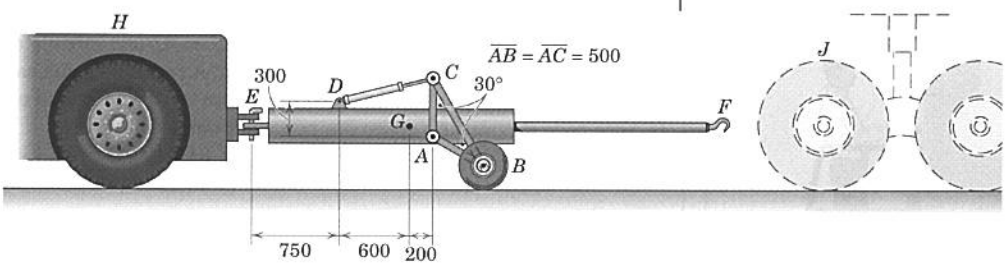


Dimensões em milímetros

Problema 4/116

4/117 Uma barra de reboque ajustável conectando o trator *H* com o trem de pouso *J* de um grande avião está mostrada na figura. O ajuste da altura do gancho *F* na extremidade da barra é obtido pelo cilindro hidráulico *CD*, ativado por uma pequena bomba manual (não mostrada). Para a posição nominal mostrada da conexão triangular *ABC*, calcule a força *P* transferida pelo cilindro ao pino *C* para posicionar a barra de reboque. O reboque tem uma massa total de 50 kg e é suportado pelo conector do trator em *E*.

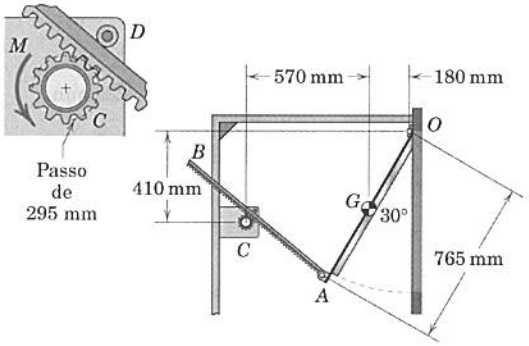
Resp. $P = 298$ N



Dimensões em milímetros

Problema 4/117

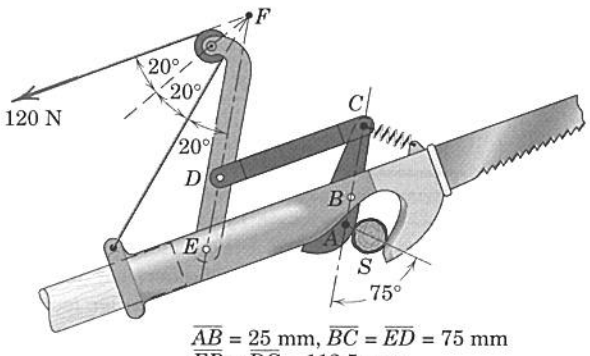
4/118 Um sistema automático de posicionamento de janelas para uma estufa está mostrado na figura. A janela *OA* tem uma massa de 50 kg, com centro de massa em *G*. Um motor (não mostrado) movimenta a engrenagem *C* que, por sua vez, gira o trilho de posicionamento *AB*. Para a posição da janela mostrada, determine o torque *M* do motor, que deve ser fornecido à roda dentada *C*. Despreze o peso da barra *AB*.



Problema 4/118

4/119 O mecanismo de poda de uma serra com cabo está mostrado no momento em que ele corta um galho, *S*. Para a posição particular mostrada, a corda de fixação é paralela ao cabo e suporta uma força de tração de 120 N. Determine a força cisalhante *P* aplicada ao galho pelo cortador e a força total suportada pelo pino em *E*. A força exercida pela mola de retorno em *C* é pequena e pode ser desprezada.

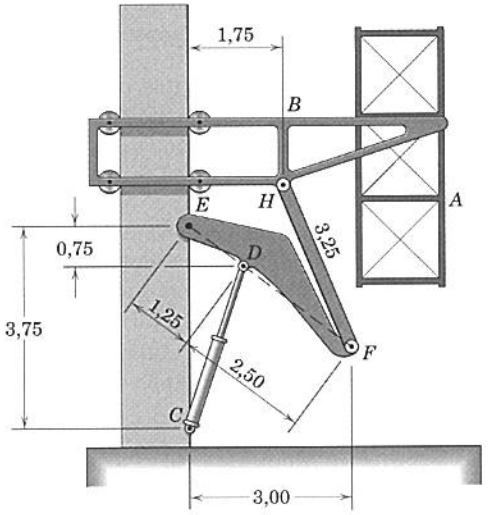
Resp. $P = 1351$ N, $E = 300$ N



$\overline{AB} = 25$ mm, $\overline{BC} = \overline{ED} = 75$ mm
$\overline{EB} = \overline{DC} = 112{,}5$ mm
$\overline{DF} = 150$ mm

Problema 4/119

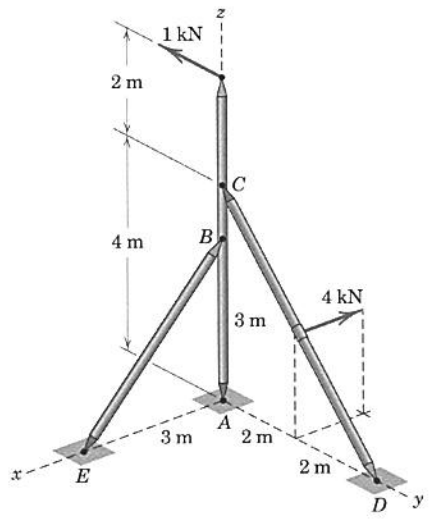
4/120 A figura mostra um dispositivo especial, projetado para levantar seções verticais de uma torre de construção. O conjunto A tem uma massa de 1,5 Mg e é erguido pela plataforma B, que tem uma massa de 2 Mg. A plataforma sobe pela coluna vertical fixa sobre roletes e é ativada pelo cilindro hidráulico CD e pelas conexões EDF e FH. Para a posição particular mostrada, calcule a força R exercida pelo cilindro hidráulico em D e o módulo da força suportada pelo pino em E.



Problema 4/120 Dimensões em metros

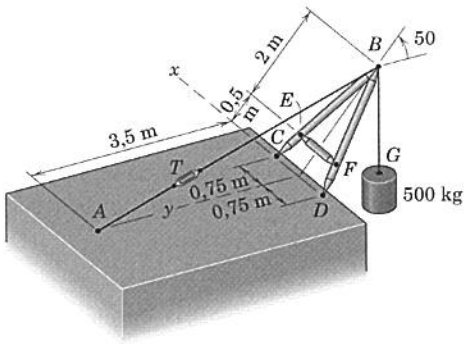
4/121 Determine a força atuando no elemento ABC na conexão A para o suporte espacial carregado mostrado. Cada conexão pode ser tratada como uma rótula.

Resp. $A = 4{,}25$ kN



Problema 4/121

4/122 Na representação esquemática de uma estrutura real, T representa um parafuso de aperto, C e D são dobradiças cujos eixos estão ao longo da linha CD e B, E e F são rótulas. Determine a força de tração T no parafuso e a força no elemento EF.



Problema 4/122

4/7 Revisão do Capítulo

No Capítulo 4 aplicamos os princípios do equilíbrio a duas classes de problemas: (*a*) treliças simples e (*b*) suportes e máquinas. Nenhuma teoria nova foi necessária, já que nós apenas desenhamos os diagramas de corpo livre necessários e aplicamos nossas conhecidas equações de equilíbrio. Entretanto, as estruturas com que lidamos no Capítulo 4 nos deram a oportunidade de desenvolver nossa apreciação por um enfoque sistemático dos problemas em mecânica.

As características mais essenciais da análise dessas duas classes de estruturas são revistas nos tópicos a seguir.

(a) Treliças Simples

1. Treliças simples são compostas de elementos de duas forças unidos em suas extremidades e capazes de suportar tração ou compressão. Cada força interna, portanto, está sempre na direção da linha unindo as extremidades do seu elemento.

2. Treliças simples são construídas a partir da unidade rígida básica (não colapsável) do triângulo para treliças planas e do tetraedro para treliças espaciais. Unidades adicionais de uma treliça são formadas incluindo novos elementos, dois para treliças planas e três para treliças espaciais, presos aos nós existentes e unidos em suas extremidades para formar um novo nó.

3. Os nós das treliças simples são considerados como sendo conexões por pinos para treliças planas e como rótulas para treliças espaciais. Assim, os nós podem transmitir força, mas não momento.

4. Considera-se que cargas externas são aplicadas apenas nos nós.

5. Treliças são estaticamente determinadas externamente quando as restrições externas não excedem àquelas necessárias para manter uma posição de equilíbrio.

6. Treliças são estaticamente determinadas internamente quando construídas da forma descrita no item (2), na qual os elementos internos não excedem aqueles necessários para evitar colapso.

7. O *método dos nós* utiliza as equações de equilíbrio de forças para cada nó. A análise para treliças planas normalmente começa em um nó onde ao menos uma força é conhecida e não mais do que duas forças são incógnitas ou, para treliças espaciais, não mais do que três forças são incógnitas.

8. O *método das seções* usa um corpo livre de uma seção inteira de uma treliça contendo dois ou mais nós. Em geral, o método envolve o equilíbrio de um sistema de forças não concorrentes. A equação de equilíbrio dos momentos é especialmente útil quando o método das seções é usado. Em geral, as forças atuando em uma seção que corta mais do que três elementos desconhecidos de uma treliça plana não podem ser completamente determinadas porque existem apenas três equações de equilíbrio independentes.

9. O vetor representando uma força atuando em um nó ou em uma seção é desenhado do mesmo lado do nó ou da seção em que está o elemento que transmite a força. Com esta convenção, tração é indicada quando a seta de força aponta para longe do nó ou da seção, e compressão é indicada quando a seta aponta para o nó ou seção.

10. Quando os dois elementos diagonais que prendem um painel quadrilátero são elementos flexíveis e incapazes de suportar compressão, apenas aquele sob tração é mantido na análise e o painel permanece estaticamente determinado.

11. Quando dois elementos unidos sob carga são colineares e um terceiro elemento com uma direção diferente é unido ao nó deles, a força no terceiro elemento deve ser nula, a não ser que uma força externa seja aplicada ao nó com um componente normal aos elementos colineares.

(b) Suportes e Máquinas

1. Suportes e máquinas são estruturas que contêm um ou mais elementos multiforça. Um elemento multiforça é aquele no qual atuam três ou mais forças ou duas ou mais forças e um ou mais momentos.

2. Suportes são estruturas projetadas para suportar cargas, geralmente sob condições estáticas. Máquinas são estruturas que transformam forças e momentos de entrada em forças e momentos de saída e geralmente envolvem partes móveis. Algumas estruturas podem ser classificadas tanto como um suporte quanto como uma máquina.

3. Apenas suportes e máquinas que são estaticamente determinados externa e internamente são considerados aqui.

4. Se um suporte ou máquina, como um todo, se mantém como uma unidade rígida (não colapsável) quando seus apoios externos são removidos, então começamos a análise calculando as reações externas em relação a todo o conjunto. Se um suporte ou máquina, como um todo, é uma unidade não rígida (colapsável) quando seus apoios externos são removidos, então a análise das reações externas não pode ser completada até que a estrutura seja desmembrada.

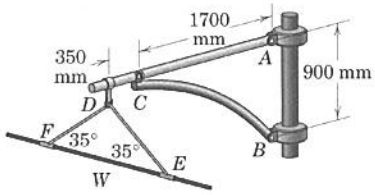
5. Forças atuando nas conexões internas de suportes e máquinas são calculadas desmembrando a estrutura e construindo um diagrama de corpo livre separado para cada parte. O princípio da ação e reação deve ser *estritamente* observado. Senão, ocorrerá erro.

6. As equações de equilíbrio de força e momento são aplicadas aos elementos, conforme a necessidade, para calcular as incógnitas desejadas.

PROBLEMAS DE REVISÃO

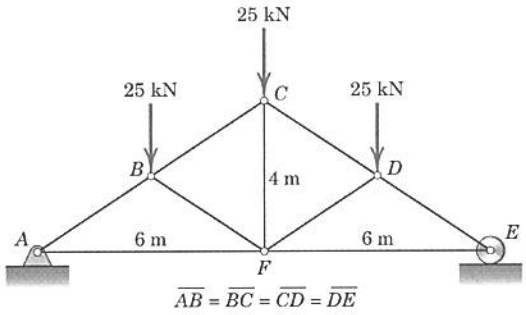
4/123 O dispositivo de suporte da linha de força de um trem rápido e leve é mostrado. Se uma força trativa de 2,5 kN existe no cabo *EDF*, determine a força *F* suportada pelo parafuso em *B*.

Resp. $F = 7{,}39$ kN



Problema 4/123

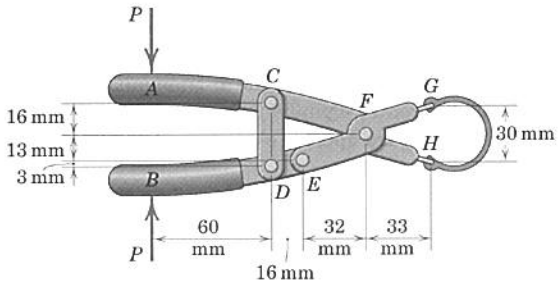
4/124 Determine a força em cada elemento da treliça carregada.



Problema 4/124

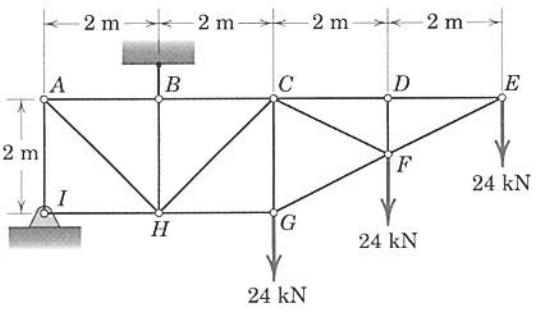
4/125 A ferramenta especial é usada para instalar e remover presilhas. Determine a força de abertura aplicada em *G* e em *H* se $P = 50$ N.

Resp. $G = 181{,}8$ N



Problema 4/125

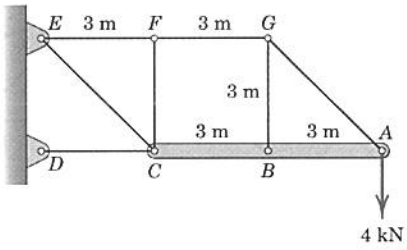
4/126 Determine as forças nos elementos *CH* e *CF*.



Problema 4/126

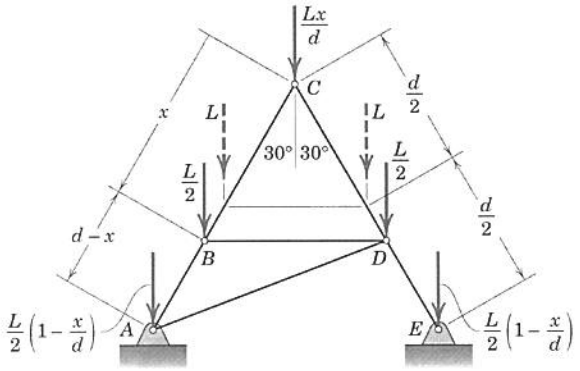
4/127 Calcule a força no elemento *BG* usando um diagrama de corpo livre do elemento rígido *ABC*.

Resp. $BG = 8$ kN *C*



Problema 4/127

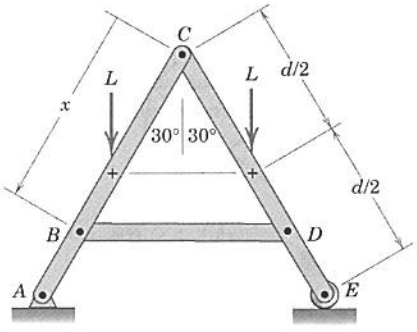
4/128 Mostre que a força no elemento horizontal *BD* é independente de sua posição *x* dentro da treliça triangular. Cada lado da treliça completa suporta uma carga vertical centrada *L* como mostrado pelos dois vetores tracejados, e suas cargas são, então, distribuídas aos nós, como mostrado pelos vetores sólidos.



Problema 4/128

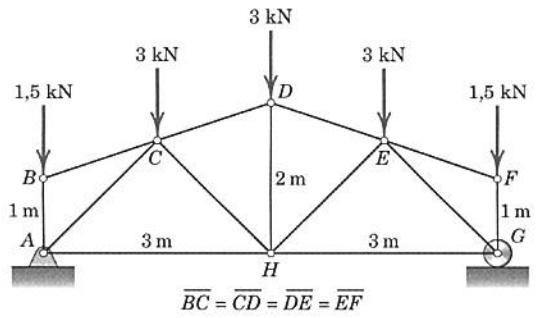
4/129 A forma estrutural básica e o carregamento do Prob. 4/128 são agora tratados como o suporte carregado mostrado na figura. Determine a força no elemento horizontal *BD* como uma função de sua posição *x* dentro do suporte.

Resp. $BD = \dfrac{0{,}289Ld}{x}$



Problema 4/129

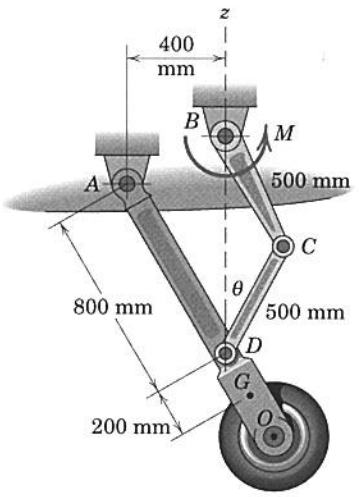
4/130 Determine as forças nos elementos *CH*, *AH* e *CD* da treliça carregada.



Problema 4/130

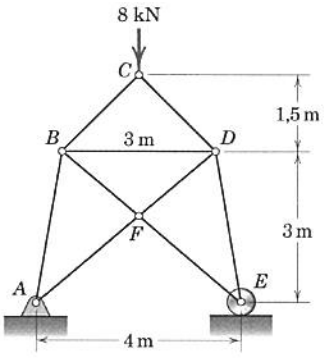
4/131 O trem de pouso frontal é levantado pela aplicação de um torque M à conexão BC através do eixo em B. Se o braço e a roda AO têm uma massa combinada de 50 kg, com centro de gravidade em G, encontre o valor M necessário para levantar a roda quando D está diretamente sob B, posição para a qual o ângulo θ é 30°.

Resp. $M = 153{,}3$ N · m



Problema 4/131

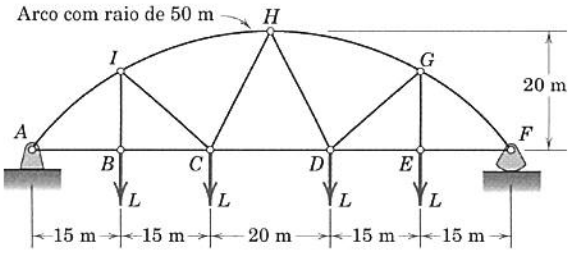
4/132 Determine a força no elemento BF da treliça carregada.



Problema 4/132

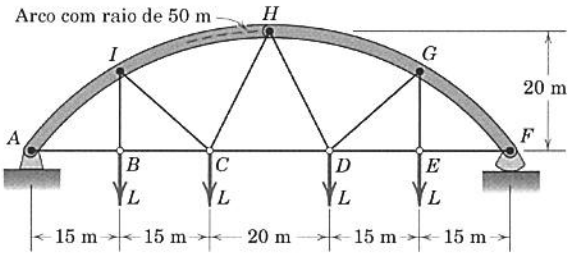
4/133 Determine as forças nos elementos AB, BI e CI da treliça simples. Observe que todos os elementos curvos são elementos de duas forças.

Resp. $AB = 2{,}26L\ T$, $BI = L\ T$, $CI = 0{,}458L\ T$



Problema 4/133

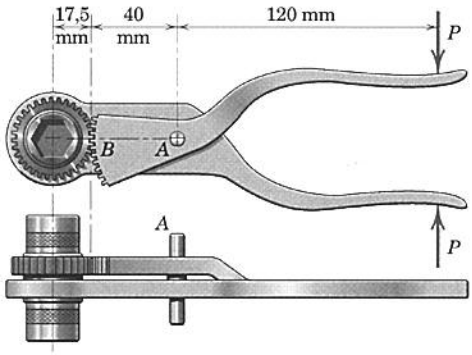
4/134 A estrutura do Prob. 4/133 é modificada de forma a substituir os quatro elementos curvos pelos dois elementos AIH e HGF. A instrumentação indica que a tração em cada um dos elementos CH e DH vale $0{,}5L$. Determine as forças nos elementos AB, BI e CI. O problema pode ser resolvido sem a informação sobre CH?



Problema 4/134

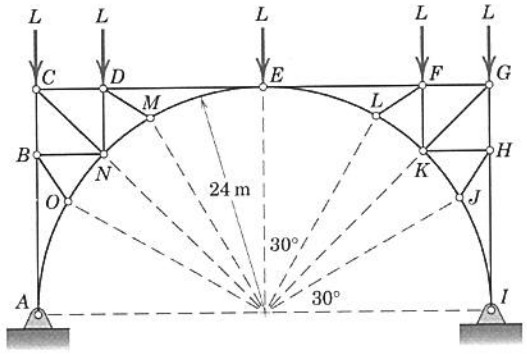
4/135 Uma chave de boca antitorque é projetada para ser usada por um tripulante de uma nave espacial onde ele não tem uma plataforma estável contra a qual se empurrar enquanto aperta um parafuso. O pino A se encaixa em um furo adjacente na estrutura que contém o parafuso a ser apertado. Oscilações sucessivas do cabo e da engrenagem giram o soquete em uma direção por meio da ação de um mecanismo de catraca. A reação contra o pino A fornece a característica "antitorque" da ferramenta. Para uma força de aperto $P = 150$ N, determine o torque M transmitido ao parafuso e a reação externa R contra o pino A normal à linha AB. (Um lado da ferramenta é usado para apertar e o lado oposto para afrouxar um parafuso.)

Resp. $M = 7{,}88$ N · m, $R = 137{,}0$ N



Problema 4/135

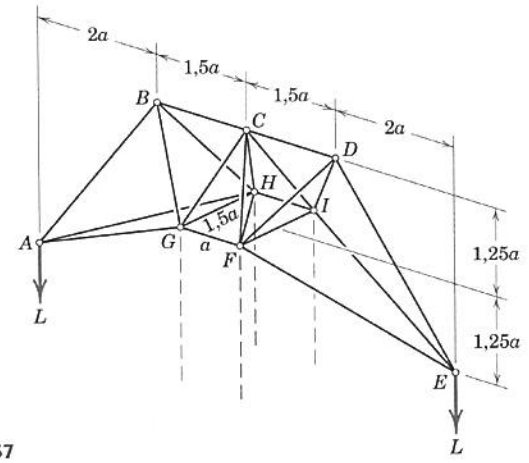
4/136 Determine as forças nos elementos DM e DN da treliça simétrica carregada.



Problema 4/136

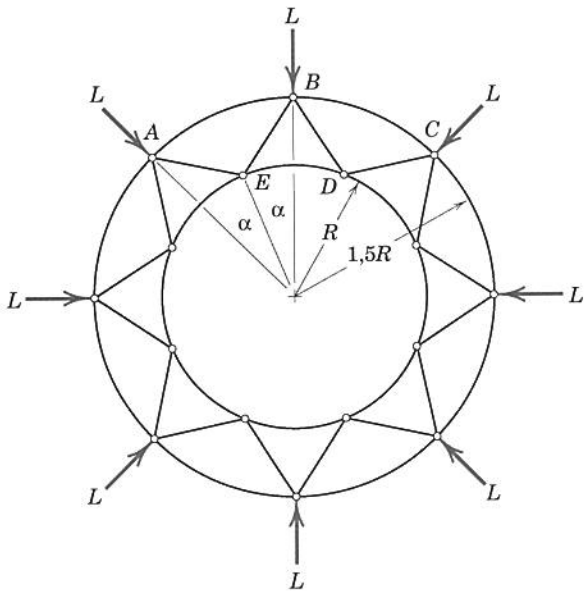
4/137 A estrutura mostrada está sendo considerada para a parte superior de uma torre de linha de transmissão e é apoiada nos pontos F, G, H e I. O ponto C está diretamente acima do centro do retângulo $FGHI$. Determine a força no elemento CD.

Resp. $CD = 2{,}4L\ T$



Problema 4/137

4/138 A estrutura mostrada está sendo considerada como parte de um grande vaso cilíndrico que deve suportar cargas externas. A instrumentação com extensômetros indica que a força compressiva no elemento BE vale $0{,}8L$. Determine as forças nos elementos AB e DE. Faça uso da simetria.

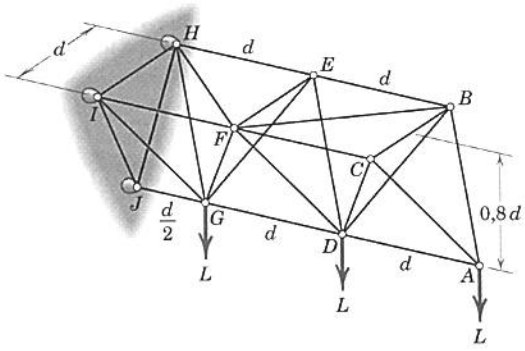


Problema 4/138

$\alpha = 22{,}5°$

4/139 Determine as forças nos elementos AD e DG.

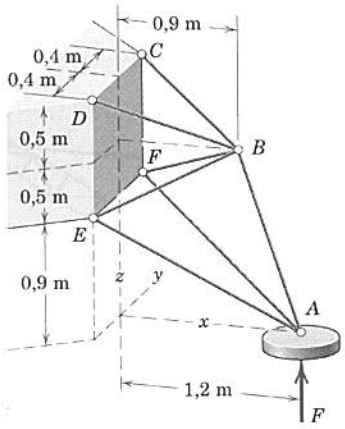
Resp. $AD = 0{,}625L\ C$, $DG = 2{,}5L\ C$



Problema 4/139

▶**4/140** Cada um dos elementos da estrutura de aterrissagem de uma nave para exploração de planetas é projetado como uma treliça espacial simétrica em torno do plano vertical x-z, como mostrado. Para uma força de aterrissagem $F = 2{,}2$ kN, calcule a força correspondente no elemento BE. A suposição de equilíbrio estático para a treliça é aceitável se a massa da treliça for muito pequena. Considere cargas iguais nos elementos dispostos simetricamente.

Resp. $F_{BE} = 1{,}620$ kN

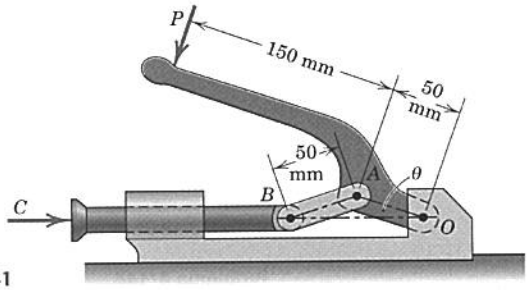


Problema 4/140

*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador**

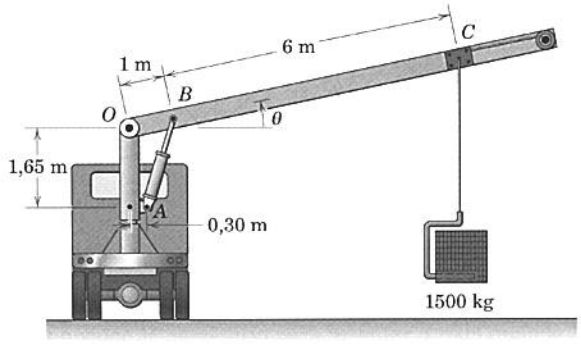
***4/141** Para uma dada força P no cabo do rebitador, a força de aperto C aumenta para valores muito grandes à medida que o ângulo θ decresce. Para $P = 120$ N, determine a relação entre C e θ e faça um gráfico da força C em função de θ desde $\theta = 2°$ até $\theta = 30°$. Considere que o eixo desliza livremente em sua guia.

Resp. $C = \dfrac{240}{\operatorname{sen}\theta}$ N



Problema 4/141

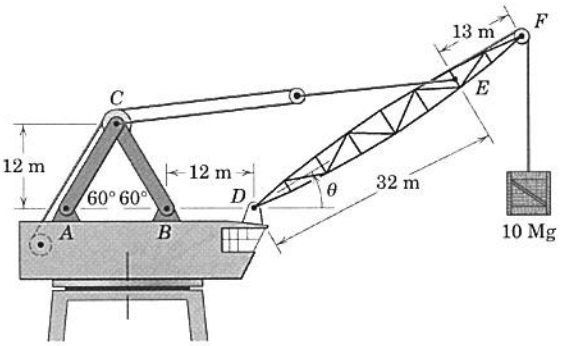
***4/142** O caminhão com um guindaste acoplado é usado na entrega de tijolos. Para a posição dada da ponte C, ao longo da lança, determine e faça um gráfico da força F no cilindro hidráulico AB em função do ângulo de elevação θ, para $0 \leq \theta \leq 75°$. Ache o valor máximo de F e o ângulo θ correspondente. Despreze a massa da lança, em relação àquela do estrado de tijolos de 1500 kg.



Problema 4/142

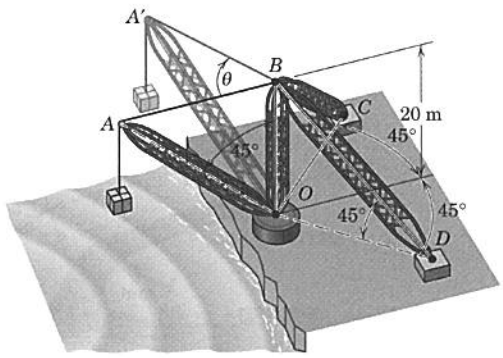
***4/143** O tipo de guindaste marítimo mostrado é usado tanto para operações nas docas quanto embarcado. Determine a força no elemento BC, faça seu gráfico em função do ângulo θ do mastro para $0 \leq \theta \leq 80°$ e calcule o valor dessa força para $\theta = 40°$. Despreze o raio de todas as polias e o peso do mastro.

Resp. $BC = 190{,}5$ kN em $\theta = 40°$



Problema 4/143

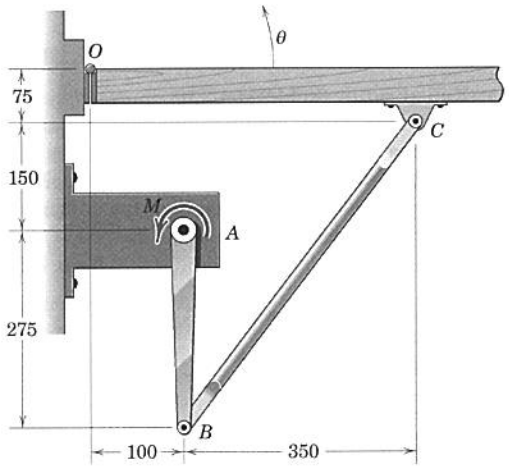
***4/144** A lança OA do grande guindaste a beira-mar pode girar em torno do elemento vertical OB. Determine as forças nos elementos BC e BD e faça seus gráficos em função do ângulo θ $-90° \leq \theta \leq 90°$. A massa da carga é de 3 Mg. O ângulo de elevação de 45° da lança permanece constante; os cabos para controle do ângulo de elevação da lança foram omitidos para maior clareza.



Problema 4/144

***4/145** Um dispositivo de abertura de porta é mostrado na figura. As dobradiças com molas em O fornecem um momento $K_T\theta$ que tende a fechar a porta, onde θ é o ângulo de abertura da porta e a constante de torção da mola é $K_T = 56{,}5$ N · m/rad. O motor em A fornece um momento variável M de forma que a porta que se abre lentamente está sempre em equilíbrio quase-estático. Determine para a faixa $0 \leq \theta \leq 90°$, o momento M e força no pino B em função de θ. Calcule o valor de M para $\theta = 45°$.

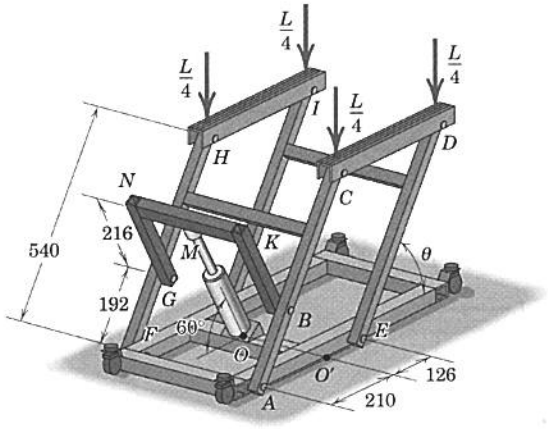
Resp. $M = 32{,}2$ N · m em $\theta = 45°$



Dimensões em milímetros

Problema 4/145

***4/146** O cavalete é usado para levantar motocicletas durante sua fabricação ou reparo. O cilindro hidráulico OM permanece no ângulo de 60° à medida que o ângulo de elevação θ varia. As figuras $ACDE$ e $FHIJ$ (J está escondido) são paralelogramos. Existe uma rótula em M para permitir a rotação da estrutura $BKMNG$. Se a carga total for $L = 4$ kN, determine a força axial R necessária no cilindro e faça seu gráfico em função de θ para $0 \leq \theta \leq 90°$. Ache o máximo valor de R e o ângulo no qual esse máximo ocorre. Na mesma faixa de θ, faça um gráfico da força lateral S, aplicada à barra do cilindro em M e ache seu valor absoluto máximo.



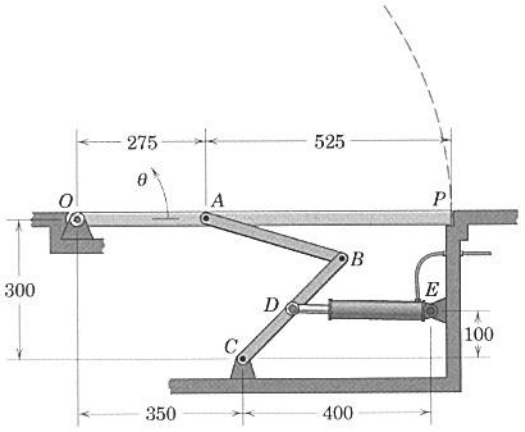
Dimensões em milímetros

Problema 4/146

***4/147** A porta de ventilação uniforme OAP, com 30 kg, é aberta pelo mecanismo mostrado. Faça um gráfico da força necessária no cilindro DE em função do ângulo de abertura da porta θ, na faixa

$0 \leq \theta \leq \theta_{máx}$, onde $\theta_{máx}$ é a abertura máxima. Determine os valores máximo e mínimo dessa força e os ângulos para os quais esses extremos ocorrem. Observe que o cilindro não está horizontal quando $\theta = 0$.

Resp. $(F_{DE})_{máx} = 3580$ N em $\theta = 0$
$(F_{DE})_{mín} = 0$ em $\theta_{máx} = 65{,}9°$

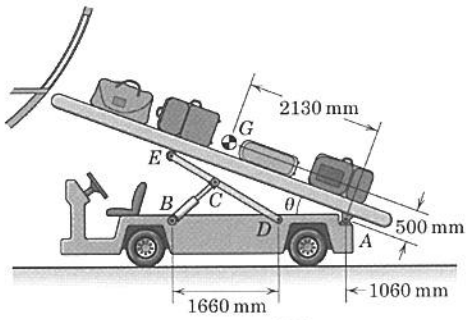


$\overline{AB} = 300$ $\overline{CD} = \overline{DB} = 150$

Dimensões em milímetros

Problema 4/147

***4/148** A máquina mostrada é usada para ajudar a carregar bagagens em aviões. A massa combinada da esteira e das bagagens é de 100 kg, com um centro de massa em G. Determine a força no cilindro hidráulico, faça seu gráfico em função de θ na faixa $5° \leq \theta \leq 30°$, e calcule seu valor máximo nessa faixa.

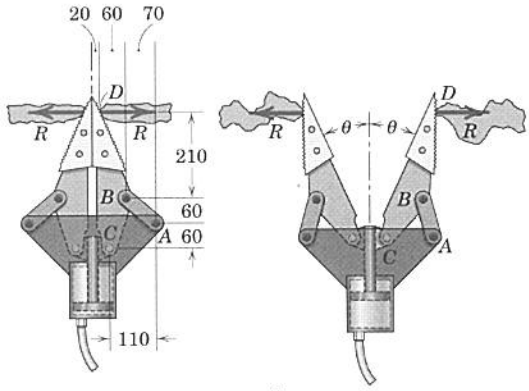


Problema 4/148

$\overline{DE} = 1945$ mm $\overline{CD} = 1150$ mm

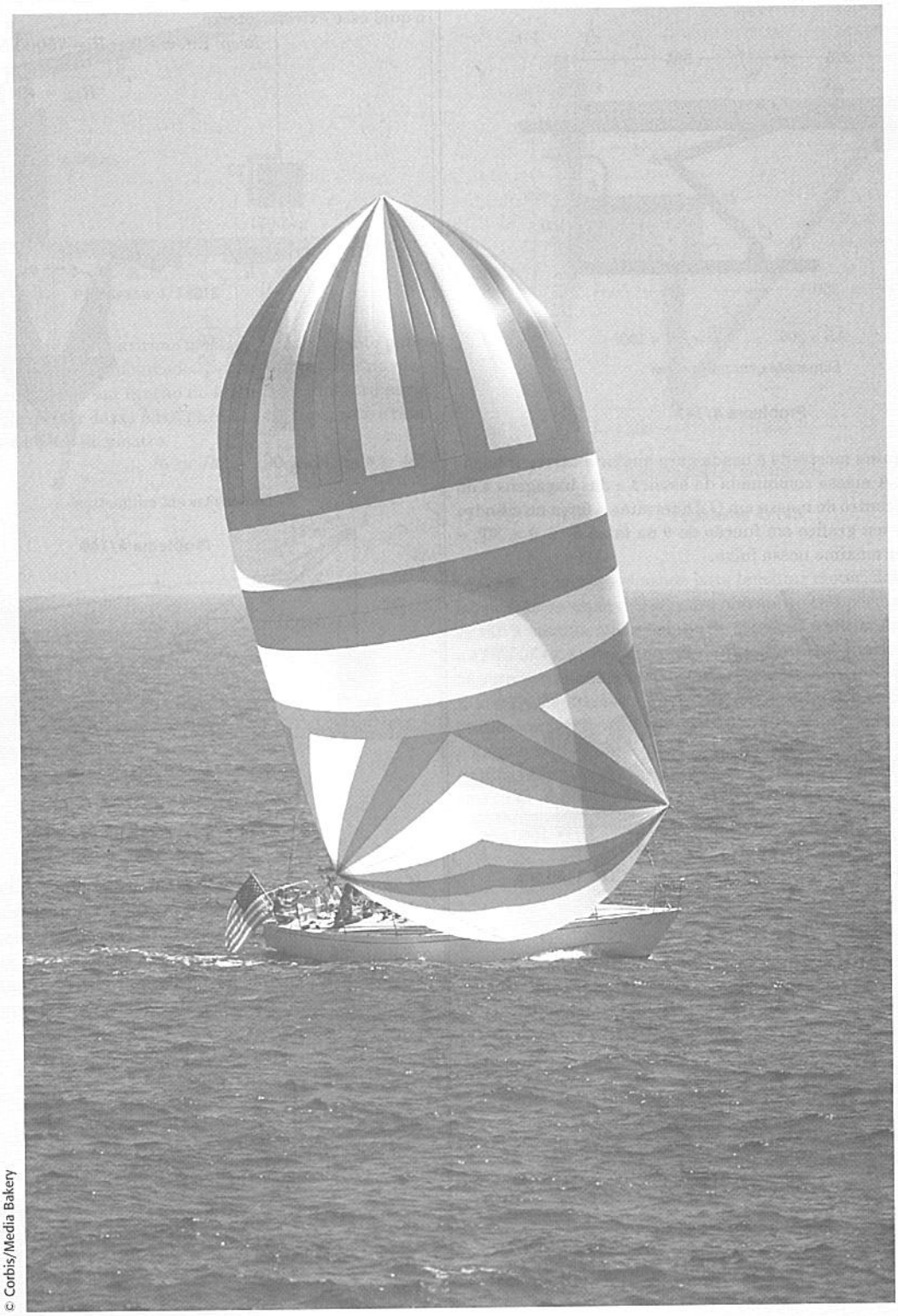
***4/149** O dispositivo "garras da vida" é utilizado por equipes de resgate para abrir passagem em destroços. Uma pressão de 35 MPa ($35(10^6)$N/m^2) é desenvolvida atrás do pistão de 50 mm de raio. Comece calculando a força de abertura R, a força na conexão AB e a força de reação horizontal em C para a condição mostrada à esquerda. A seguir, desenvolva expressões para essas quantidades e faça um gráfico em função do ângulo θ da garra (mostrado à direita) na faixa $0 \leq \theta \leq 45°$. Diga qual é o valor mínimo de R e o valor de θ para o qual esse extremo ocorre.

Resp. Em $\theta = 0$: $R = 75000$ N, $AB = 211000$ N
$C_x = -85400$ N
$R_{mín} = 49400$ N em $\theta = 23{,}2°$



Dimensões em milímetros

Problema 4/149



© Corbis/Media Bakery

Quando forças estão distribuídas continuamente sobre uma região de uma estrutura, o efeito cumulativo dessa distribuição deve ser determinado. Os projetistas de veleiros de alto desempenho consideram tanto as distribuições devidas à pressão do ar sobre as velas quanto as distribuições devidas à pressão da água sobre o casco.

5 Forças Distribuídas

DESCRIÇÃO DO CAPÍTULO

5/1 Introdução

SEÇÃO A CENTROS DE MASSA E CENTRÓIDES

5/2 Centro de Massa

5/3 Centróides de Linhas, Áreas e Volumes

5/4 Corpos Compostos e Figuras; Aproximações

5/5 Teoremas de Pappus

SEÇÃO B TÓPICOS ESPECIAIS

5/6 Vigas – Efeitos Externos

5/7 Vigas – Efeitos Internos

5/8 Cabos Flexíveis

5/9 Fluido–Estática

5/10 Revisão do Capítulo

5/1 Introdução

Nos capítulos anteriores tratamos todas as forças como concentradas sobre suas linhas de ação e em seus pontos de aplicação. Este tratamento forneceu um modelo razoável para aquelas forças. Na realidade, forças "concentradas" não existem no sentido exato, pois cada força externa mecanicamente aplicada a um corpo é distribuída sobre uma área de contato finita, ainda que pequena.

A força exercida pelo pavimento sobre o pneu de um automóvel, por exemplo, é aplicada ao pneu em toda a sua área de contato. Fig. 5/1*a*, a qual pode ser apreciável se o pneu for macio. Na análise das forças atuando no carro como um todo, se a dimensão b da área de contato for desprezível em comparação com as outras dimensões pertinentes, tal como a distância entre rodas, então podemos substituir a força de contato distribuída real pela sua resultante R, tratada como uma força concentrada. Mesmo a força de contato entre uma esfera de aço endurecido e sua pista em um rolamento de esferas sob carga, Fig. 5/1*b*, é aplicada sobre uma área de contato finita, embora extremamente pequena. As forças aplicadas a um elemento de duas forças em uma treliça, Fig. 5/1*c*, são aplicadas sobre uma área de contato real do pino contra o furo e, internamente, ao longo da seção cortada como mostrado. Nesses e em outros exemplos semelhantes podemos tratar as forças como concentradas ao analisar seus efeitos externos sobre corpos tratados como um todo.

Se, por outro lado, queremos achar a distribuição das forças *internas* no material de um corpo próximo ao ponto de contato, onde as tensões e deformações internas podem ser apreciáveis, não devemos, então, tratar a carga como concentrada, mas, sim, considerar a distribuição real. Esse problema não será discutido aqui, porque ele requer um conhecimento das propriedades do material e pertence a tratamentos mais avançados da mecânica dos materiais e das teorias de elasticidade e plasticidade.

Quando forças são aplicadas sobre uma região cujas dimensões não sejam desprezíveis em comparação com outras dimen-

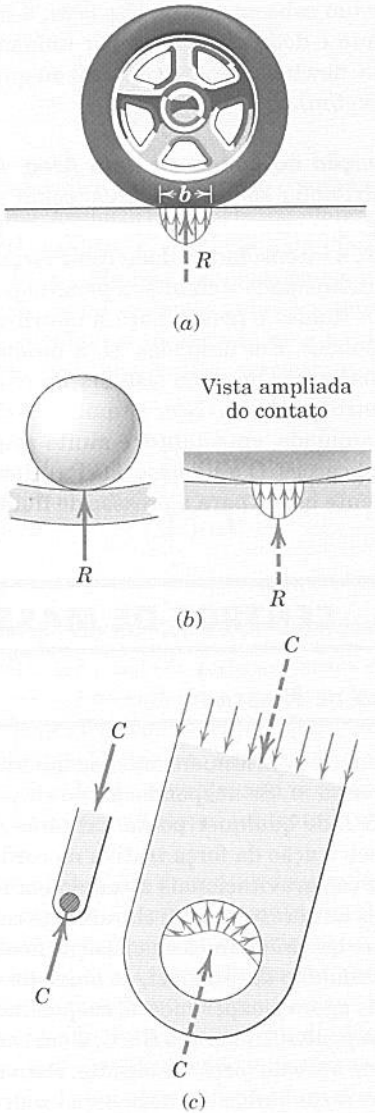


Figura 5/1

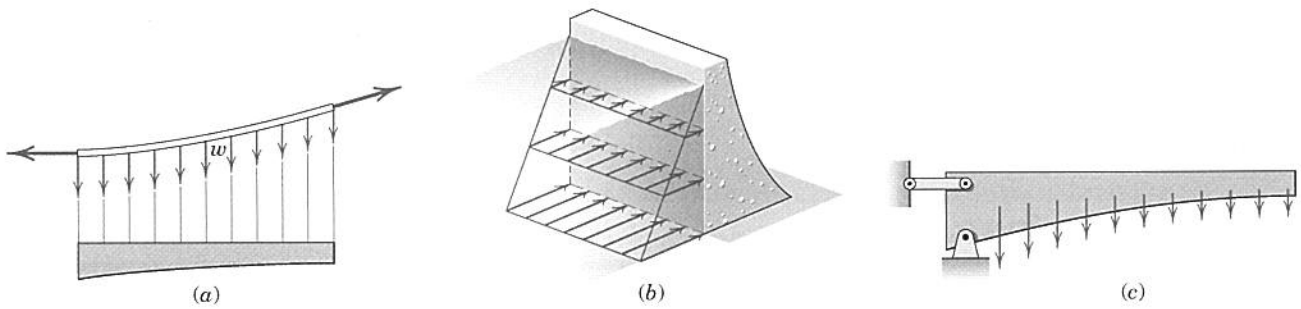


Figura 5/2

sões pertinentes, devemos então considerar a distribuição verdadeira de força. Fazemos isto somando os efeitos da força distribuída sobre toda a região usando integração matemática. Isto requer o conhecimento da intensidade da força em todas as posições. Existem três categorias de problemas deste gênero.

(1) Distribuição Linear. Quando uma força está distribuída ao longo de uma linha, como na carga vertical contínua suportada por um cabo suspenso, Fig. 5/2*a*, a intensidade w do carregamento é dada como força por unidade de comprimento da linha, newtons por metro (N/m) ou quilograma-força por metro (kgf/m).

(2) Distribuição ao Longo de uma Área. Quando uma força está distribuída sobre uma área, como a pressão hidráulica da água contra a face interna da seção de uma represa, Fig. 5/2*b*, a intensidade é dada como força por unidade de área. Esta intensidade é chamada *pressão* para a ação de forças devida a fluidos e *tensão* para a distribuição interna de forças em sólidos. Em unidades SI, a unidade básica de pressão ou tensão mecânica no sistema inercial (LMT) é o newton por metro quadrado (N/m^2), também é chamado *pascal* (Pa). Essa unidade, entretanto, é muito pequena para a maioria das aplicações. O quilopascal (kPa), que vale 10^3 Pa, é mais comumente usado para a pressão de fluidos, e o megapascal, que equivale a 10^6 Pa, é usado para tensão. No sistema gravitacional (LFT), tanto a pressão causada por um fluido quanto a tensão mecânica são comumente dadas em quilograma-força por metro quadrado (kgf/m^2).*

(3) Distribuição Volumétrica. Uma força que está distribuída sobre o volume de um corpo é chamada de *força de corpo.* A força de corpo mais comum é a força de atração gravitacional, que atua em todos os elementos de massa em um corpo. A determinação das forças nos suportes da estrutura pesada em balanço na Fig. 5/2*c*, por exemplo, teria que considerar a distribuição da força gravitacional por toda a estrutura. A intensidade da força gravitacional é o *peso específico* ρg, onde ρ é a massa específica (massa por unidade de volume) e g é a aceleração devida à gravidade. Em unidades SI, as unidades de ρg no sistema inercial são $(kg/m^3)(m/s^2) = N/m^3$ e no sistema gravitacional, kgf/m^3.

A força de corpo devida à atração gravitacional da Terra (peso) é, de longe, a força distribuída mais comumente encontrada. A Seção A deste capítulo trata da determinação do ponto em um corpo no qual atua a força gravitacional resultante, e discute as propriedades geométricas associadas de linhas, áreas e volumes. A Seção B trata de forças distribuídas que agem sobre, e em vigas e cabos flexíveis, e de forças distribuídas que fluidos exercem sobre superfícies expostas.

SEÇÃO A CENTROS DE MASSA E CENTRÓIDES

5/2 Centro de Massa

Considere um corpo tridimensional de qualquer tamanho e forma com massa m. Se suspendermos o corpo, como mostrado na Fig. 5/3, de qualquer ponto, tal como A, ele estará em equilíbrio sob a ação da força trativa na corda e da resultante W das forças gravitacionais atuando em todas as partículas do corpo. Esta resultante é claramente colinear com a corda. Considere que marcamos sua posição fazendo um furo hipotético, de tamanho desprezível, ao longo da sua linha de ação. Repetimos agora o experimento, suspendendo o corpo a partir de outros pontos, tais como B e C, e em cada caso marcamos a linha de ação da força resultante. Para todos os propósitos práticos essas linhas de ação serão concorrentes em um único ponto G, que é chamado de *centro de gravidade* do corpo.

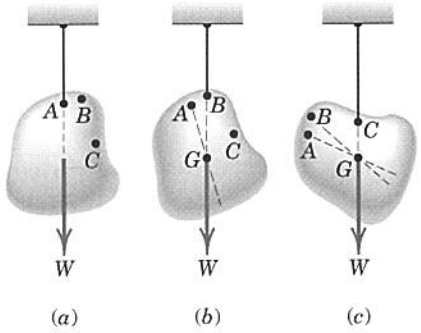


Figura 5/3

*Na prática, tanto a pressão quanto a tensão mecânica são também expressas, no sistema LFT, em libra por polegada quadrada (psi – pound square inch). (N.E.)

Uma análise exata, entretanto, deveria considerar as pequenas diferenças de direção das forças de gravidade para as várias partículas do corpo, porque essas forças convergem na direção do centro de atração da Terra. Além disso, como as partículas estão em distâncias diferentes em relação à Terra, a intensidade do campo de força da Terra não é exatamente constante em todo o corpo. Como conseqüência, as linhas de ação das resultantes da força de gravidade nos experimentos anteriormente descritos não serão exatamente concorrentes e, deste modo, não existe, no seu sentido exato, um único centro de gravidade. Isso não tem importância prática enquanto lidarmos com corpos cujas dimensões são pequenas em comparação com as da Terra. Consideramos, portanto, um campo de força uniforme e paralelo devido à atração gravitacional da Terra e esta hipótese resulta no conceito de um único centro de gravidade.

Determinando o Centro de Gravidade

Para se determinar matematicamente a localização do centro de gravidade de qualquer corpo, Fig. 5/4*a*, aplicamos o *princípio dos momentos* (veja a Seção 2/6) ao sistema paralelo de forças gravitacionais. O momento da força gravitacional resultante W em relação a qualquer eixo é igual à soma dos momentos, em relação ao mesmo eixo, das forças gravitacionais dW atuando em todas as partículas do corpo, tratadas como elementos infinitesimais. A resultante das forças gravitacionais atuando em todos os elementos é o peso do corpo e é dado pela soma $W = \int dW$. Se aplicarmos o princípio dos momentos em relação ao eixo y, por exemplo, o momento, em torno deste eixo, do peso elementar é $x\,dW$, e a soma desses momentos para todos os elementos do corpo é $\int x\,dW$. Esta soma de momentos deve ser igual a $W\bar{x}$, o momento da soma. Assim, $\bar{x}W = \int x\,dW$.

Com expressões semelhantes para as outras duas componentes, podemos expressar as coordenadas do centro de gravidade G como

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dW}{W} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dW}{W} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dW}{W} \tag{5/1a}$$

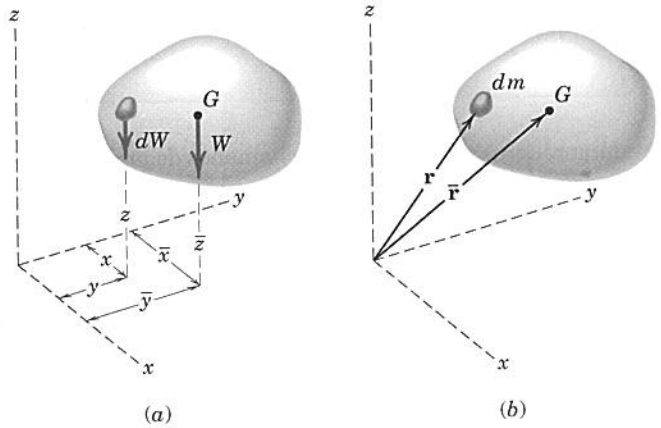


Figura 5/4

Para visualizar o sentido físico dos momentos das forças de gravidade na terceira equação, podemos reorientar o corpo e os eixos associados de modo que o eixo z seja horizontal. É essencial reconhecer que o numerador de cada uma destas expressões representa o *somatório dos momentos*, enquanto o produto de W pela coordenada correspondente de G representa o *momento do somatório*. Esse princípio dos momentos terá uso repetido por toda a mecânica.

Com a substituição de $W = mg$ e $dW = g\,dm$, as expressões para as coordenadas do centro de gravidade tornam-se

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{m} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{m} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dm}{m} \tag{5/1b}$$

As Eqs. 5/1*b* podem ser expressas em forma vetorial com a ajuda da Fig. 5/4*b*, na qual a massa elementar e o centro de massa G são localizados por seus respectivos vetores de posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}$. Assim, as Eqs. 5/1*b* são as componentes de uma única equação vetorial

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int \mathbf{r}\,dm}{m} \tag{5/2}$$

A massa específica ρ de um corpo é a sua massa por unidade de volume. Assim, a massa de um elemento diferencial de volume dV será $dm = \rho\,dV$. Se ρ não for constante por todo o corpo, mas puder ser expressa como uma função das coordenadas do corpo, devemos levar em consideração essa variação ao calcular os numeradores e os denominadores das Eqs. 5/1*b*. Podemos, então, escrever essas expressões como

$$\bar{x} = \frac{\int x\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\rho\,dV}{\int \rho\,dV} \tag{5/3}$$

Centro de Massa *versus* Centro de Gravidade

As Eqs. 5/1*b*, 5/2 e 5/3 são independentes dos efeitos gravitacionais, pois g não está mais presente. Deste modo, elas definem um ponto especial no corpo, que é uma função apenas da distribuição de massa. Este ponto é chamado *centro de massa* e coincide claramente com o centro de gravidade enquanto o campo gravitacional for tratado como uniforme e paralelo.

Não tem sentido falar do centro de gravidade de um corpo que seja retirado do campo gravitacional da Terra, pois nenhuma força gravitacional atuaria nele. O corpo ainda teria, entretanto, seu centro de massa particular. Daqui para a frente, iremos freqüentemente nos referir ao centro de massa em vez do centro de gravidade. Além disso, o centro de massa tem um significado especial no cálculo da resposta dinâmica de um corpo a forças fora do equilíbrio. Essa classe de problemas é amplamente discutida no *Vol. 2 Dinâmica*.

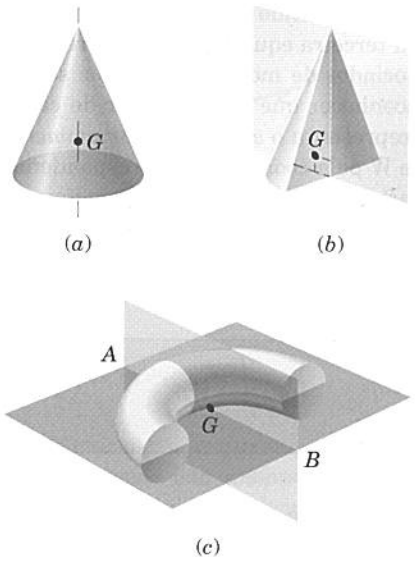


Figura 5/5

Na maioria dos problemas, o cálculo da posição do centro de massa pode ser simplificado por uma escolha inteligente dos eixos de referência. Em geral, os eixos devem ser colocados de modo a simplificar tanto quanto possível as equações de contorno. Assim, coordenadas polares serão úteis para corpos com contornos circulares.

Outra dica importante pode ser obtida a partir de considerações de simetria. Sempre que existir uma linha ou um plano de simetria em um corpo homogêneo, um eixo ou um plano coordenado coincidente deve ser escolhido com essa linha ou esse plano. O centro de massa sempre estará sobre essa linha ou nesse plano, pois os momentos devidos aos elementos simetricamente dispostos sempre se cancelarão e o corpo pode ser considerado como composto de pares destes elementos. Assim, o centro de massa G do cone circular homogêneo da Fig. 5/5*a* estará em algum lugar sobre seu eixo central, que é uma linha de simetria. O centro de massa da metade do cone circular está no seu plano de simetria, Fig. 5/5*b*. O centro de massa da metade do anel na Fig. 5/5*c* está em ambos os seus planos de simetria e, portanto, está situado sobre a linha AB. É mais fácil achar a posição de G usando simetria, sempre que ela existir.

5/3 Centróides de Linhas, Áreas e Volumes

Quando a massa específica ρ de um corpo é uniforme por todo o corpo, ela será um fator constante tanto nos numeradores quanto nos denominadores das Eqs. 5/3 e, portanto, será cancelada. As expressões remanescentes definem uma propriedade puramente geométrica do corpo, pois qualquer referência às propriedades de massa do corpo terá desaparecido. O termo *centróide* é usado quando os cálculos lidam apenas com a forma geométrica. Quando estivermos falando de um corpo físico real, usamos a expressão *centro de massa*. Se a massa específica for uniforme por todo o corpo, as posições do centróide e do centro de massa são idênticas, enquanto, se a massa específica variar, estes dois pontos, em geral, não irão coincidir.

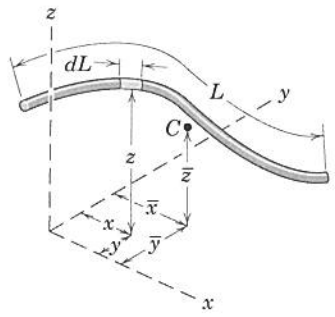


Figura 5/6

O cálculo dos centróides cai em três categorias distintas, dependendo se podemos modelar a forma do corpo envolvido como uma linha, uma área ou um volume.

(1) Linhas. Para uma barra esbelta ou um fio de comprimento L, área da seção transversal A e massa específica ρ, Fig. 5/6, o corpo se aproxima de um segmento de linha e $dm = \rho A\, dL$. Se ρ e A são constantes ao longo do comprimento da barra, as coordenadas do centro de massa serão também as coordenadas do centróide C do segmento de linha, as quais, a partir das Eqs. 5/1*b* podem ser escritas como

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dL}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dL}{L} \tag{5/4}$$

Observe que, em geral, o centróide C não estará sobre a linha. Se a barra estiver em um único plano, tal como o plano x-y, apenas duas coordenadas precisam ser calculadas.

(2) Áreas. Quando um corpo de massa específica ρ tem uma espessura t pequena, porém constante, podemos modelá-lo como uma área de superfície A, Fig. 5/7. A massa do elemento será $dm = \rho t\, dA$. Novamente, se ρ e t são constantes por toda a área, as coordenadas do centro de massa do corpo também serão as coordenadas do centróide C da área superficial e, das Eqs. 5/1*b*, as coordenadas podem ser escritas como

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dA}{A} \tag{5/5}$$

Os numeradores nas Eqs. 5/5 são chamados de *primeiros momentos de área*.* Se a superfície for curva, como ilustrado na Fig. 5/7 com o segmento de casca, todas as três coordenadas serão envolvidas. O centróide C para a superfície curva normalmente não estará sobre a superfície. Se a área for uma superfície plana no plano x-y, por exemplo, apenas as coordenadas de C nesse plano precisam ser calculadas.

*Segundos momentos de área (momentos dos primeiros momentos) aparecerão posteriormente em nossa discussão dos momentos de inércia no Apêndice A.

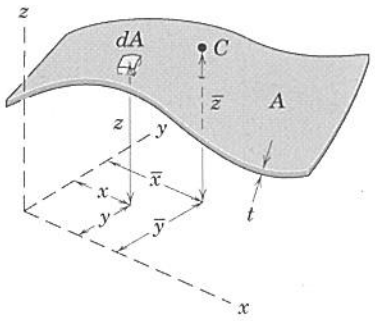


Figura 5/7

(3) Volumes. Para um corpo genérico de volume V e massa específica ρ, o elemento tem uma massa $dm = \rho\, dV$. A massa específica ρ se cancela se for constante em todo o volume e as coordenadas do centro de massa também serão as coordenadas do centróide C do corpo. Das Eqs. 5/3 ou 5/1*b* obtém-se

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dV}{V} \tag{5/6}$$

Escolha do Elemento para Integração

A principal dificuldade com uma teoria não está, freqüentemente, em seus conceitos, mas nos procedimentos para aplicá-la. Com os centros de massa e centróides o conceito do princípio dos momentos é suficientemente simples; os passos difíceis são a escolha do elemento diferencial e o estabelecimento das integrais. As cinco regras a seguir serão úteis.

(1) Ordem do Elemento. Sempre que possível deve-se selecionar um elemento diferencial de primeira ordem em vez de um elemento de maior ordem, de modo que apenas uma integração será necessária para englobar toda a figura. Assim, na Fig. 5/8*a* uma faixa horizontal de primeira ordem, de área $dA = l\, dy$, vai requerer apenas uma integração em relação a y para cobrir toda a figura. O elemento $dx\, dy$ de segunda ordem necessitará de duas integrações, primeiro em relação a x e depois em relação a y, para cobrir a figura. Como mais um exemplo, escolhemos para o cone sólido na Fig. 5/8*b* um elemento de primeira ordem na forma de uma fatia circular de volume $dV = \pi r^2\, dy$. Essa escolha requer apenas uma integração e, assim, é preferível à escolha de um elemento de terceira ordem $dV = dx\, dy\, dz$, que requereria três integrações complicadas.

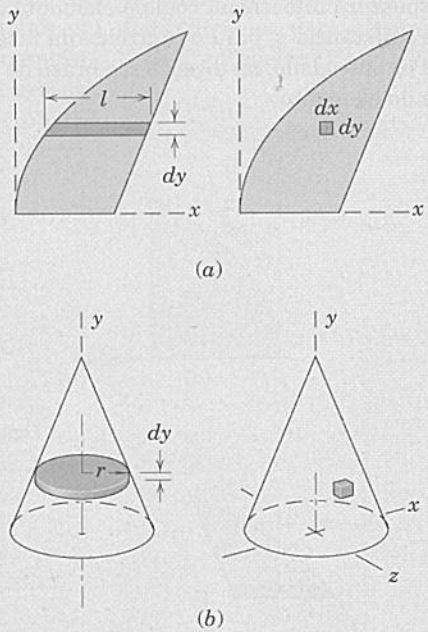


Figura 5/8

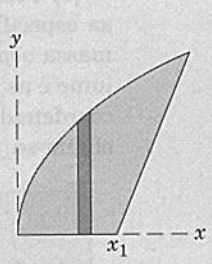


Figura 5/9

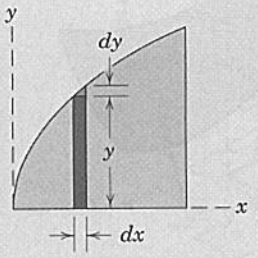


Figura 5/10

(2) Continuidade. Sempre que possível, escolhemos um elemento que pode ser integrado em uma operação contínua, que englobe toda a figura. Assim, a faixa horizontal na Fig. 5/8*a* seria preferível à faixa vertical na Fig. 5/9, que, se usada, necessitaria de duas integrações separadas, devido à descontinuidade na expressão para a altura da faixa em $x = x_1$.

(3) Eliminando Termos de Ordem Superior. Termos de ordem superior podem sempre ser desprezados em comparação com termos de menor ordem (veja a Seção 1/7). Assim, a área da faixa vertical sob a curva na Fig. 5/10 é dada pelo termo de primeira ordem $dA = y\,dx$ e a área triangular de segunda ordem $1/2dx\,dy$ é desprezada. No limite, claro, não existe erro.

(4) Escolha das Coordenadas. Como regra geral, escolhemos o sistema de coordenadas que melhor se ajuste aos contornos da figura. Assim, os contornos da área na Fig. 5/11*a* são mais facilmente descritos em coordenadas retangulares, enquanto os contornos do setor circular da Fig. 5/11*b* são mais adequados para coordenadas polares.

(5) Coordenadas do Centróide de um Elemento. Quando um elemento diferencial de primeira ou segunda ordem é escolhido, é essencial usar as *coordenadas do centróide do elemento* para o braço de alavanca quando se determina o momento do elemento diferencial. Assim, para a faixa horizontal na Fig. 5/12*a*, o momento de dA em relação ao eixo y é $x_c\,dA$, onde x_c é a coordenada x do centróide C do elemento. Observe que x_c *não* é a coordenada x que descreve qualquer dos contornos da área. Para este elemento, na direção y, o braço de alavanca y_c do centróide do elemento é igual, no limite, às coordenadas y dos dois contornos.

Como um segundo exemplo, considere a metade do cone sólido da Fig. 5/12*b*, com a faixa semicircular de espessura diferencial como o elemento de volume. O braço de alavanca para o elemento na direção x é a distância x_c para o centróide da face do elemento e não a distância x para o contorno do elemento. Por outro lado, na direção z, o braço de alavanca z_c do centróide do elemento é idêntico à coordenada z do elemento.

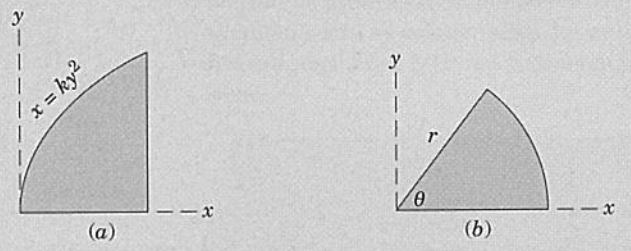


Figura 5/11

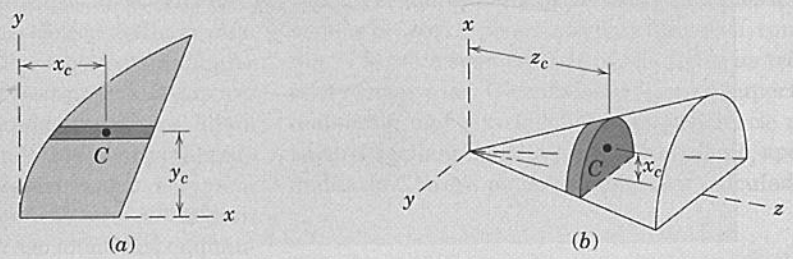


Figura 5/12

Com esses exemplos em mente, reescrevemos as Eqs. 5/5 e 5/6 na forma

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dA}{A} \tag{5/5a}$$

e

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dV}{V} \tag{5/6a}$$

É *essencial* reconhecer que o subscrito c serve para lembrar que os braços de alavanca que aparecem nos numeradores das expressões das integrais para os momentos são *sempre* as coordenadas dos *centróides* dos elementos particulares escolhidos.

Nesse ponto, você deve estar certo de entender claramente o princípio dos momentos, que foi apresentado na Seção 2/4. Você deve reconhecer o significado físico desse princípio quando ele é aplicado ao sistema de forças paralelas mostrado na Fig. 5/4*a*. Tenha em mente a equivalência entre o momento do peso resultante W e o somatório (integral) dos momentos dos pesos elementares dW, de modo a evitar erros ao equacionar matematicamente o problema. O reconhecimento do princípio dos momentos ajudará na obtenção da expressão correta para o braço de alavanca x_e, y_e ou z_e do centróide do elemento diferencial escolhido.

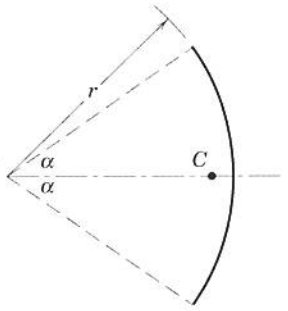
Tendo em mente o sentido físico do princípio dos momentos, reconheceremos que as Eqs. 5/4, 5/5 e 5/6, que são relações geométricas, são representativas também de corpos homogêneos, pois a massa específica ρ se cancela. Se a massa específica do corpo em questão não é constante, variando pelo corpo como alguma função das coordenadas, então ela não se cancelará do numerador e do denominador das expressões do centro de massa. Nesse caso, devemos usar as Eqs. 5/3 como explicado anteriormente.

Os Exemplos 5/1 a 5/5 que se seguem foram cuidadosamente escolhidos para ilustrar a aplicação das Eqs. 5/4, 5/5 e 5/6 no cálculo da posição do centróide para segmentos de linha (barras esbeltas), áreas (placas planas finas) e volumes (sólidos homogêneos). As cinco considerações de integração listadas anteriormente estão ilustradas em detalhe nesses exemplos.

A Seção C/10 do Apêndice C contém uma tabela de integrais que inclui aquelas necessárias para os problemas neste capítulo e nos subseqüentes. Um resumo das coordenadas dos centróides para algumas formas usadas comumente é dado nas Tabelas D/3 e D/4 do Apêndice D.

Exemplo 5/1

Centróide de um arco circular. Localize o centróide de um arco circular, como mostrado na figura.



Solução. Escolher o eixo x como eixo de simetria faz com que $\bar{y} = 0$. Um elemento de arco diferencial tem comprimento $dL = r\,d\theta$, dado em coordenadas polares, e a coordenada x do elemento é $r \cos \theta$. ①

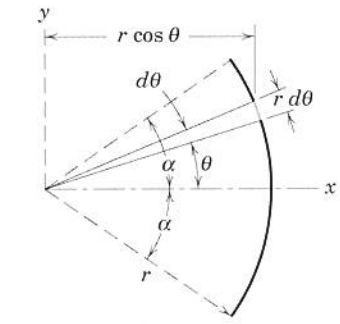
Aplicando a primeira das Eqs. 5/4 e substituindo $L = 2\alpha r$ obtém-se

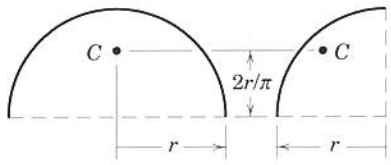
$$[L\bar{x} = \int x\,dL] \qquad (2\alpha r)\bar{x} = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r\cos\theta)\, r\,d\theta$$

$$2\alpha r\bar{x} = 2r^2 \operatorname{sen}\alpha$$

$$\bar{x} = \frac{r \operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \qquad \textit{Resp.}$$

Para um arco semicircular $2\alpha = \pi$, o que fornece $\bar{x} = 2r/\pi$. Por simetria, vemos imediatamente que este resultado também se aplica ao arco de quarto de círculo quando a medida é feita como mostrado.



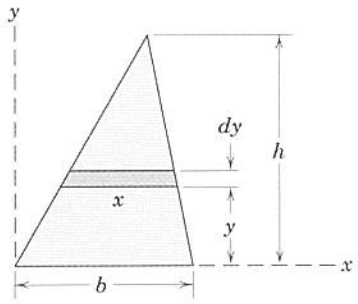


Sugestão Útil

① Deve ser perfeitamente evidente que as coordenadas polares são preferíveis às coordenadas retangulares para expressar o comprimento de um arco circular.

Exemplo 5/2

Centróide de uma área triangular. Determine a distância $\bar{h}$ desde a base de um triângulo de altura h até o centróide de sua área.



Solução. O eixo x é colocado de modo a coincidir com a base. Uma faixa diferencial de área $dA = x\,dy$ é escolhida. Por semelhança de triângulos $x/(h - y) = b/h$. Aplicando a segunda das Eqs. 5/5a obtém-se ①

$$[A\bar{y} = \int y_c\,dA] \qquad \frac{bh}{2}\bar{y} = \int_0^h y\frac{b(h-y)}{h}\,dy = \frac{bh^2}{6}$$

e

$$\bar{y} = \frac{h}{3} \qquad \textit{Resp.}$$

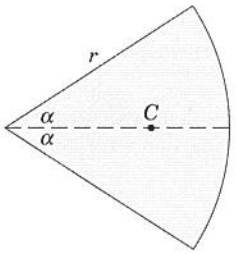
Este mesmo resultado é válido para qualquer dos outros dois lados do triângulo, considerando-se uma nova base com a nova altura correspondente. Assim, o centróide se situa na interseção das medianas, pois a distância deste ponto a partir de qualquer lado, considerado como a base, é um terço da altura do triângulo.

Sugestão Útil

① Economizamos uma integração aqui, pelo uso de um elemento de área de primeira ordem. Reconheça que dA deve ser dado em função da variável de integração y; assim, é preciso que $x = f(y)$.

Exemplo 5/3

Centróide da área de um setor circular. Localize o centróide da área de um setor circular em relação ao seu vértice.



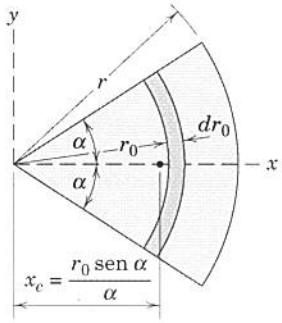
Solução I. O eixo x é escolhido como o eixo de simetria, e, deste modo, $\bar{y}$ automaticamente vale zero. Podemos preencher a área movendo um elemento com a forma de um anel circular parcial, como mostrado na figura, desde o centro até a periferia. O raio do ① anel vale r_0 e sua espessura é dr_0, de modo que sua área é $dA = 2r_0\alpha\, dr_0$.

A coordenada x do centróide do elemento do Exemplo 5/1 é $x_c = r_0 \operatorname{sen} \alpha/\alpha$, onde r_0 ② substitui r na equação. Assim, a primeira das Eqs. 5/5*a* dá

$$[A\bar{x} = \int x_c\, dA] \qquad \frac{2\alpha}{2\pi}(\pi r^2)\bar{x} = \int_0^r \left(\frac{r_0 \operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)(2r_0\alpha\, dr_0)$$

$$r^2\alpha\bar{x} = \frac{2}{3}r^3 \operatorname{sen}\alpha$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{r \operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \qquad \textit{Resp.}$$



Solução I

Solução II. A área pode também ser preenchida girando-se um triângulo de área diferencial em relação ao vértice e por todo o ângulo do setor. Este triângulo, mostrado na ilustração, tem uma área $dA = (r/2)(r\, d\theta)$, onde os termos de ordem superior são desprezados. Do Exemplo 5/2, o centróide do elemento de área triangular está a dois terços de sua altura a partir do vértice, de modo que a coordenada x ao centróide do elemento é $x_c = \frac{2}{3}r\cos\theta$. Aplicando a primeira das Eqs. 5/5*a* obtém-se

$$[A\bar{x} = \int x_c\, dA] \qquad (r^2\alpha)\bar{x} = \int_{-\alpha}^{\alpha} (\tfrac{2}{3}r\cos\theta)(\tfrac{1}{2}r^2\, d\theta)$$

$$r^2\alpha\bar{x} = \frac{2}{3}r^3 \operatorname{sen}\alpha$$

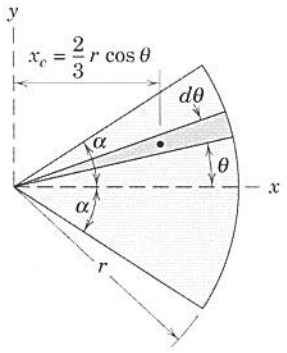
e, como antes,

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{r \operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestões Úteis

① Observe cuidadosamente que devemos distinguir entre a variável r_0 e a constante r.

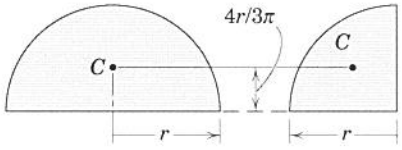
② Tome cuidado para não usar r_0 como a coordenada do centróide do elemento.



Solução II

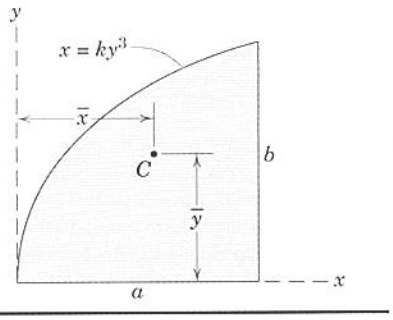
Para uma área semicircular $2\alpha = \pi$, o que dá $\bar{x} = 4r/3\pi$. Por simetria, vemos imediatamente que esse resultado também se aplica à área do quarto de círculo onde a medida é feita como mostrado.

Deve-se notar que se tivéssemos escolhido um elemento de segunda ordem $r_0 dr_0 d\theta$, uma integração em relação a θ levaria ao anel com o qual a *Solução I* começou. Por outro lado, a integração, inicialmente em relação a r_0, daria o elemento triangular com o qual a *Solução II* começou.



Exemplo 5/4

Localize o centróide da área sob a curva $x = ky^3$ desde $x = 0$ até $x = a$.



Solução I. Um elemento vertical de área $dA = y\,dx$ é escolhido, como mostrado na figura. A coordenada x do centróide é determinada a partir da primeira das Eqs. 5/5a. Assim,

① $[A\bar{x} = \int x_c\,dA] \qquad \bar{x}\int_0^a y\,dx = \int_0^a xy\,dx$

Substituindo $y = (x/k)^{1/3}$ e $k = a/b^3$ e integrando obtém-se

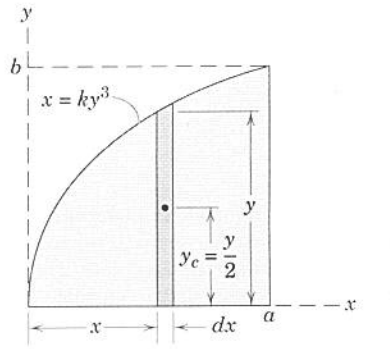
$$\frac{3ab}{4}\bar{x} = \frac{3a^2b}{7} \qquad \bar{x} = \tfrac{4}{7}a \qquad \textit{Resp.}$$

Na solução para $\bar{y}$ a partir da segunda das Eqs. 5/5a, a coordenada ao centróide do elemento retangular é $y_c = y/2$, onde y é a altura da faixa dada pela equação da curva $x = ky^3$. Assim, o princípio dos momentos será

$$[A\bar{y} = \int y_c\,dA] \qquad \frac{3ab}{4}\bar{y} = \int_0^a \left(\frac{y}{2}\right)y\,dx$$

Substituindo $y = b(x/a)^{1/3}$ e integrando tem-se

$$\frac{3ab}{4}\bar{y} = \frac{3ab^2}{10} \qquad \bar{y} = \tfrac{2}{5}b \qquad \textit{Resp.}$$



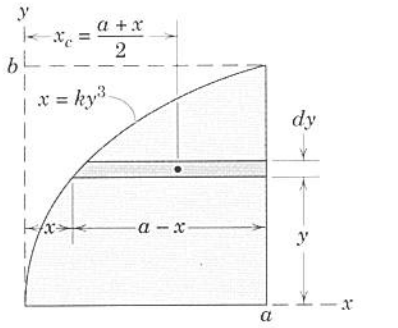
Solução II. O elemento de área horizontal mostrado na figura de baixo pode ser empregado no lugar do elemento vertical. A coordenada x do centróide do elemento retangular é $x_c = x + \frac{1}{2}(a - x) = (a + x)/2$, que é simplesmente a média das coordenadas a e x das extremidades da faixa. Deste modo,

$$[A\bar{x} = \int x_c\,dA] \qquad \bar{x}\int_0^b (a - x)\,dy = \int_0^b \left(\frac{a + x}{2}\right)(a - x)\,dy$$

O valor de $\bar{y}$ é determinado de

$$[A\bar{y} = \int y_c\,dA] \qquad \bar{y}\int_0^b (a - x)\,dy = \int_0^b y(a - x)\,dy$$

onde $y_c = y$ para a faixa horizontal. A avaliação destas integrais verificará os resultados anteriores para $\bar{x}$ e $\bar{y}$.



Sugestão Útil

① Observe que $x_c = x$ para o elemento vertical.

Exemplo 5/5

Volume hemisférico. Localize o centróide do volume de um hemisfério de raio r em relação a sua base.

Solução I. Com os eixos escolhidos como mostrado na figura, por simetria, $\bar{x} = \bar{z} = 0$. O elemento mais conveniente é uma fatia circular de espessura dy paralela ao plano x-z. Como o hemisfério intercepta o plano y-z no círculo $y^2 + z^2 = r^2$, o raio da fatia circular é $z = +\sqrt{r^2 - y^2}$. O volume da fatia elementar será

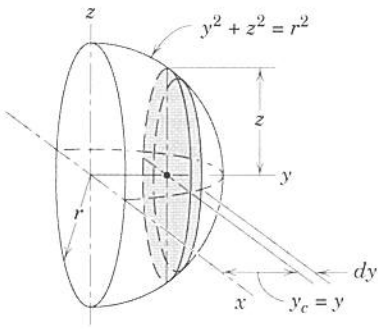
$$dV = \pi(r^2 - y^2)\,dy \quad ①$$

A segunda das Eqs. 5/6*a* requer que

$$[V\bar{y} = \int y_c\,dV] \qquad \bar{y}\int_0^r \pi(r^2 - y^2)\,dy = \int_0^r y\pi(r^2 - y^2)\,dy$$

onde $y_c = y$. Integrando, obtém-se

$$\tfrac{2}{3}\pi r^3\bar{y} = \tfrac{1}{4}\pi r^4 \qquad \bar{y} = \tfrac{3}{8}r \qquad \textit{Resp.}$$



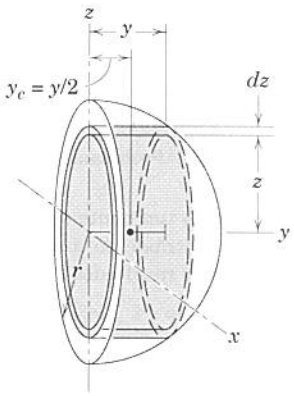
Solução I

Solução II. Alternativamente podemos usar como nosso elemento diferencial uma casca cilíndrica de comprimento y, raio z e espessura dz, como mostrado na figura de baixo. Expandindo o raio da casca desde zero até r, preenchemos todo o volume. Por simetria, o centróide da casca elementar está em seu centro, de modo que $y_c = y/2$. O volume do elemento é $dV = (2\pi z\,dz)(y)$. Escrevendo y em termos de z, a partir da equação do círculo tem-se $y = +\sqrt{r^2 - z^2}$. Usando o valor de $\frac{2}{3}\pi r^3$ calculado na *Solução I* para o volume do hemisfério e substituindo na segunda das Eqs. 5/6*a* obtemos

$$[V\bar{y} = \int y_c\,dV] \qquad (\tfrac{2}{3}\pi r^3)\bar{y} = \int_0^r \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{2}(2\pi z\sqrt{r^2 - z^2})\,dz$$

$$= \int_0^r \pi(r^2 z - z^3)\,dz = \frac{\pi r^4}{4}$$

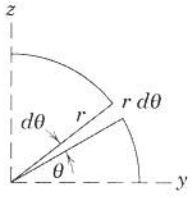
$$\bar{y} = \tfrac{3}{8}r \qquad \textit{Resp.}$$



Solução II

As *Soluções I* e *II* são de uso semelhante, pois cada uma envolve um elemento de forma simples e requer integração em relação a apenas uma variável.

Solução III. Como uma alternativa, poderíamos usar o ângulo θ como nossa variável, com limites de 0 e $\pi/2$. O raio de qualquer elemento seria r sen θ, enquanto a espessura da fatia na *Solução I* seria $dy = (r\,d\theta)$ sen θ e a da casca na *Solução II* seria $dz = (r\,d\theta)$ cos θ. O comprimento da casca seria $y = r$ cos θ.



Solução III

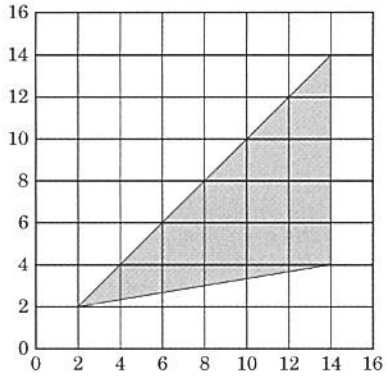
Sugestão Útil

① Você pode identificar o elemento de volume de ordem superior que está omitido da expressão para dV?

PROBLEMAS

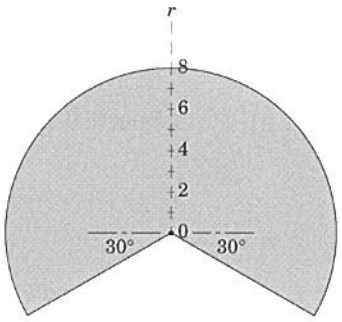
Problemas Introdutórios

5/1 Coloque seu lápis sobre a posição da sua melhor estimativa visual do centróide da área triangular. Verifique a posição horizontal da sua estimativa referindo-se aos resultados do Exemplo 5/2.



Problema 5/1

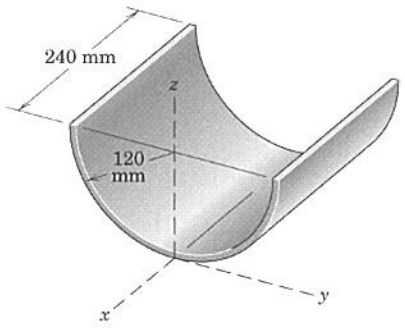
5/2 Faça com seu lápis um ponto sobre a posição da sua melhor estimativa visual do centróide da área do setor circular. Verifique sua estimativa usando os resultados do Exercício 5/3.



Problema 5/2

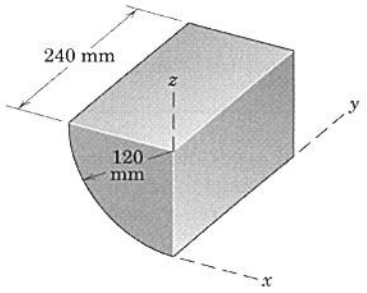
5/3 Especifique as coordenadas x e z do centro de massa da casca semicilíndrica.

Resp. $\bar{x} = -120$ mm, $\bar{z} = 43{,}6$ mm



Problema 5/3

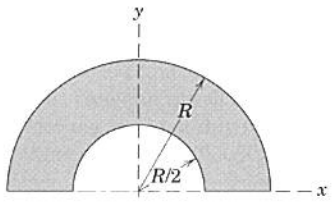
5/4 Especifique as coordenadas x, y e z do centro de massa do quadrante do cilindro sólido homogêneo.



Problema 5/4

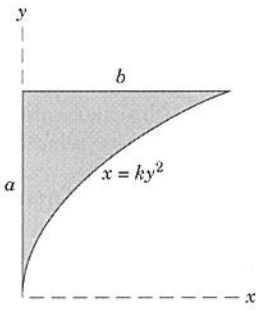
5/5 Determine, por integração direta, a coordenada y do centróide da área sombreada.

Resp. $\bar{y} = \dfrac{14R}{9\pi}$



Problema 5/5

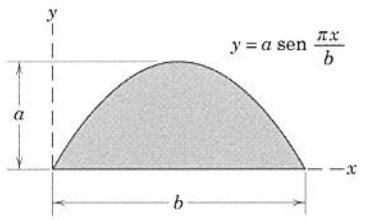
5/6 Determine as coordenadas do centróide da área sombreada.



Problema 5/6

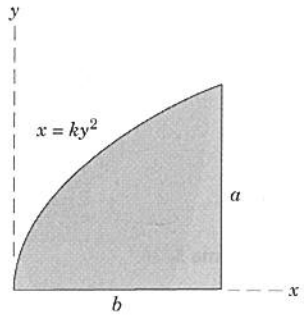
5/7 Determine a coordenada y do centróide da área sob a curva senoidal mostrada.

Resp. $\bar{y} = \dfrac{\pi a}{8}$



Problema 5/7

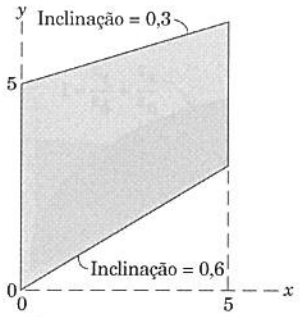
5/8 Determine as coordenadas do centróide da área sombreada.



Problema 5/8

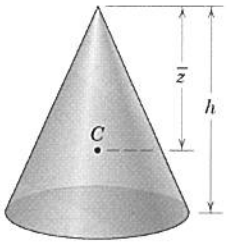
5/9 Determine, por integração direta, as coordenadas do centróide da área trapezoidal.

Resp. $\bar{x} = 2{,}35$, $\bar{y} = 3{,}56$



Problema 5/9

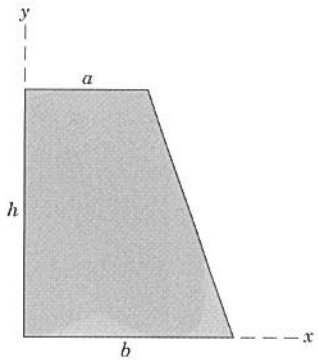
5/10 Determine a distância $\bar{z}$ desde o vértice do cone circular até o centróide de seu volume.



Problema 5/10

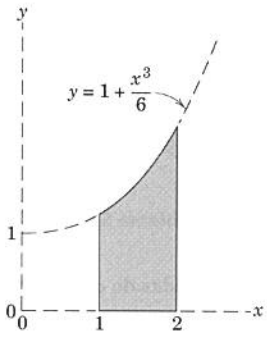
5/11 Determine as coordenadas x e y do centróide da área trapezoidal.

Resp. $\bar{x} = \dfrac{a^2 + b^2 + ab}{3(a + b)}$, $\bar{y} = \dfrac{h(2a + b)}{3(a + b)}$



Problema 5/11

5/12 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.

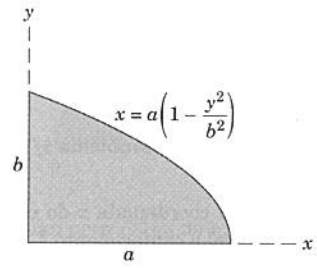


Problema 5/12

Problemas Representativos

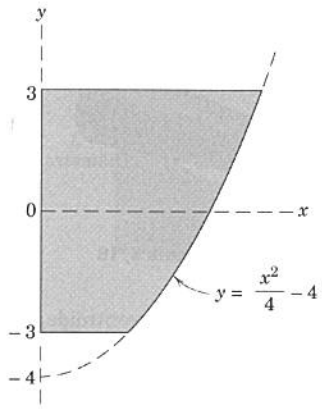
5/13 Localize o centróide da área sombreada.

Resp. $\bar{x} = 2a/5$, $\bar{y} = 3b/8$



Problema 5/13

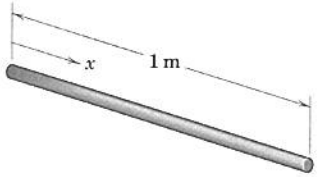
5/14 Localize o centróide da área sombreada mostrada.



Problema 5/14

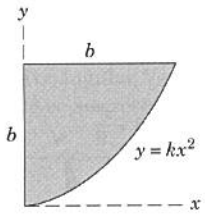
5/15 A massa por unidade de comprimento da barra esbelta varia com a posição de acordo com $\rho = \rho_0(1 - x/2)$, onde x está em metros. Determine a localização do centro de massa da barra.

Resp. $\bar{x} = \frac{4}{9}$ m



Problema 5/15

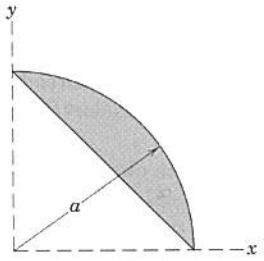
5/16 Determine as coordenadas do centróide da área sombreada.



Problema 5/16

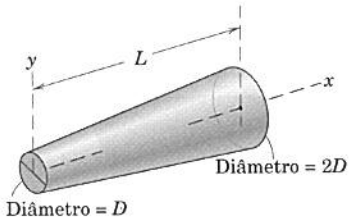
5/17 Determine as coordenadas do centróide do segmento da área circular.

Resp. $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{2a}{3(\pi - 2)}$



Problema 5/17

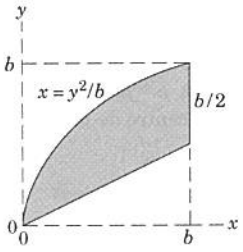
5/18 Determine a coordenada x do centro de massa da barra de aço de seção variável e comprimento L, sendo que o diâmetro da extremidade mais larga é duas vezes o diâmetro da extremidade menor.



Problema 5/18

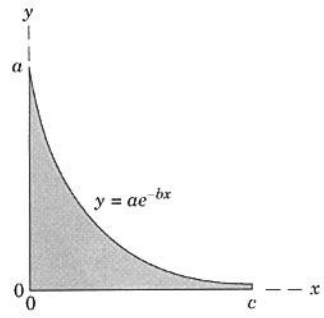
5/19 Determine a coordenada y do centróide da área sombreada.

Resp. $\bar{y} = \dfrac{b}{2}$



Problema 5/19

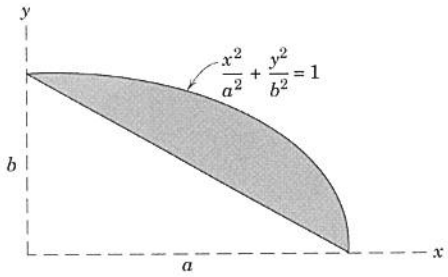
5/20 Deixe que $c \to \infty$ e determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.



Problema 5/20

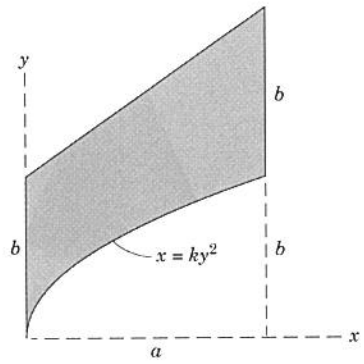
5/21 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada mostrada.

Resp. $\bar{x} = \dfrac{a}{3\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)}$, $\bar{y} = \dfrac{b}{3\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)}$



Problema 5/21

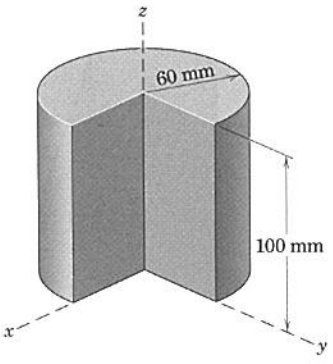
5/22 Determine a coordenada y do centróide da área sombreada.



Problema 5/22

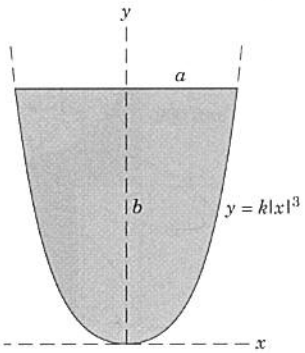
5/23 Use os resultados do Exemplo 5/3 para calcular as coordenadas do centro de massa da parte mostrada do cilindro sólido homogêneo.

Resp. $\bar{x} = \bar{y} = -8{,}49$ mm, $\bar{z} = 50$ mm



Problema 5/23

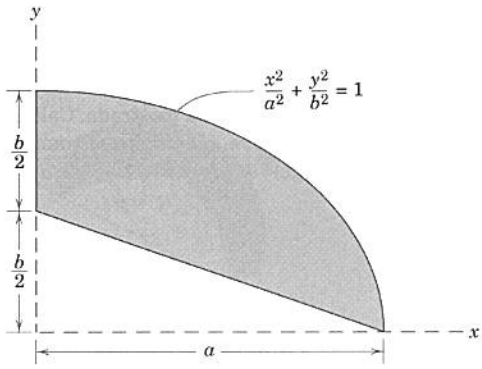
5/24 Determine as coordenadas do centróide da área sombreada.



Problema 5/24

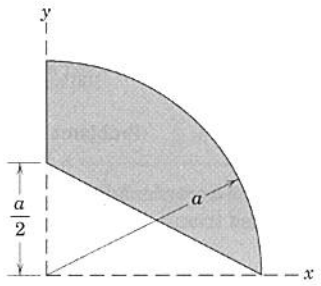
5/25 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.

Resp. $\bar{x} = \dfrac{a}{\pi - 1}$, $\bar{y} = \dfrac{7b}{6(\pi - 1)}$



Problema 5/25

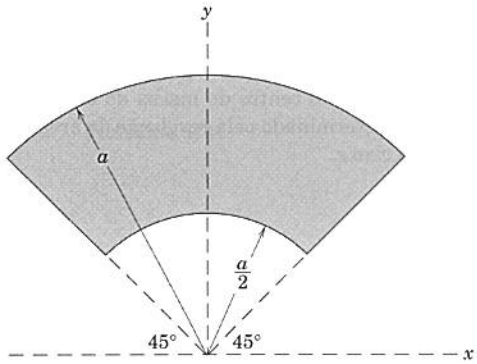
5/26 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.



Problema 5/26

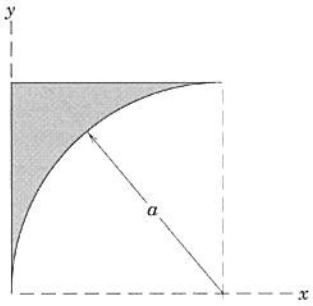
5/27 Determine a coordenada y do centróide da área sombreada.

Resp. $\bar{y} = \dfrac{14\sqrt{2}}{9\pi}a$



Problema 5/27

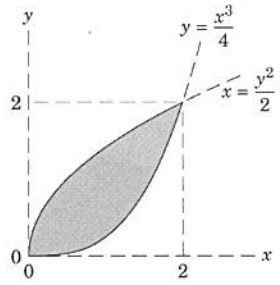
5/28 Localize o centróide da área mostrada na figura por integração direta. (*Cuidado*: Observe cuidadosamente o sinal correto da raiz envolvida.)



Problema 5/28

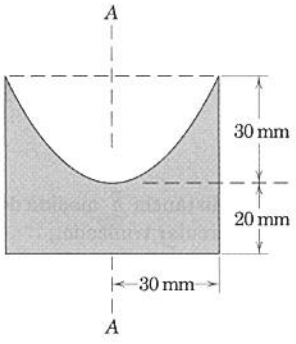
5/29 Localize o centróide da área sombreada entre as duas curvas.

Resp. $\bar{x} = \frac{24}{25}$, $\bar{y} = \frac{6}{7}$



Problema 5/29

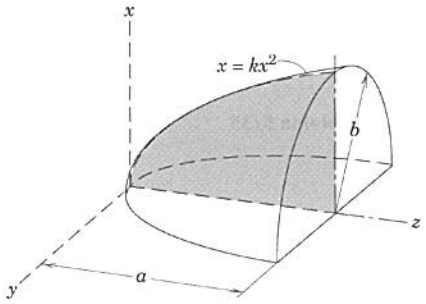
5/30 A figura representa uma peça plana de uma chapa metálica, simétrica em relação ao eixo A-A e que tem o contorno superior parabólico. Escolha as suas próprias coordenadas e calcule a distância $\bar{h}$ a partir da base até o centro de gravidade da peça.



Problema 5/30

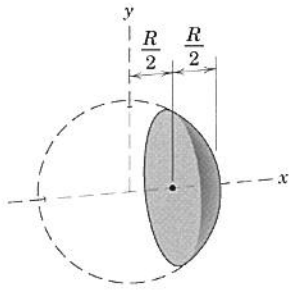
5/31 Determine a coordenada z do centróide do volume gerado pela revolução de 180° da área sombreada sob a parábola em torno do eixo z.

Resp. $\bar{z} = 2a/3$



Problema 5/31

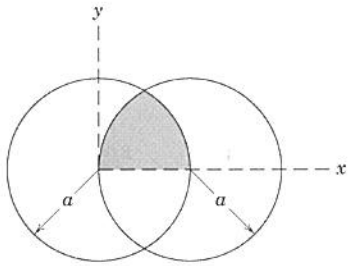
5/32 Determine a coordenada x do centróide do segmento esférico sólido.



Problema 5/32

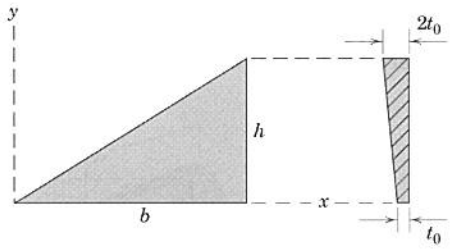
5/33 Determine a coordenada y do centróide da área sombreada mostrada. (Observe os cuidados citados no Prob. 5/28.)

Resp. $\bar{y} = 0{,}339a$



Problema 5/33

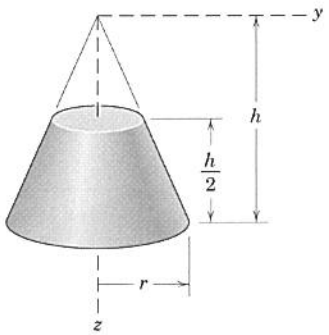
5/34 A espessura da placa triangular varia linearmente em y, desde o valor t_0 ao longo da sua base em $y = 0$ até $2t_0$ em $y = h$. Determine a coordenada y do centro de massa da placa.



Problema 5/34

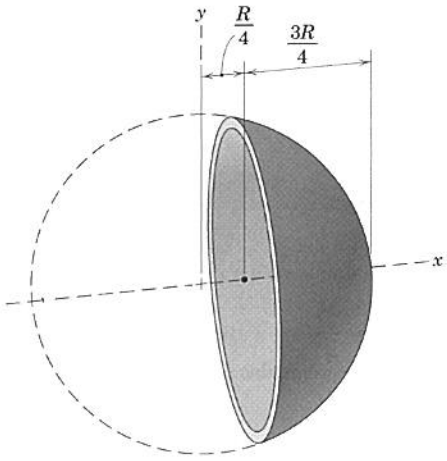
5/35 Calcule a distância $\bar{h}$ medida desde a base até o centróide do volume do cone circular truncado.

Resp. $\bar{h} = \frac{11}{56}h$



Problema 5/35

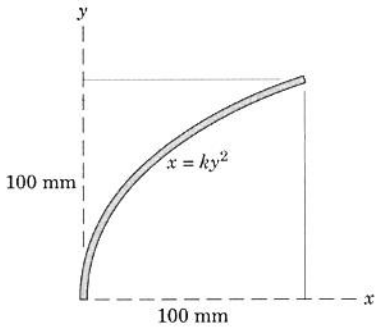
5/36 Determine a coordenada x do centro de massa da parte da casca esférica, que tem espessura uniforme, mas fina.



Problema 5/36

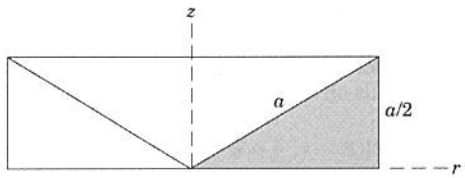
5/37 A barra esbelta homogênea tem uma seção transversal uniforme e está dobrada na forma mostrada. Calcule a coordenada y do centro de massa da barra. (*Lembrete*: O comprimento do arco diferencial é $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dx/dy)^2}\,dy$.)

Resp. $\bar{y} = 57{,}4$ mm



Problema 5/37

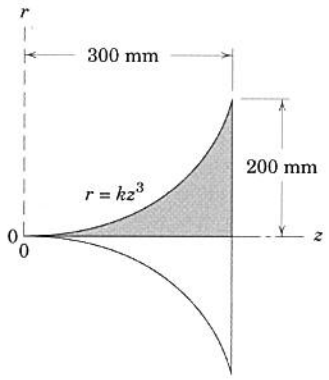
5/38 Determine a coordenada z do centróide do volume obtido pela revolução da área triangular sombreada de 360° em torno do eixo z.



Problema 5/38

5/39 Localize o centro de massa do corpo sólido homogêneo cujo volume é determinado pela revolução da área sombreada de 360° em torno do eixo z.

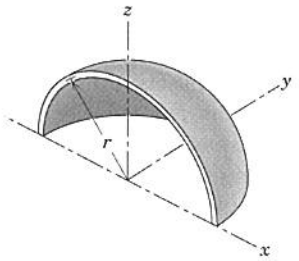
Resp. $\bar{z} = 263$ mm



Problema 5/39

▶5/40 Determine a coordenada z do centro de massa da casca esférica homogênea de raio r, correspondente a um quarto de uma esfera.

Resp. $\bar{z} = \frac{r}{2}$

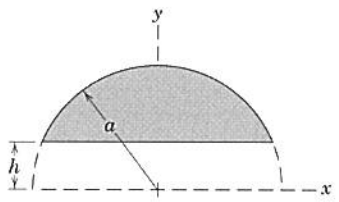


Problema 5/40

▶5/41 Determine a coordenada y do centróide da área plana mostrada. Coloque $h = 0$ em seu resultado e compare-o com o resultado $\bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$ para uma área semicircular (veja o Exemplo 5/3 e a Tabela D/3). Avalie também o resultado para as condições $h = \frac{a}{4}$ e $h = \frac{a}{2}$.

$$\text{Resp. } \bar{y} = \frac{\frac{2}{3}[a^2 - h^2]^{3/2}}{a^2\left[\frac{\pi}{2} - \text{sen}^{-1}\frac{h}{a}\right] - h\sqrt{a^2 - h^2}}$$

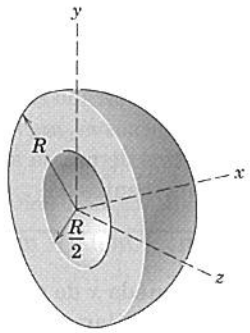
$$h = \frac{a}{4}: \bar{y} = 0{,}562a, \quad h = \frac{a}{2}: \bar{y} = 0{,}705a$$



Problema 5/41

▶5/42 Determine a coordenada x do centro de massa do hemisfério homogêneo, que teve removida a região hemisférica menor.

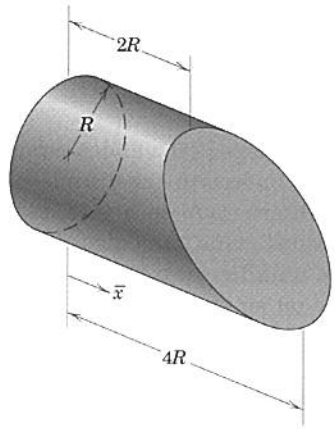
Resp. $\bar{x} = \frac{45}{112}R$



Problema 5/42

▶5/43 Determine a coordenada x do centro de massa do corpo sólido homogêneo mostrado.

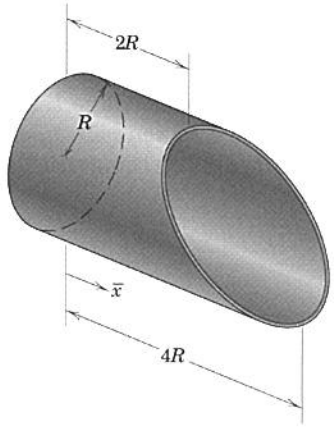
Resp. $\bar{x} = 1{,}542R$



Problema 5/43

▶5/44 Determine a coordenada x do centro de massa da casca cilíndrica de espessura uniforme e pequena.

Resp. $\bar{x} = 1{,}583R$



Problema 5/44

5/4 Corpos Compostos e Figuras; Aproximações

Quando um corpo ou uma figura pode ser convenientemente dividido em diversas partes cujos centros de massa são facilmente determinados, usamos o princípio dos momentos e tratamos cada parte como um elemento finito do todo. Tal corpo está ilustrado esquematicamente na Fig. 5/13. Suas partes têm massas m_1, m_2, m_3 e as respectivas coordenadas dos seus centros de massa são $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ na direção x. O princípio dos momentos dá

$$(m_1 + m_2 + m_3)\bar{X} = m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3$$

onde $\bar{X}$ é a coordenada x do centro de massa do corpo como um todo. Relações similares são válidas para as outras duas direções coordenadas.

Generalizando, então, para um corpo com qualquer número de partes e expressando os somatórios de forma condensada para obter as coordenadas do centro de massa

$$\bar{X} = \frac{\Sigma m\bar{x}}{\Sigma m} \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma m\bar{y}}{\Sigma m} \qquad \bar{Z} = \frac{\Sigma m\bar{z}}{\Sigma m} \tag{5/7}$$

Relações análogas são válidas para linhas, áreas e volumes compostos, onde m é substituído por L, A e V, respectivamente. Observe que se um vazio ou uma cavidade forem considerados como uma das partes componentes de um corpo ou uma figura composta, a massa correspondente à cavidade ou ao vazio é tratada como uma quantidade negativa.

Um Método de Aproximação

Na prática, as fronteiras de uma área ou volume podem não ser facilmente expressas em termos de formas geométricas simples ou como formas que podem ser representadas matematicamente. Para esses casos devemos nos valer de um método de aproximação. Como um exemplo, considere o problema de localizar o centróide C da área irregular mostrada na Fig. 5/14. A área é dividida em faixas de largura Δx e altura variável h. A área A de cada faixa, tal como a que é mostrada sombreada, é $h\ \Delta x$ e é multiplicada pelas coordenadas x_c e y_c de seu *centróide* para obter os momentos do elemento de área. O somatório dos momentos para todas

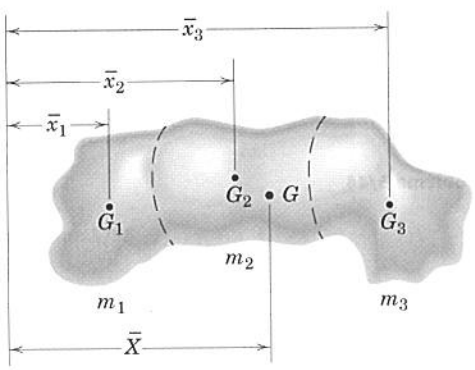


Figura 5/13

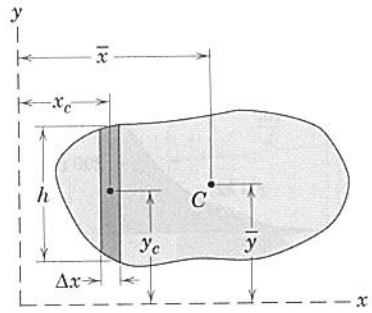


Figura 5/14

as faixas, dividido pela área total das faixas, fornecerá as coordenadas correspondentes do centróide. Uma tabulação sistemática dos resultados permitirá uma avaliação ordenada da área total ΣA, dos somatórios ΣAx_c e ΣAy_c e das coordenadas do centróide

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Ax_c}{\Sigma A} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma Ay_c}{\Sigma A}$$

Podemos aumentar a precisão da aproximação diminuindo as larguras das faixas. Em todos os casos, a altura média da faixa deve ser estimada ao realizar a aproximação das áreas. Embora seja freqüentemente vantajoso usar elementos de largura constante, isso não é necessário. De fato, podemos usar elementos de qualquer tamanho e forma, que aproximem a área dada com uma exatidão satisfatória.

Volumes Irregulares

Para localizar o centróide de um volume irregular, podemos reduzir o problema à localização do centróide de uma área. Considere o volume mostrado na Fig. 5/15, onde os valores A das áreas das seções transversais normais à direção x são mostrados em um gráfico em função de x. Uma faixa de área vertical sob a curva vale $A\ \Delta x$, que é igual ao elemento de volume correspondente, ΔV. Assim, a área sob a curva levantada representa o volume do corpo e a coordenada x do centróide da área sob a curva é dada por

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(A\ \Delta x)x_c}{\Sigma A\ \Delta x} \text{ que é igual a } \bar{x} = \frac{\Sigma Vx_c}{\Sigma V}$$

para o centróide do volume real.

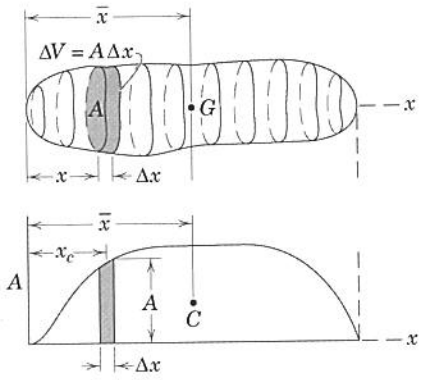
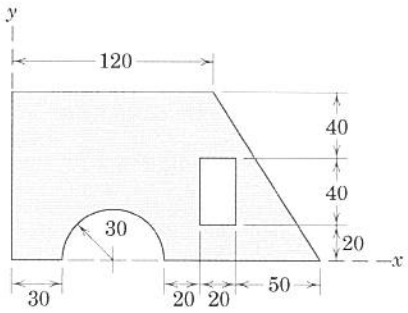


Figura 5/15

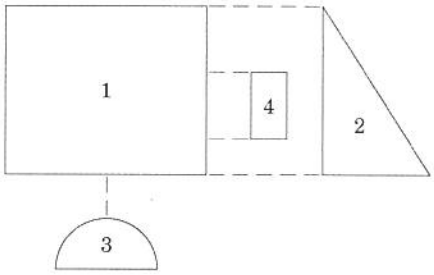
Exemplo 5/6

Localize o centróide da área sombreada.



Dimensões em milímetros

Solução. A área composta é dividida nas quatro formas elementares mostradas na figura de baixo. As posições dos centróides de todas essas formas podem ser obtidas da Tabela D/3. Observe que as áreas dos "furos" (partes 3 e 4) são consideradas como negativas na tabela a seguir:



PARTE	A mm^2	$\bar{x}$ mm	$\bar{y}$ mm	$\bar{x}A$ mm^3	$\bar{y}A$ mm^3
1	12 000	60	50	720 000	600 000
2	3000	140	100/3	420 000	100 000
3	−1414	60	12.73	−84 800	−18 000
4	−800	120	40	−96 000	−32 000
TOTAIS	12 790			959 000	650 000

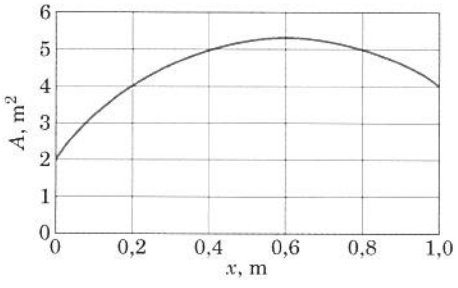
Os equivalentes em área às Eqs. 5/7 são agora aplicados e levam a

$$\left[\bar{X} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A}\right] \qquad \bar{X} = \frac{959\,000}{12\,790} = 75{,}0 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\left[\bar{Y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A}\right] \qquad \bar{Y} = \frac{650\,000}{12\,790} = 50{,}8 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Exemplo 5/7

Determine aproximadamente a coordenada x do centróide volumétrico de um corpo cujo comprimento é 1 m e cuja área da seção transversal varia com x como mostrado na figura.



Solução. O corpo é dividido em cinco seções. Para cada seção a área e o volume médio e a localização média do centróide são determinados e colocados na tabela a seguir.

INTERVALO	$A_{méd}$ m^2	Volume V m^3	$\bar{x}$ m	$V\bar{x}$ m^4
0–0,2	3	0,6	0,1	0,060
0,2–0,4	4,5	0,90	0,3	0,270
0,4–0,6	5,2	1,04	0,5	0,520
0,6–0,8	5,2	1,04	0,7	0,728
0,8–1,0	4,5	0,90	0,9	0,810
TOTAIS		4,48		2,388

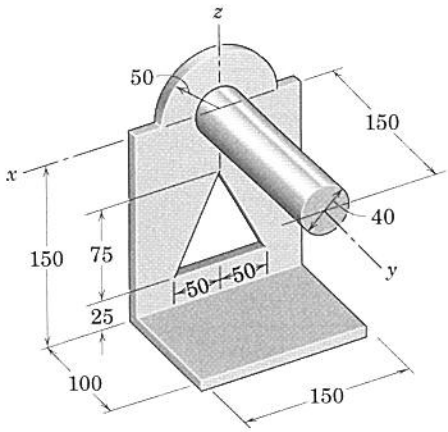
Sugestão Útil

① Observe que a forma do corpo em função de y e de z não afeta $\bar{x}$.

① $$\left[\bar{X} = \frac{\Sigma V\bar{x}}{\Sigma V}\right] \qquad \bar{X} = \frac{2{,}388}{4{,}48} = 0{,}533 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

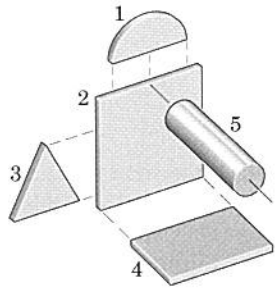
Exemplo 5/8

Localize o centro de massa do conjunto formado por um suporte e um eixo. A face vertical é feita de uma chapa de metal que tem massa de 25 kg/m². O material da base horizontal tem uma massa de 40 kg/m² e o eixo de aço tem uma massa específica de 7,83 Mg/m³.



Dimensões em milímetros

Solução. O corpo composto pode ser considerado como formado dos cinco elementos mostrados na parte de baixo da ilustração. A parte triangular será considerada como uma massa negativa. Para os eixos de referência indicados fica claro, por simetria, que a coordenada x do centro de massa vale zero.



A massa m de cada parte é facilmente calculada e não precisa de mais explicações. Para a Parte 1, temos do Exemplo 5/3

$$\bar{z} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(50)}{3\pi} = 21{,}2 \text{ mm}$$

Para a Parte 3 vimos no Exemplo 5/2 que o centróide de uma massa triangular está a um terço da altura em relação à base. Medindo a partir dos eixos coordenados tem-se

$$\bar{z} = -[150 - 25 - \tfrac{1}{3}(75)] = -100 \text{ mm}$$

As coordenadas y e z aos centros de massa das partes restantes devem ser evidentes por inspeção. Os termos envolvidos na aplicação das Eqs. 5/7 são melhor manipulados na forma de uma tabela como se segue:

PARTE	m kg	$\bar{y}$ mm	$\bar{z}$ mm	$m\bar{y}$ kg·m	$m\bar{z}$ kg·mm
1	0,098	0	21,2	0	2,08
2	0,562	0	−75,0	0	−42,19
3	−0,094	0	−100,0	0	9,38
4	0,600	50,0	−150,0	30,0	−90,00
5	1,476	75,0	0	110,7	0
TOTAIS	2,642			140,7	−120,73

As Eqs. 5/7 são então aplicadas e os resultados são

$$\left[\bar{Y} = \frac{\Sigma m\bar{y}}{\Sigma m}\right] \qquad \bar{Y} = \frac{140{,}7}{2{,}642} = 53{,}3 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

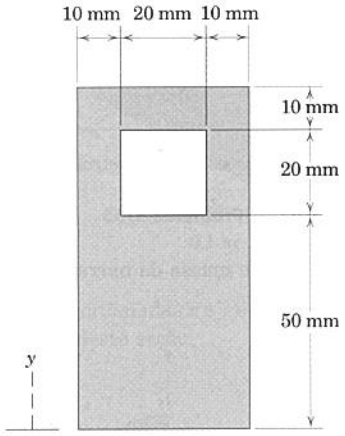
$$\left[\bar{Z} = \frac{\Sigma m\bar{z}}{\Sigma m}\right] \qquad \bar{Z} = \frac{-120{,}73}{2{,}642} = -45{,}7 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

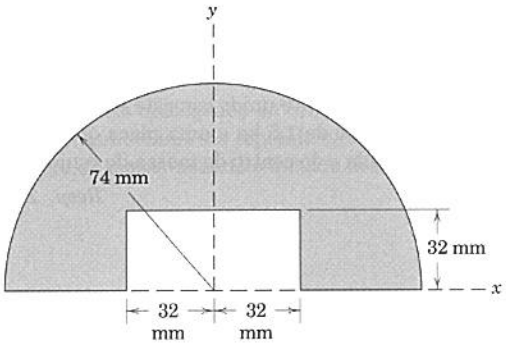
5/45 Determine a coordenada y do centróide da área sombreada.

Resp. $\bar{Y} = 37{,}1$ mm



Problema 5/45

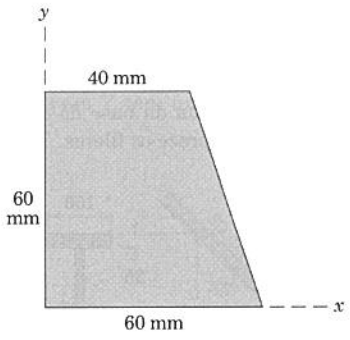
5/46 Calcule a coordenada y do centróide da área sombreada.



Problema 5/46

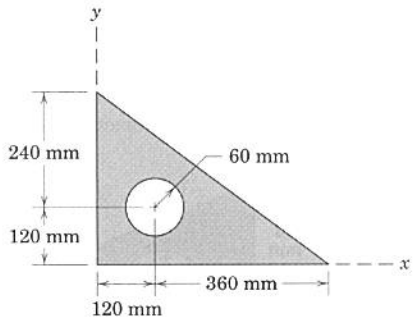
5/47 Determine as coordenadas do centróide da área trapezoidal mostrada.

Resp. $\bar{X} = 25{,}3$ mm, $\bar{Y} = 28{,}0$ mm



Problema 5/47

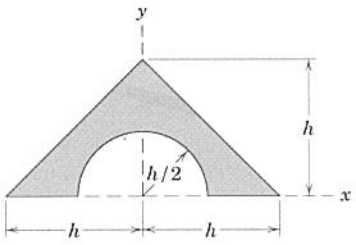
5/48 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.



Problema 5/48

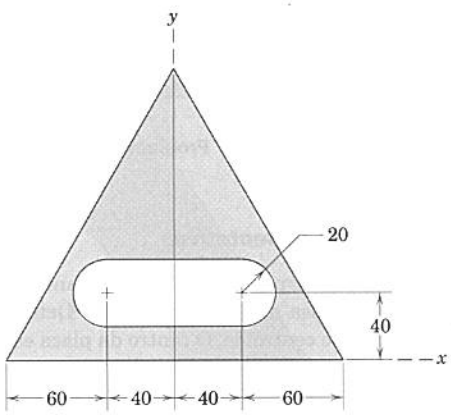
5/49 Determine a coordenada y do centróide da área sombreada em função de h.

Resp. $\bar{Y} = 0{,}412h$



Problema 5/49

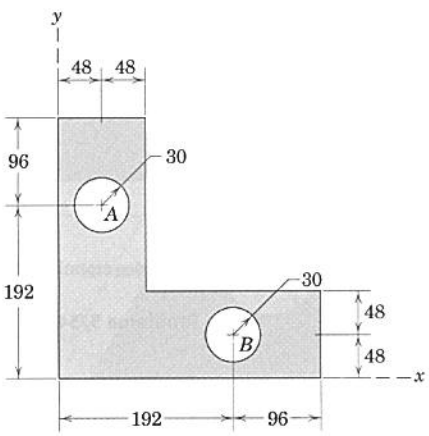
5/50 Determine a coordenada y do centróide da área sombreada. O triângulo é equilátero.



Problema 5/50 Dimensões em milímetros

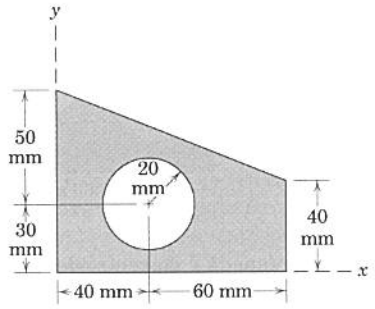
5/51 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.

Resp. $\bar{X} = \bar{Y} = 103{,}6$ mm



Problema 5/51 Dimensões em milímetros

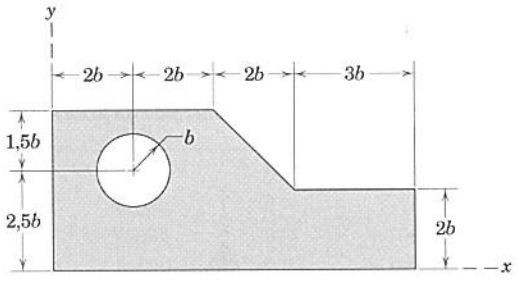
5/52 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.



Problema 5/52

5/53 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.

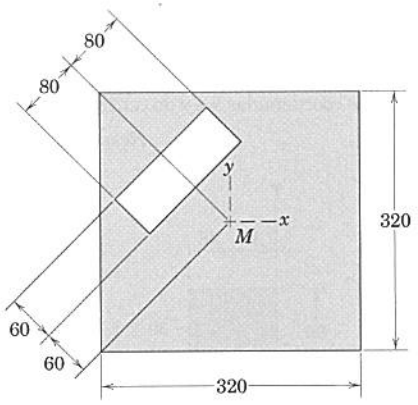
Resp. $\bar{X} = 4{,}02b$, $\bar{Y} = 1{,}588b$



Problema 5/53

Problemas Representativos

5/54 Determine, por inspeção, o quadrante no qual está localizado o centro de massa da área sombreada. Determine, em seguida, as coordenadas do centróide. O centro da placa está localizado em M.

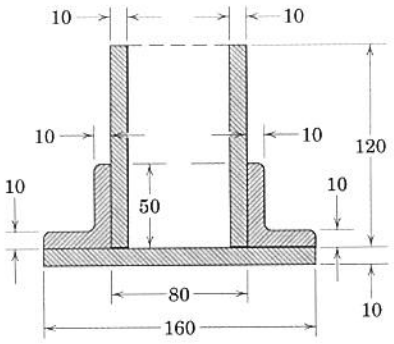


Dimensões em milímetros

Problema 5/54

5/55 Determine a distância $\bar{H}$ desde o fundo da placa da base até o centróide da seção estrutural mostrada.

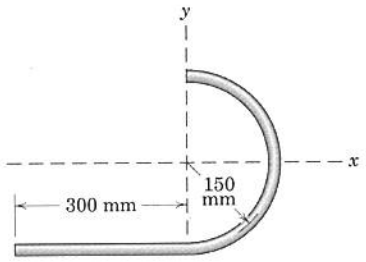
Resp. $\bar{H} = 39{,}3$ mm



Dimensões em milímetros

Problema 5/55

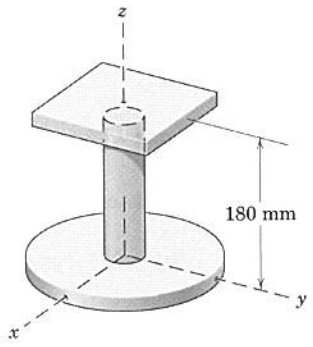
5/56 Localize o centro de massa da barra esbelta dobrada na forma mostrada.



Problema 5/56

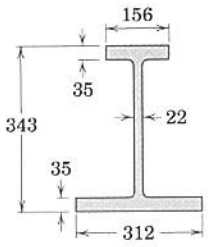
5/57 O conjunto rigidamente unido consiste em um disco circular de 2 kg, um eixo redondo de 1,5 kg e uma placa quadrada de 1 kg. Determine a coordenada z do centro de massa do conjunto.

Resp. $\bar{Z} = 70$ mm



Problema 5/57

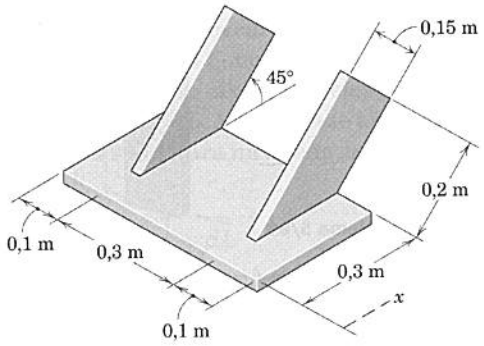
5/58 Determine a altura acima da base do centróide da área da seção transversal da viga. Despreze os filetes.



Problema 5/58 Dimensões em milímetros

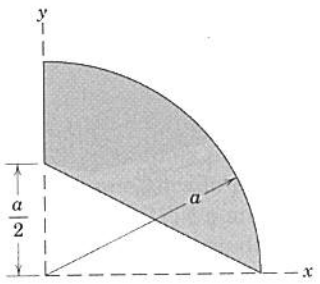
5/59 Determine a coordenada x do centro de massa do suporte construído com uma placa uniforme de aço.

Resp. $\bar{X} = 0{,}1975$ m



Problema 5/59

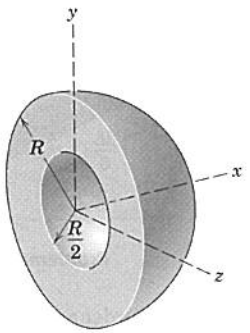
5/60 Determine as coordenadas x e y do centróide da área do Prob. 5/26, usando o método desta seção.



Problema 5/60

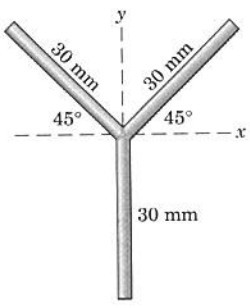
5/61 O hemisfério homogêneo do Prob. 5/42, cuja porção hemisférica central foi removida, está repetido aqui. Determine a coordenada x do centro de massa usando o método desta seção.

Resp. $\bar{X} = \frac{45}{112}R$



Problema 5/61

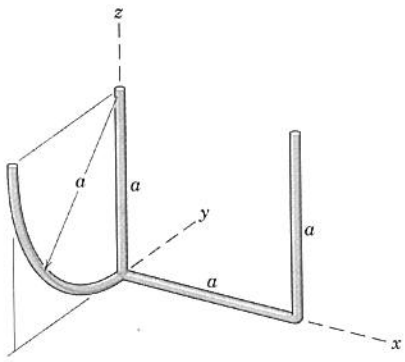
5/62 Os dois segmentos superiores do conjunto de barras esbeltas uniformes, soldadas em Y, têm uma massa por unidade de comprimento de 0,3 kg/m, enquanto o segmento inferior tem uma massa de 0,5 kg/m. Localize o centro de massa do conjunto.



Problema 5/62

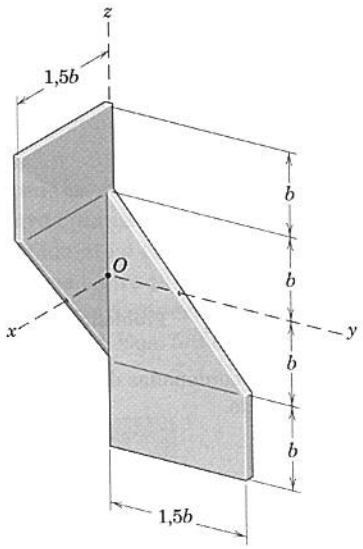
5/63 Determine as coordenadas do centro de massa do conjunto soldado de barras esbeltas uniformes fabricadas com barras do mesmo lote.

Resp. $\bar{X} = \frac{3a}{6+\pi}$, $\bar{Y} = -\frac{2a}{6+\pi}$, $\bar{Z} = \frac{\pi a}{6+\pi}$



Problema 5/63

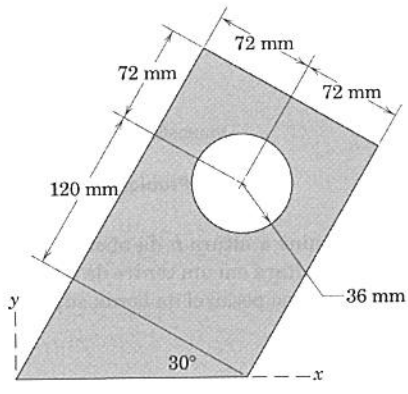
5/64 Determine as coordenadas x, y e z do centro de massa do suporte feito de uma chapa metálica cuja espessura é pequena em comparação com as outras dimensões.



Problema 5/64

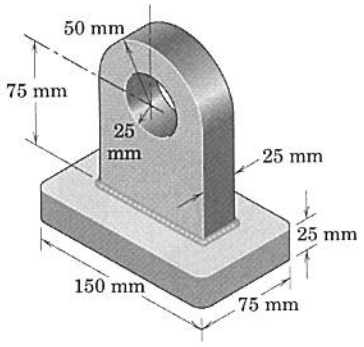
5/65 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.

Resp. $\bar{X} = 133{,}5$ mm, $\bar{Y} = 97{,}0$ mm



Problema 5/65

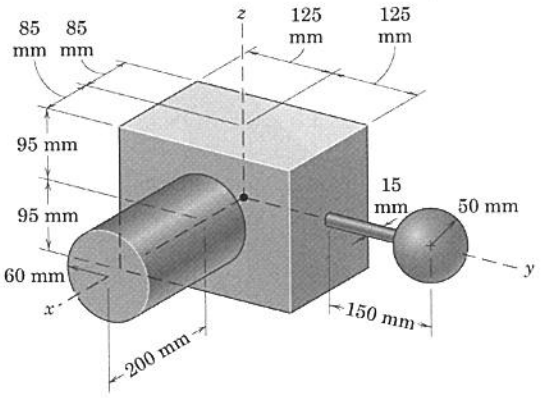
5/66 Determine a distância $\bar{H}$ desde a parte de baixo da base até o centro de massa do suporte fundido.



Problema 5/66

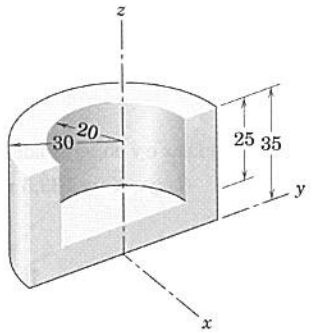
5/67 Um instrumento que trabalha submerso é montado como mostrado na figura. Determine as coordenadas do centróide desse volume composto.

Resp. $\bar{X} = 38{,}5$ mm, $\bar{Y} = 13{,}52$ mm, $\bar{Z} = 0$



Problema 5/67

5/68 Calcule as coordenadas do centro de massa do molde metálico fundido mostrado.

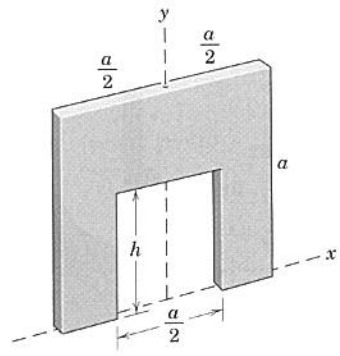


Dimensões em milímetros

Problema 5/68

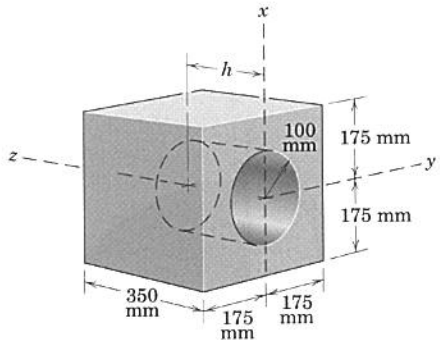
5/69 Determine a altura h da abertura retangular na placa quadrada, que resultará em um centro de massa, para o restante da placa, o mais próximo possível da borda superior.

Resp. $h = 0{,}586a$



Problema 5/69

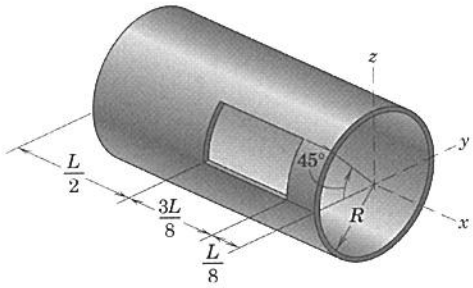
5/70 Determine a profundidade h do furo circular no cubo, para a qual a coordenada z do centro de massa terá o máximo valor possível.



Problema 5/70

▶5/71 Uma abertura é feita na casca cilíndrica fina. Determine as coordenadas x, y e z do centro de massa do corpo homogêneo.

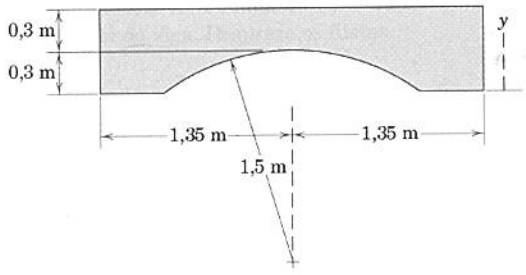
Resp. $\bar{X} = -0{,}509L$, $\bar{Y} = 0{,}0443R$, $\bar{Z} = -0{,}01834R$



Problema 5/71

▶5/72 Determine a coordenada y do centróide da área sombreada. Use o resultado do Prob. 5/41.

Resp. $\bar{Y} = 0{,}353$ m



Problema 5/72

5/5 Teoremas de Pappus*

Existe um método muito simples para calcular a área superficial gerada pela revolução de uma curva em relação a um eixo que não intercepte o plano da curva. Na Fig. 5/16 um segmento de linha de comprimento L, no plano x-y, gera uma superfície quando gira em torno do eixo x. Um elemento dessa superfície é o anel gerado por dL. A área desse anel é igual a sua circunferência vezes sua altura inclinada, ou $dA = 2\pi y\, dL$. A área total é, então,

$$A = 2\pi \int y\, dL$$

Como $\bar{y}L = \int y\, dL$, a área é

$$\boxed{A = 2\pi \bar{y} L} \qquad (5/8)$$

onde $\bar{y}$ é a coordenada y do centróide C para a linha de comprimento L. Assim, a área gerada é a mesma que a área lateral de um cilindro de comprimento L e raio $\bar{y}$.

No caso de um volume gerado pela revolução de uma área em torno de uma linha que não intercepte seu plano, existe uma equação igualmente simples para determinar o volume. Um elemento do volume gerado pela revolução da área A em torno do eixo x, Fig. 5/17, é o anel elementar de seção transversal dA e raio y. O volume do elemento é sua circunferência vezes dA ou $dV = 2\pi y\, dA$, e o volume total é

$$V = 2\pi \int y\, dA$$

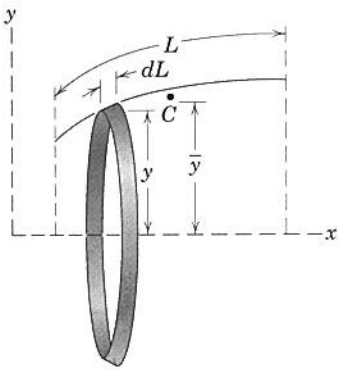


Figura 5/16

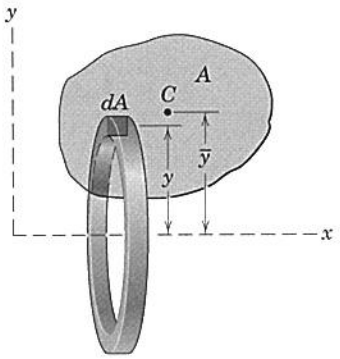


Figura 5/17

Como $\bar{y}A = \int y\, dA$, o volume é

$$\boxed{V = 2\pi \bar{y} A} \qquad (5/9)$$

onde $\bar{y}$ é a coordenada y do centróide C da área de revolução A. Assim, obtemos o volume gerado, multiplicando a área de revolução pela circunferência do percurso circular descrito por seu centróide.

Os dois teoremas de Pappus, dados pelas Eqs. 5/8 e 5/9 são úteis para determinação de áreas e volumes de revolução. Eles são usados também para determinar os centróides de curvas e áreas planas quando conhecemos as áreas e volumes correspondentes criados pela revolução dessas figuras em torno de um eixo que não intercepte o plano da curva. Dividindo a área ou o volume por 2π vezes o comprimento do segmento de linha ou a área plana correspondente, obtém-se a distância desde o centróide até o eixo.

Se uma linha ou uma área é girada de um ângulo θ menor do que 2π podemos determinar a superfície ou o volume gerados substituindo 2π por θ nas Eqs. 5/8 e 5/9. Assim, as relações mais gerais são

$$\boxed{A = \theta \bar{y} L} \qquad (5/8a)$$

e

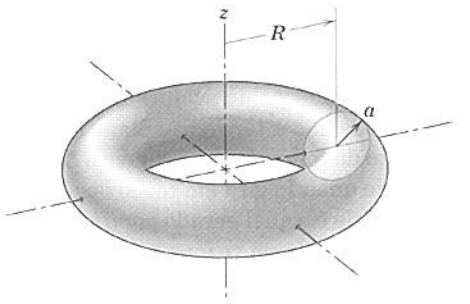
$$\boxed{V = \theta \bar{y} A} \qquad (5/9a)$$

onde θ é dado em radianos.

*Atribuídos a Pappus de Alexandria, um geômetra grego que viveu no terceiro século a.C. Os teoremas freqüentemente levam o nome de Guldinus (Paul Guldin, 1577-1643), que reivindicou autoria original, embora os trabalhos de Pappus fossem aparentemente conhecidos por ele.

Exemplo 5/9

Determine o volume V e a área superficial A do toróide completo de seção transversal circular.

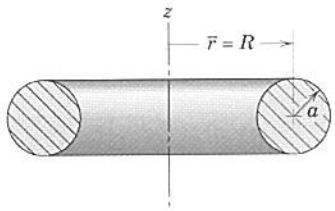


Solução. O toróide pode ser gerado pela revolução da área circular de raio a por 360° em torno do eixo z. Com o uso da Eq. 5/9a, obtemos

① $$V = \theta \bar{r} A = 2\pi(R)(\pi a^2) = 2\pi^2 R a^2 \qquad \textit{Resp.}$$

De modo semelhante, o uso da Eq. 5/8a fornece

$$A = \theta \bar{r} L = 2\pi(R)(2\pi a) = 4\pi^2 R a \qquad \textit{Resp.}$$

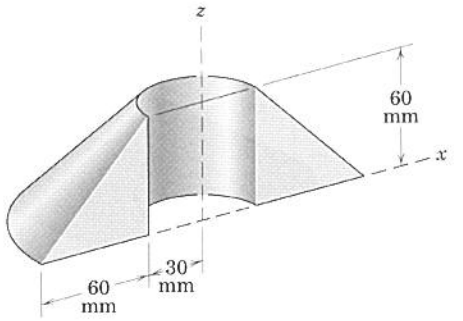


Sugestão Útil

① Observamos que o ângulo θ de revolução é 2π para o anel completo. O resultado deste caso comum, mas especial, é dado pela Eq. 5/9.

Exemplo 5/10

Calcule o volume V do sólido gerado pela revolução da área triangular de 60 mm por 180° em torno do eixo z. Se esse corpo fosse construído de aço, qual seria sua massa m?



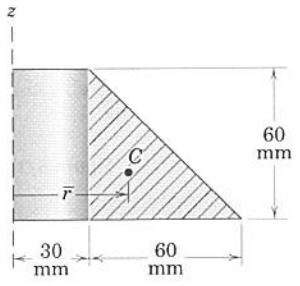
Solução. Com o ângulo de revolução $\theta = 180°$ a Eq. 5/9a fornece

① $$V = \theta \bar{r} A = \pi[30 + \tfrac{1}{3}(60)][\tfrac{1}{2}(60)(60)] = 2{,}83(10^5)\ \text{mm}^3 \qquad \textit{Resp.}$$

A massa do corpo é, então,

$$m = \rho V = \left[7830\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right][2{,}83(10^5)\ \text{mm}^3]\left[\frac{1\ \text{m}}{1000\ \text{mm}}\right]^3$$

$$= 2{,}21\ \text{kg} \qquad \textit{Resp.}$$



Sugestão Útil

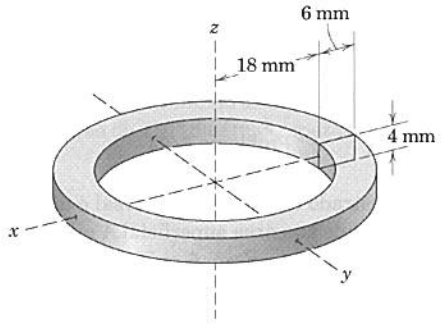
① Observe que θ deve estar em radianos.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

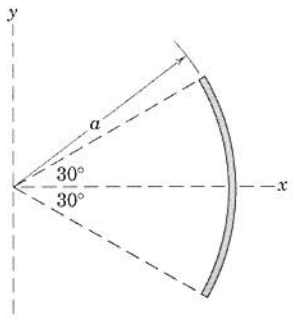
5/73 Usando os métodos desta seção determine a área superficial A e o volume V do corpo formado pela revolução da área retangular por 360° em torno do eixo z.

Resp. $A = 2640$ mm^2, $V = 3170$ mm^3



Problema 5/73

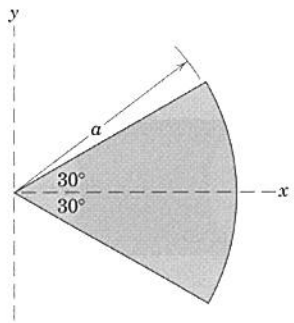
5/74 O arco circular é girado de 360° em torno do eixo y. Determine a área superficial externa S do corpo resultante, que é uma parte de uma esfera.



Problema 5/74

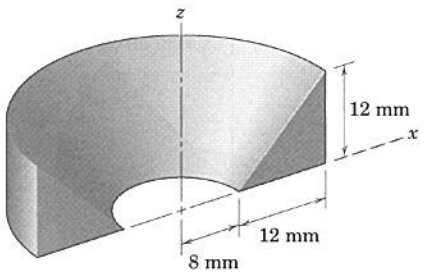
5/75 A área de um setor circular é girada de 180° em torno do eixo y. Determine o volume do corpo resultante, o qual é parte de uma esfera.

Resp. $V = \dfrac{\pi a^3}{3}$



Problema 5/75

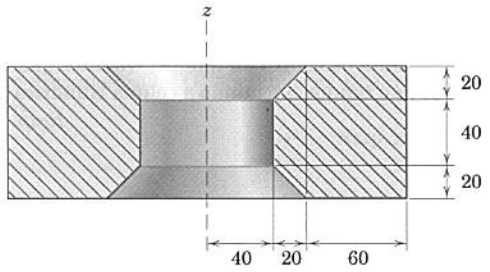
5/76 Calcule o volume V do sólido gerado pela revolução de 180° do triângulo retângulo em torno do eixo z.



Problema 5/76

5/77 O corpo mostrado em seção transversal é a metade de um anel circular obtido pela revolução de 180° da área sombreada em torno do eixo z. Determine a área superficial A do corpo.

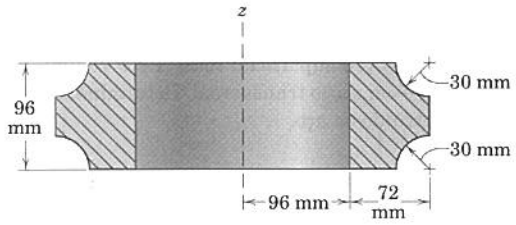
Resp. $A = 90\,000$ mm^2



Dimensões em milímetros

Problema 5/77

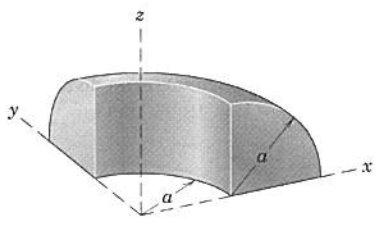
5/78 Calcule o volume V do anel completo que tem a seção transversal mostrada.



Problema 5/78

5/79 Determine o volume V gerado pela revolução de 90° em torno do eixo z da área em forma de quarto de círculo.

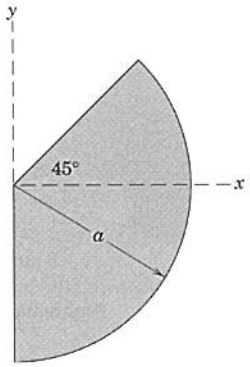
Resp. $V = \left(\dfrac{\pi a^3}{24}\right)(3\pi + 4)$



Problema 5/79

Problemas Representativos

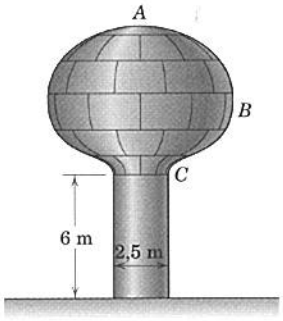
5/80 A área mostrada é girada de 360° em torno do eixo y. Determine o volume do corpo resultante, o qual é uma esfera que tem uma parte significativa removida.



Problema 5/80

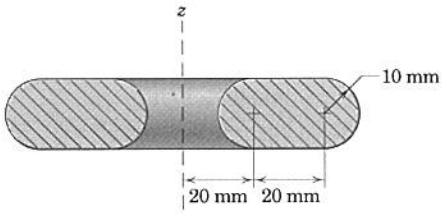
5/81 O tanque de armazenamento de água é uma casca de revolução e deve ser recoberto com duas camadas de tinta, que dá uma cobertura de 16 m² por galão. O engenheiro (que se lembra de mecânica) consulta um desenho em escala do tanque e determina que a linha curva *ABC* tem um comprimento de 10 m e que seu centróide está a 2,5 m da linha de centro do tanque. Quantos galões de tinta serão usados para o tanque, incluindo a coluna cilíndrica vertical?

Resp. 25,5 litros



Problema 5/81

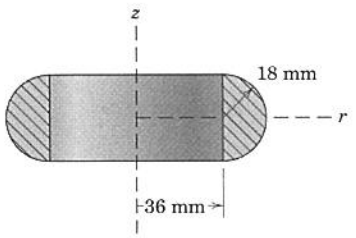
5/82 Determine a área superficial total A e o volume V do sólido completo mostrado em seção transversal. Determine a massa do corpo se ele for construído de aço.



Problema 5/82

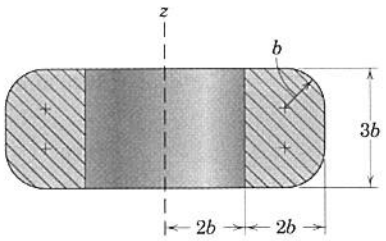
5/83 Calcule o volume V do espaçador de borracha, em forma de um anel completo, com a seção semicircular mostrada. Calcule também a área superficial A da parte externa do anel.

Resp. $V = 13{,}95(10^4)$ mm³, $A = 1{,}686(10^4)$ mm²



Problema 5/83

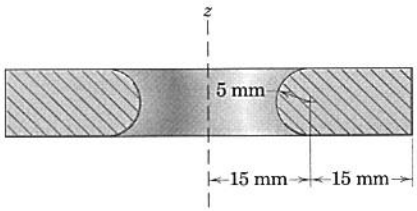
5/84 O corpo mostrado em seção transversal é um anel circular completo formado pela revolução da área sombreada em torno do eixo z. Determine a área superficial A e o volume V do corpo.



Problema 5/84

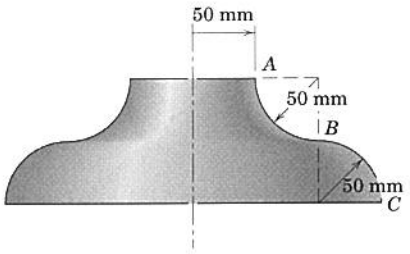
5/85 O corpo mostrado em seção transversal é uma grande arruela de neoprene. Calcule sua área superficial A e o seu volume V.

Resp. $A = 7290$ mm², $V = 24\,400$ mm³



Problema 5/85

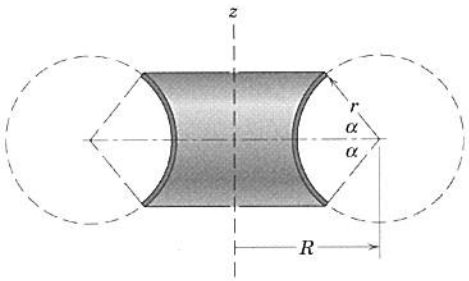
5/86 Os dois arcos circulares *AB* e *BC* são girados em torno do eixo vertical, para se obter a superfície de revolução mostrada. Calcule a área externa A dessa superfície.



Problema 5/86

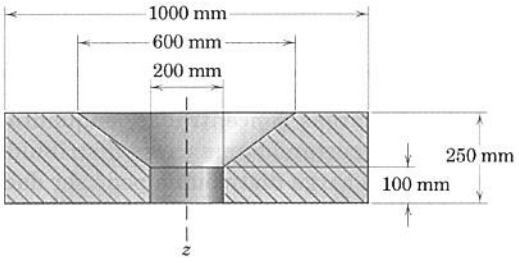
5/87 Uma casca fina, mostrada em seção, tem sua forma gerada pela revolução do arco por 360° em torno do eixo z. Determine a área superficial A de um dos dois lados da casca.

Resp. $A = 4\pi r(R\alpha - r \operatorname{sen} \alpha)$



Problema 5/87

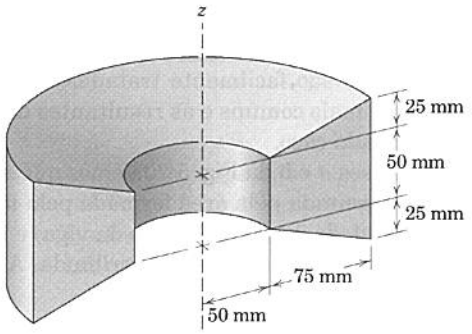
5/88 Calcule o volume formado pela revolução completa da área da seção transversal mostrada em torno do eixo de simetria z.



Problema 5/88

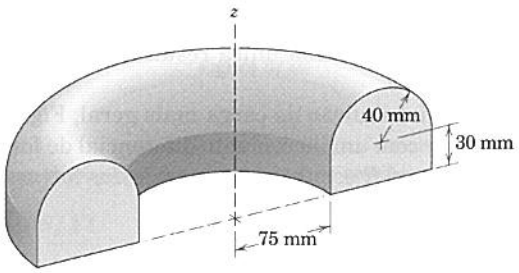
5/89 Calcule o peso W do fundido de alumínio mostrado. O sólido é gerado pela revolução de 180° da área trapezoidal mostrada, em torno do eixo z.

Resp. $W = 42{,}7$ N



Problema 5/89

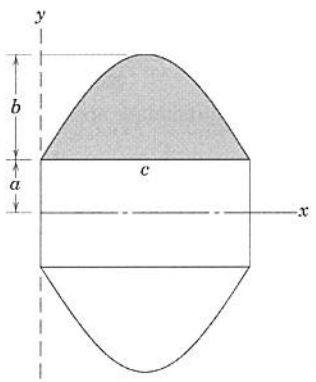
5/90 Determine o volume V e a área superficial total A do sólido gerado pela revolução da área mostrada por 180° em torno de eixo z.



Problema 5/90

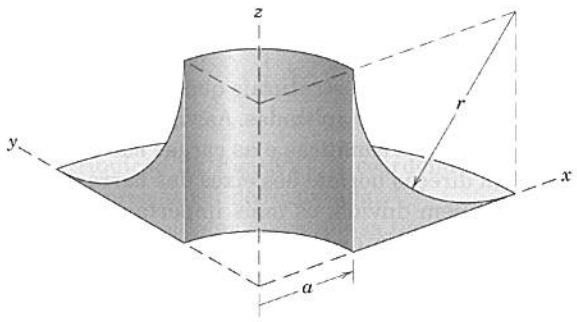
5/91 A área sombreada é limitada por meio ciclo de uma onda senoidal e pelo eixo da onda. Determine o volume gerado por uma revolução completa da área em torno do eixo x.

$$\textit{Resp. } V = 4bc\left(a + \frac{b\pi}{8}\right)$$



Problema 5/91

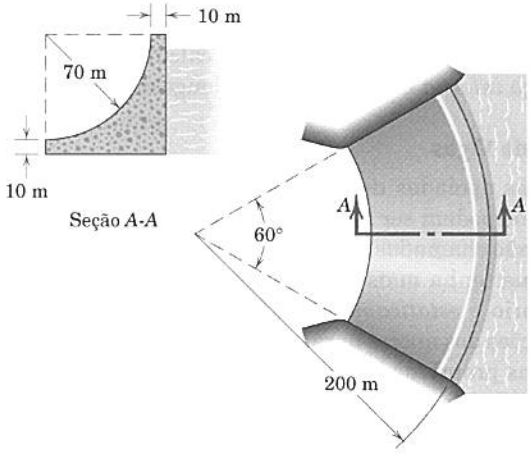
5/92 Ache o volume V do sólido gerado pela revolução da área sombreada por 90° em torno do eixo z.



Problema 5/92

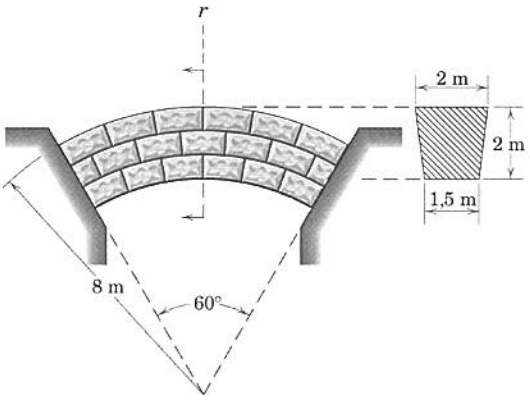
5/93 Calcule a massa m de concreto necessária para construir a represa em arco mostrada. O concreto tem uma massa específica de 2,40 Mg/m³.

Resp. $m = 1{,}126(10^6)$ Mg



Problema 5/93

5/94 Para dar sustentação suficiente para o arco de blocos de pedra projetado como mostrado, é necessário conhecer seu peso total W. Use os resultados do Prob. 5/11 e determine W. A massa específica dos blocos de pedra é de 2,40 Mg/m³.



Problema 5/94

SEÇÃO B TÓPICOS ESPECIAIS

5/6 Vigas – Efeitos Externos

Vigas são elementos estruturais que oferecem resistência à flexão devido a cargas aplicadas. As vigas, em sua maioria, são longas barras prismáticas e as cargas são normalmente aplicadas na direção normal aos eixos das barras.

Vigas são, sem dúvida, os mais importantes de todos os elementos estruturais; de modo que é importante entender a teoria básica que fundamenta seu projeto. Para analisar a capacidade das vigas suportarem carga devemos, primeiramente, estabelecer os requisitos de equilíbrio da viga como um todo e de qualquer parte dela considerada separadamente. A seguir, devemos estabelecer as relações entre as forças resultantes e a concomitante resistência interna da viga para suportar essas forças. A primeira parte dessa análise requer a aplicação dos princípios da estática. A segunda parte envolve as características de resistência dos materiais e é normalmente tratada em estudos de mecânica dos sólidos ou de mecânica dos materiais.

Essa seção lida com o carregamento *externo* e as reações agindo em uma viga. Na Seção 5/7 calculamos a distribuição da força *interna* e do momento ao longo de uma viga.

Tipos de Vigas

Vigas apoiadas de modo que as reações aos seus apoios externos podem ser calculadas apenas pelos métodos da estática são chamadas *vigas estaticamente determinadas*. Uma viga que tenha mais apoios do que os necessários para dar equilíbrio é *estaticamente indeterminada*. Para determinar as reações dos apoios para esse tipo de viga devemos considerar suas propriedades carga-deformação, além das equações de equilíbrio estático. A Fig. 5/18 mostra exemplos de ambos os tipos de vigas. Nessa seção analisaremos apenas vigas estaticamente determinadas.

As vigas também podem ser identificadas pelo tipo de carregamento externo que elas suportam. As vigas na Fig. 5/18 estão suportando cargas concentradas, enquanto a viga na Fig. 5/19 está suportando uma carga distribuída. A intensidade w de uma carga distribuída pode ser dada como força por unidade de comprimento da viga. A intensidade pode ser constante ou variável, contínua ou descontínua. A intensidade do carregamento na Fig. 5/19 é constante de C até D e variável de A até C e de D até B. A intensidade é descontínua em D, onde ela muda de módulo abruptamente. Embora a própria intensidade não seja descontínua em C, a taxa de variação da intensidade, dw/dx, é descontínua.

Cargas Distribuídas

Intensidades de carga que são constantes ou que variam linearmente são facilmente tratadas. A Fig. 5/20 ilustra os três casos mais comuns e as resultantes das cargas distribuídas em cada caso.

Nos casos a e b da Fig. 5/20 vemos que a carga resultante R é representada pela área formada pela intensidade w (força por unidade de comprimento da viga) e pelo comprimento L sobre o qual a força está distribuída. A resultante passa pelo centróide desta área.

No caso c da Fig. 5/20 a área trapezoidal é separada em uma área retangular e uma triangular e as resultantes R_1 e R_2 correspondentes a essas subáreas são determinadas separadamente. Observe que uma única resultante poderia ser determinada usando a técnica composta para achar centróides, que foi discutida na Seção 5/4. Normalmente, entretanto, a determinação de uma única resultante não é necessária.

Para uma distribuição de carga mais geral, Fig. 5/21, devemos começar com um incremento diferencial de força $dR = w\,dx$. A carga total R é, então, o somatório das forças diferenciais, ou

$$R = \int w\,dx$$

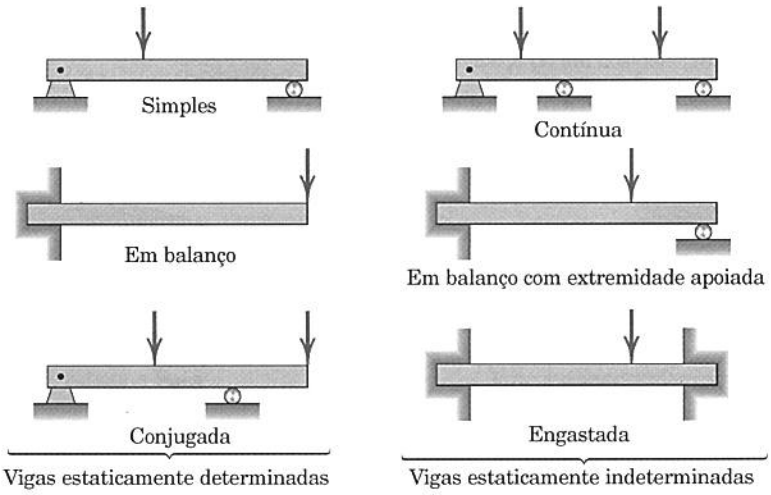


Figura 5/18

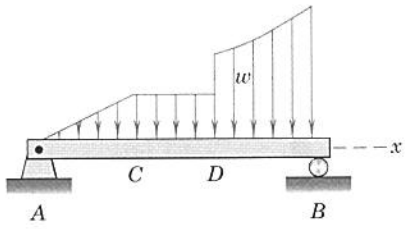
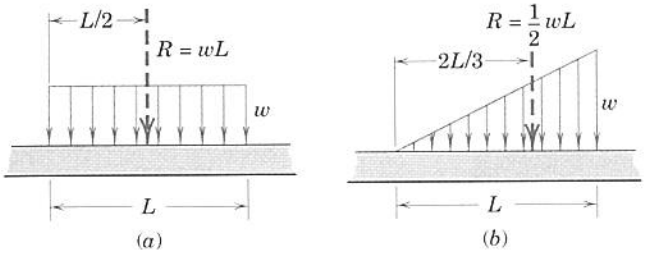


Figura 5/19



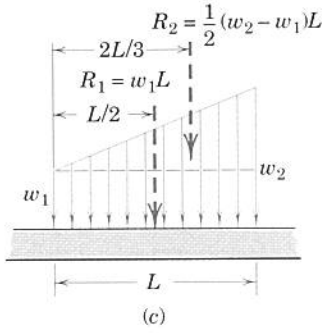


Figura 5/20

Como nos casos anteriores, a resultante R está localizada no centróide da área em consideração. A coordenada x desse centróide é determinada pelo princípio dos momentos $R\bar{x} = \int xw\,dx$,ou

$$\bar{x} = \frac{\int xw\,dx}{R}$$

Para a distribuição da Fig. 5/21, a coordenada vertical do centróide não precisa ser determinada.

Uma vez que as cargas distribuídas tenham sido reduzidas a suas cargas concentradas equivalentes, as reações externas agindo na viga podem ser determinadas por uma análise estática direta, como foi desenvolvido no Capítulo 3.

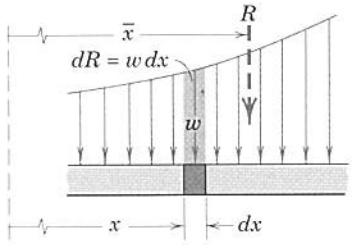
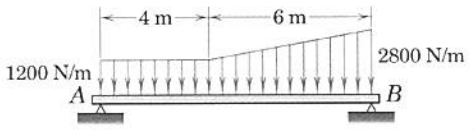


Figura 5/21

Exemplo 5/11

Determine a(s) carga(s) concentrada(s) equivalente(s) e as reações externas para a viga com apoio simples que está submetida à carga distribuída mostrada.



Solução. A área associada à carga distribuída está dividida nas áreas retangular e triangular mostradas. Os valores das cargas concentradas são determinados calculando-se as áreas e essas cargas estão localizadas nos centróides das respectivas áreas. ①

Uma vez que as cargas concentradas tenham sido determinadas, elas são colocadas no diagrama de corpo livre da viga juntamente com as reações externas em A e B. Usando os princípios de equilíbrio, temos

$[\Sigma M_A = 0]$ $\quad 12\,000(5) + 4800(8) - R_B(10) = 0$

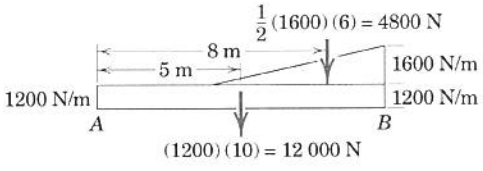
$$R_B = 9840 \text{ N ou } 9{,}84 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

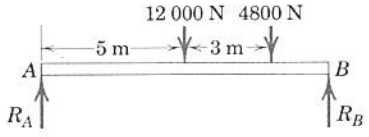
$[\Sigma M_B = 0]$ $\quad R_A(10) - 12\,000(5) - 4800(2) = 0$

$$R_A = 6960 \text{ N ou } 6{,}96 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestão Útil

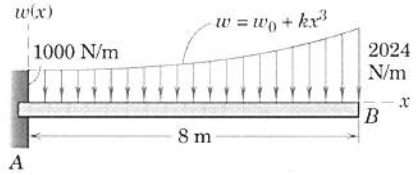
① Observe que usualmente não é necessário se reduzir uma dada carga distribuída a uma *única* carga concentrada.





Exemplo 5/12

Determine a reação no apoio A da viga em balanço carregada.



Solução. As constantes da distribuição de carga são determinadas como sendo $w_0 =$ ① 1000 N/m e $k = 2$ N/m^4. A carga R vale, então,

$$R = \int w\,dx = \int_0^8 (1000 + 2x^3)\,dx = \left(1000x + \frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^8 = 10\,050 \text{ N}$$

② A coordenada x do centróide da área é determinada por

$$\bar{x} = \frac{\int xw\,dx}{R} = \frac{1}{10\,050}\int_0^8 x(1000 + 2x^3)\,dx$$

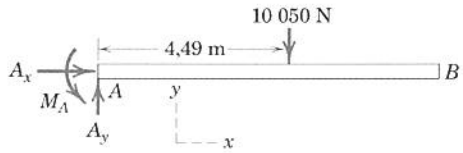
$$= \frac{1}{10\,050}(500x^2 + \tfrac{2}{5}x^5)\Big|_0^8 = 4{,}49 \text{ m}$$

Sugestões Úteis

① Tenha cuidado com as unidades das constantes w_0 e k.

② O estudante deve reconhecer que o cálculo de R e de sua localização $\bar{x}$ é simplesmente uma aplicação de centróides, como tratado na Seção 5/3.

A partir do diagrama de corpo livre da viga, temos



$[\Sigma M_A = 0]$ $\quad M_A - (10\,050)(4{,}49) = 0$

$M_A = 45\,100 \text{ N}\cdot\text{m}$ *Resp.*

$[\Sigma F_y = 0]$ $\quad A_y = 10\,050 \text{ N}$ *Resp.*

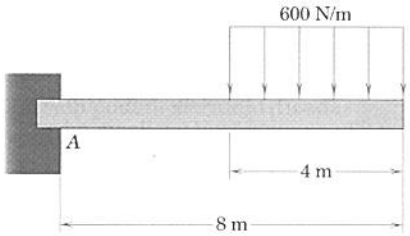
Observe, por inspeção, que $A_x = 0$.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

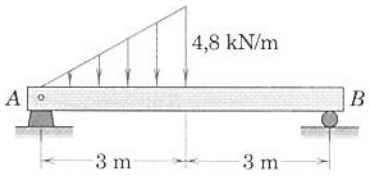
5/95 Calcule a força de sustentação R_A e o momento M_A em A, para a viga em balanço carregada.

Resp. $R_A = 2{,}4$ kN, $M_A = 14{,}4$ kN · m no sentido anti-horário



Problema 5/95

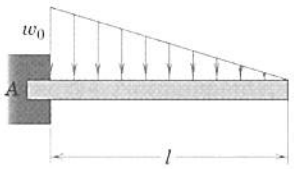
5/96 Calcule as reações em A e B para a viga submetida à carga distribuída triangular.



Problema 5/96

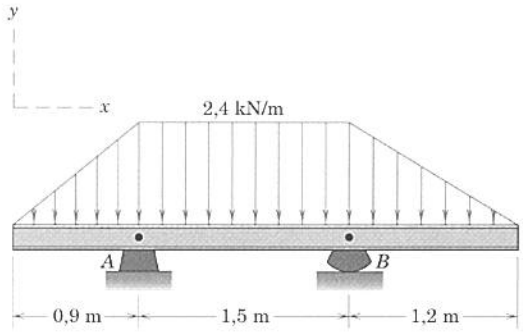
5/97 Determine as reações na extremidade engastada da barra submetida à carga distribuída triangular.

Resp. $R_A = \dfrac{w_0 l}{2}$, $M_A = \dfrac{w_0 l^2}{6}$, no sentido anti-horário



Problema 5/97

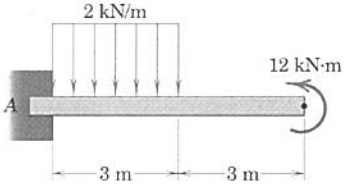
5/98 Determine as reações em A e B para a viga carregada.



Problema 5/98

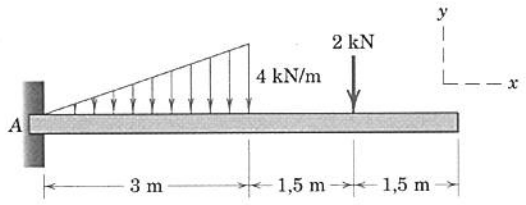
5/99 Ache a reação em A devido à carga uniforme e ao momento aplicado.

Resp. $R_A = 6$ kN, $M_A = 3$ kN · m no sentido horário



Problema 5/99

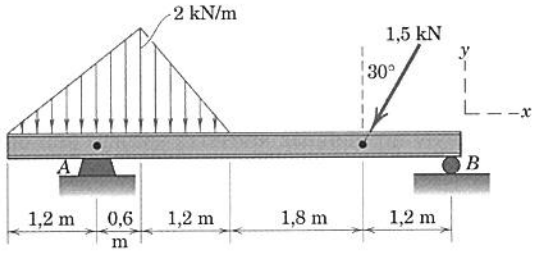
5/100 Determine as reações em A para a viga em balanço submetida às cargas concentrada e distribuída.



Problema 5/100

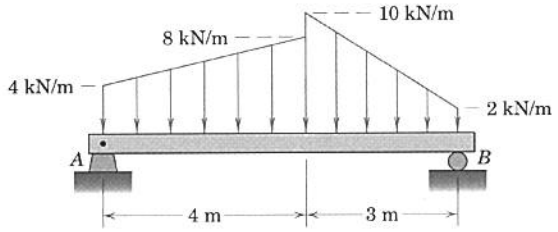
5/101 Determine as reações em A e B para a viga submetida a uma combinação de cargas distribuída e concentrada.

Resp. $A_x = 750$ N, $A_y = 3{,}07$ kN, $B_y = 1{,}224$ kN



Problema 5/101

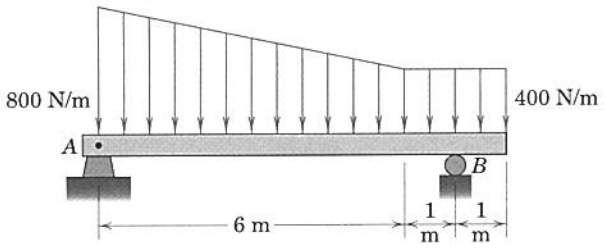
5/102 Calcule as reações dos apoios em A e B para a viga submetida às duas cargas distribuídas com variação linear.



Problema 5/102

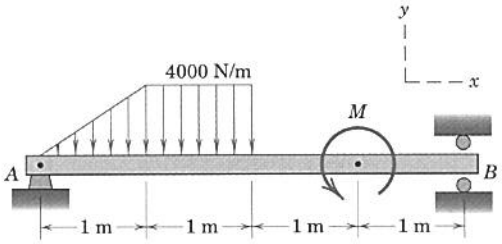
5/103 Determine as reações nos apoios da viga que está carregada como mostrado.

Resp. $R_A = 2230$ N, $R_B = 2170$ N



Problema 5/103

5/104 A viga está submetida à carga distribuída e ao momento mostrado. Se M for aumentado lentamente a partir de zero, em que valor M_0 o contato em B mudará da superfície inferior para a superior?

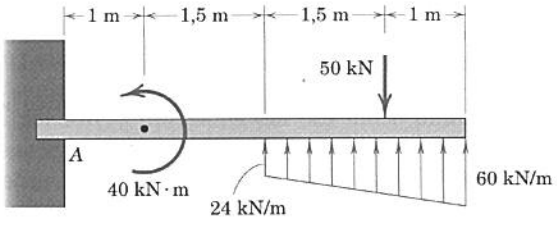


Problema 5/104

Problemas Representativos

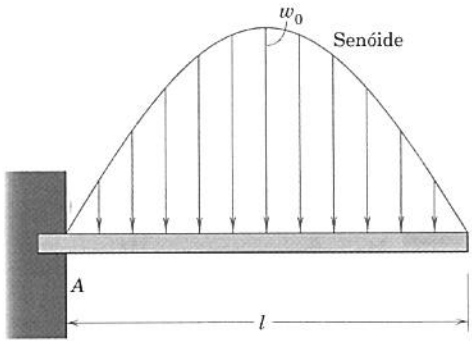
5/105 Determine a força e o momento de reação em A para a viga que está submetida à combinação de carga mostrada.

Resp. $R_A = 55$ kN, $M_A = 253$ kN · m no sentido horário



Problema 5/105

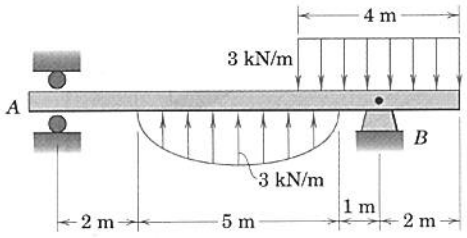
5/106 Determine a força e o momento de reação no apoio A para a viga engastada que está submetida a uma carga distribuída senoidal.



Problema 5/106

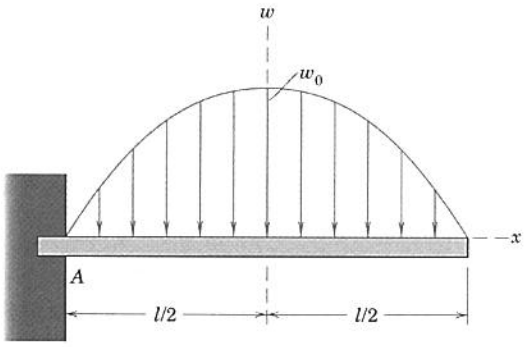
5/107 Determine as reações nos pontos A e B da viga submetida às cargas distribuídas uniforme e elíptica. Em qual superfície, inferior ou superior, atua a reação em A?

Resp. $A = 5{,}15$ kN, $B = 5{,}37$ kN, superior



Problema 5/107

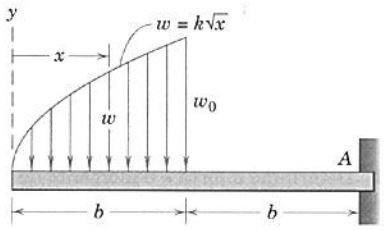
5/108 A viga em balanço está submetida a uma carga distribuída parabólica, simétrica em relação ao meio da viga. Determine a força R_A e o momento M_A atuando na viga em A.



Problema 5/108

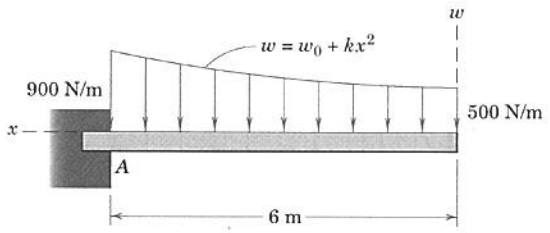
5/109 Determine a força e o momento de reação no apoio A da viga em balanço que está submetida à carga distribuída mostrada.

Resp. $R_A = \frac{2}{3}w_0 b$, $M_A = \frac{14}{15}w_0 b^2$, no sentido horário



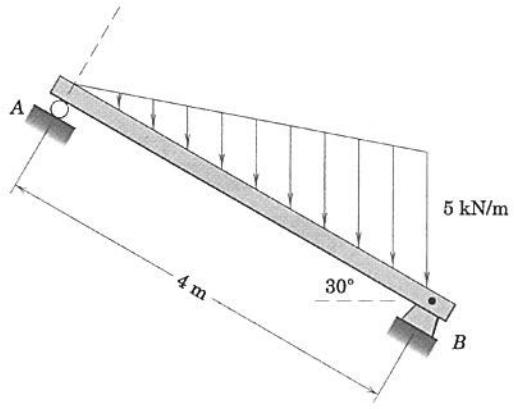
Problema 5/109

5/110 Uma viga em balanço sustenta a carga variável mostrada. Calcule a força de sustentação R_A e o momento M_A em A.



Problema 5/110

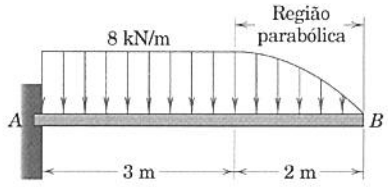
5/111 Determine as reações nos pontos A e B da viga inclinada, submetida à carga distribuída vertical mostrada. O valor da carga distribuída na extremidade direita da viga vale 5 kN por metro *horizontal*.



Problema 5/111

Resp. $A = 2{,}5$ kN, $B = 6{,}61$ kN

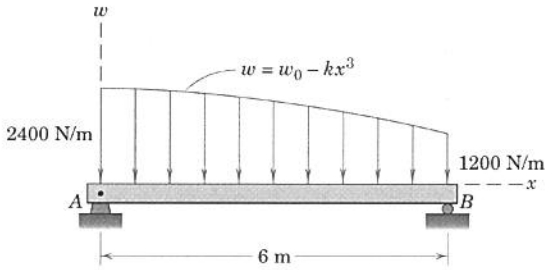
5/112 Determine as reações no apoio para a viga que está submetida a uma combinação de cargas distribuídas uniforme e parabólica.



Problema 5/112

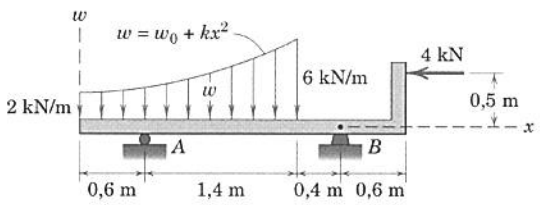
5/113 Uma viga está submetida ao carregamento variável mostrado. Calcule as reações nos apoios A e B.

Resp. $R_A = 6{,}84$ kN, $R_B = 5{,}76$ kN



Problema 5/113

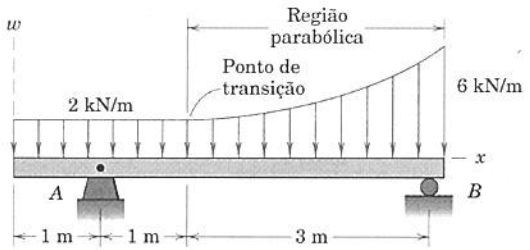
5/114 Determine as reações em A e B para a viga submetida a cargas distribuída e concentrada.



Problema 5/114

5/115 Determine as reações nos apoios da viga que está submetida a uma combinação de cargas distribuídas uniforme e parabólica.

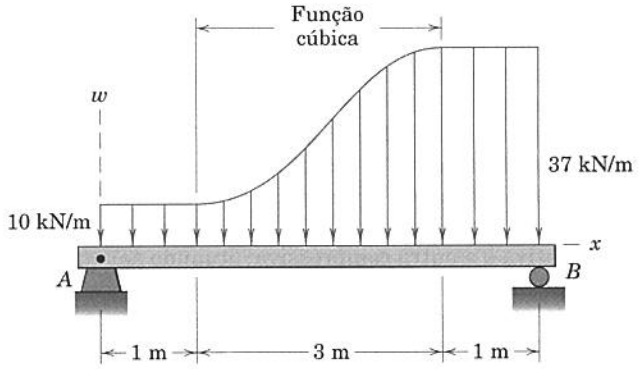
Resp. $R_A = R_B = 7$ kN



Problema 5/115

▶**5/116** A transição entre as cargas de 10 kN/m e 37 kN/m é obtida por meio de uma função cúbica da forma $w = k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3$, cuja inclinação vale zero nos seus pontos extremos, $x = 1$ m e $x = 4$ m. Determine as reações em A e B.

Resp. $R_A = 43{,}1$ kN, $R_B = 74{,}4$ kN



Problema 5/116

5/7 Vigas – Efeitos Internos

A Seção anterior tratou da redução de uma força distribuída a uma ou mais forças concentradas e a subseqüente determinação das reações externas atuando na viga. Nesta seção introduziremos os efeitos internos da viga e aplicaremos os princípios da estática para calcular a força cisalhante interna e o momento fletor como funções da posição ao longo da viga.

Cisalhamento, Flexão e Torção

Além de suportar tensão trativa ou compressiva, uma viga pode resistir a cisalhamento, flexão e torção. Esses três efeitos estão ilustrados na Fig. 5/22. A força V é chamada *força cisalhante*, o binário M é chamado *momento fletor* e o binário T é chamado *momento torçor*. Esses efeitos representam os componentes vetoriais da resultante de forças atuando em uma seção transversal da viga, como mostrado na parte inferior da figura.

Considere a força cisalhante V e o momento fletor M causados por forças aplicadas em um único plano da viga. As convenções para os valores positivos do cisalhamento V e do momento fletor M, mostrados na Fig. 5/23, são as normalmente usadas. Do princípio da ação e reação podemos ver que as direções de V e de M são invertidas nas duas seções. É freqüentemente impossível dizer, sem efetuar os cálculos, se o cisalhamento e o momento em uma seção particular são positivos ou negativos. Por esta razão é aconselhável representar V e M em suas direções positivas nos diagramas de corpo livre e deixar os sinais algébricos dos valores calculados indicarem as direções apropriadas.

Como uma ajuda para a interpretação física do momento fletor M, considere a viga mostrada na Fig. 5/24 flexionada por dois momentos iguais, positivos e opostos, aplicados a

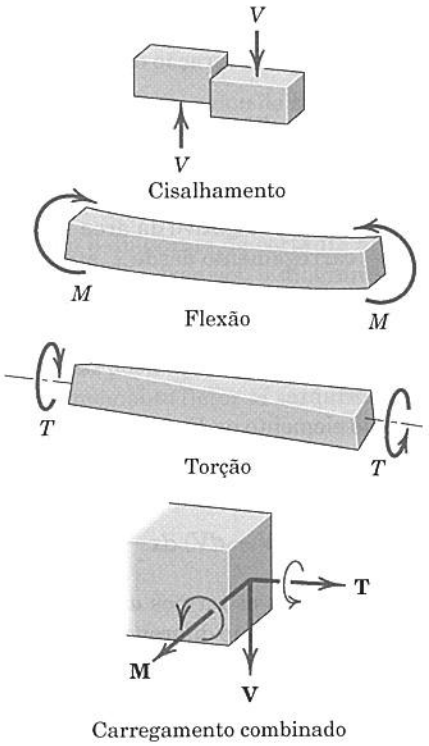


Figura 5/22

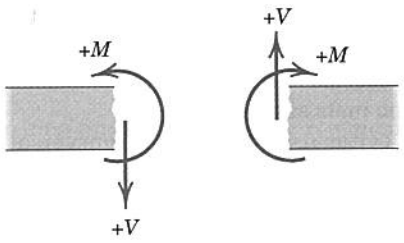


Figura 5/23

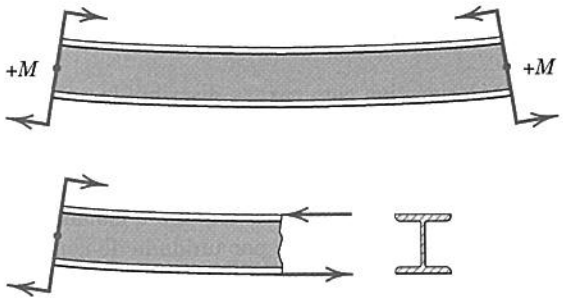


Figura 5/24

suas extremidades. A seção transversal da viga é tratada como uma seção em H, com uma alma central muito fina e flanges pesados em cima e em baixo. Para essa viga podemos desprezar a carga suportada pela alma em comparação com aquela sustentada pelos dois flanges. O flange superior da viga tem, claramente, seu comprimento reduzido e está sob compressão, enquanto o flange inferior tem seu comprimento aumentado e está sob tração. A resultante das duas forças, uma trativa e a outra compressiva, atuando em qualquer seção é um binário e tem o valor do momento fletor na seção. Se uma viga tendo qualquer outra forma de seção transversal fosse carregada da mesma maneira, a distribuição de forças na seção transversal seria diferente, mas a resultante seria o mesmo binário.

Diagramas da Força Cisalhante (Cortante) e do Momento Fletor

A variação da força cisalhante V e do momento fletor M ao longo do comprimento de uma viga dá a informação necessária para a análise do projeto da viga. Em particular, o módulo máximo do momento fletor é normalmente a primeira consideração no projeto ou na seleção de uma viga, e seu valor e posição devem ser determinados. As variações na força cisalhante e no momento são melhor representadas graficamente e os valores de V e M, quando colocados em um gráfico em função da distância ao longo do comprimento da viga, resultam nos *diagramas da força cortante* e do *momento fletor* para a viga.

O primeiro passo na determinação das relações da força cortante e do momento é estabelecer os valores de todas as reações externas na viga, pela aplicação das equações de equilíbrio a um diagrama de corpo livre da viga como um todo. Em seguida, isolamos uma parte da viga com um diagrama de corpo livre, quer à direita quer à esquerda de uma seção transversal arbitrária, e aplicamos as equações de equilíbrio nessa parte isolada da viga. Essas equações levarão a expressões para a força cortante V e para o momento fletor M atuando na seção de corte da parte isolada da viga. A parte da viga que envolver o menor número de forças, à direita ou à esquerda da seção arbitrária, normalmente fornecerá a solução mais simples.

Devemos evitar usar uma seção transversal que coincida com a localização de uma carga concentrada ou um binário, já que essa posição representa um ponto de descontinuidade na variação do cortante ou do momento fletor. Finalmente, é importante notar que os cálculos para V e M em cada seção escolhida devem ser consistentes com a convenção dos sentidos positivos, mostrada na Fig. 5/23.

Relações Gerais para o Carregamento, Cisalhamento e Momento

Para qualquer viga com cargas distribuídas podemos estabelecer certas relações gerais que ajudarão muito na determinação das distribuições do cortante e do momento ao longo da viga. A Fig. 5/25 representa uma parte de uma viga carregada, onde um elemento dx da viga é isolado. O carregamento w representa a força por unidade de comprimento da viga. Na posição x, o cortante V e o momento M atuando no elemento são representados em seus sentidos positivos. No lado oposto do elemento, onde a coordenada é $x + dx$, essas quantidades também estão mostradas em seus sentidos positivos. Elas devem, entretanto, ser denominadas $V + dV$ e $M + dM$, pois V e M variam com x. O carregamento aplicado w pode ser considerado constante ao longo do comprimento do elemento, pois esse comprimento é uma quantidade diferencial e o efeito de qualquer variação em w desaparece no limite, quando comparado com o efeito do próprio w.

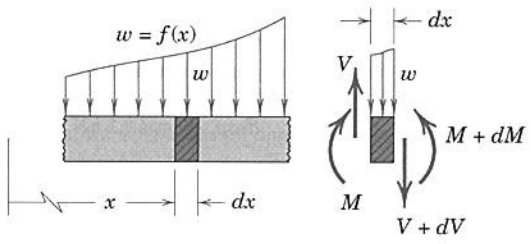


Figura 5/25

O equilíbrio do elemento requer que o somatório das forças verticais seja zero. Assim, temos

$$V - w\,dx - (V + dV) = 0$$

ou

$$w = -\frac{dV}{dx} \qquad (5/10)$$

Vemos da Eq. 5/10 que a inclinação do diagrama do cortante deve ser igual, em todos os seus pontos, ao valor negativo do carregamento aplicado. A Eq. 5/10 é válida em ambos os lados de uma carga concentrada, mas não na carga concentrada, devido à descontinuidade produzida pela mudança abrupta no cortante.

Podemos agora expressar a força cisalhante V em termos do carregamento w pela integração da Eq. 5/10. Assim,

$$\int_{V_0}^{V} dV = -\int_{x_0}^{x} w\,dx$$

ou

$$V = V_0 + (\text{o valor negativo da área sob a curva de carregamento desde } x_0 \text{ até } x)$$

Nessa expressão V_0 é a força cisalhante em x_0 e V é a força cisalhante em x. Fazer o somatório da área sob a curva de carregamento é normalmente um modo simples de construir o diagrama de cortante.

O equilíbrio do elemento na Fig. 5/25 requer também que o somatório dos momentos seja zero. Fazendo o somatório de momentos em relação ao lado esquerdo do elemento obtemos

$$M + w\,dx\,\frac{dx}{2} + (V + dV)\,dx - (M + dM) = 0$$

Os dois M se cancelam e os termos $w(dx)^2/2$ e $dV\,dx$ podem ser desprezados, pois eles são diferenciais de ordem superior a dos que permanecem. Temos, então,

$$V = \frac{dM}{dx} \qquad (5/11)$$

© Jake Wyman/Photonica/Getty Images

A viga em I é um elemento estrutural bastante comum, devido à economia de material que ela proporciona para se alcançar rigidez à flexão.

que expressa o fato de que o cortante em todos os pontos é igual à inclinação da curva do momento. A Eq. 5/11 é válida em ambos os lados de um binário concentrado, mas não no binário concentrado devido à descontinuidade causada pela mudança abrupta no momento.

Podemos agora escrever o momento M em função do cortante V integrando a Eq. 5/11. Assim,

$$\int_{M_0}^{M} dM = \int_{x_0}^{x} V\,dx$$

ou

$$M = M_0 + (\text{a área sob o diagrama de cortante desde } x_0 \text{ até } x)$$

Nessa expressão M_0 é o momento fletor em x_0 e M é o momento fletor em x. Para vigas onde não existe momento externo aplicado, M_0, em $x_0 = 0$, o momento total em qualquer seção é igual à área sob o diagrama de cortante até aquela seção. Fazendo o somatório da área sob o diagrama de cortante é, normalmente, o modo mais simples de construir o diagrama de momentos.

Quando V passa por zero e é uma função contínua de x com $dV/dx \neq 0$, o momento fletor M será máximo ou mínimo, pois $dM/dx = 0$ nesse ponto. Valores críticos de M ocorrem também quando V cruza o eixo zero de forma descontínua, o que ocorre para vigas sob cargas concentradas.

Observamos das Eqs. 5/10 e 5/11 que o grau de V em relação a x é uma unidade maior do que o de w. Da mesma forma, M é um grau maior em relação a x do que V. Conseqüentemente, M é dois graus maior em relação a x do que w. Assim, para uma viga carregada por $w = kx$, que é uma equação do primeiro grau em x, o cortante V é do segundo grau em x e o momento fletor M é do terceiro grau em x.

As Eqs. 5/10 e 5/11 podem ser combinadas para obter-se

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -w \qquad \textbf{(5/12)}$$

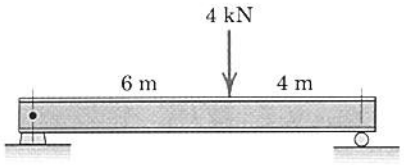
Assim, se w é uma função conhecida de x, o momento M pode ser obtido por duas integrações, desde que os limites de integração sejam avaliados apropriadamente a cada vez. Esse método é utilizável apenas se w for uma função contínua de x.*

Quando a flexão de uma viga ocorre em mais de um plano, podemos fazer uma análise separada em cada plano e combinar os resultados vetorialmente.

*Quando w é uma função descontínua em x, é possível introduzir um conjunto especial de expressões chamadas *funções singulares*, que permitem escrever expressões analíticas para o cortante V e o momento M em um intervalo que inclui descontinuidades. Essas funções não são discutidas neste livro.

Exemplo 5/13

Determine as distribuições do cortante e do momento produzidas na viga biapoiada pela carga concentrada de 4 kN.



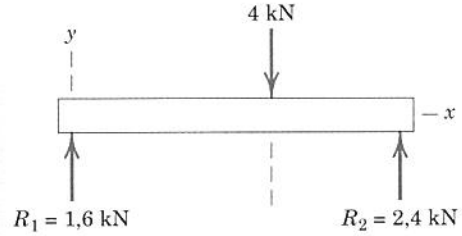
Solução. A partir do diagrama de corpo livre de toda a viga determinamos as reações dos apoios, que são

$$R_1 = 1{,}6 \text{ k} \qquad NR_2 = 2{,}4 \text{ kN}$$

Uma seção da viga, de comprimento x, é, em seguida, isolada com seu diagrama de corpo livre, no qual mostramos o cortante V e o momento fletor M em seus sentidos positivos. A condição de equilíbrio dá

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 1{,}6 - V = 0 \qquad V = 1{,}6 \text{ kN}$$

$$[\Sigma M_{R_1} = 0] \qquad M - 1{,}6x = 0 \qquad M = 1{,}6x$$

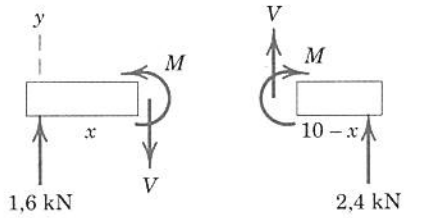


① Esses valores de V e M são válidos para todas as seções da viga à esquerda da carga de 4 kN.

A seguir, uma seção da viga à direita da carga de 4 kN é isolada com seu diagrama de corpo livre, no qual V e M estão mostrados em seus sentidos positivos. A condição de equilíbrio requer que

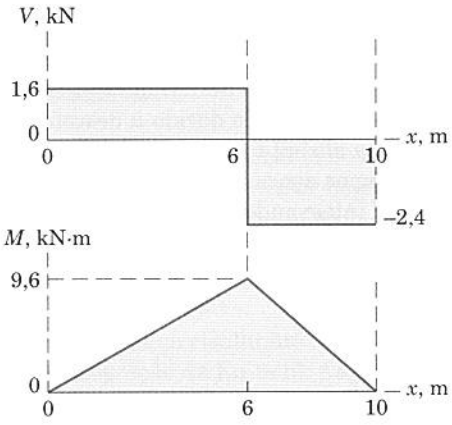
$$[\Sigma F_y = 0] \qquad V + 2{,}4 = 0 \qquad V = -2{,}4 \text{ kN}$$

$$[\Sigma M_{R_2} = 0] \qquad -(2{,}4)(10 - x) + M = 0 \qquad M = 2{,}4(10 - x)$$



Esses resultados são válidos apenas para seções da viga à direita da carga de 4 kN.

Os valores de V e M estão mostrados nos gráficos. O momento fletor máximo ocorre onde o cortante muda de sentido. Conforme nos movemos no sentido positivo dos x, começando com $x = 0$, vemos que o momento M é, simplesmente, a área acumulada sob o diagrama de cortante.

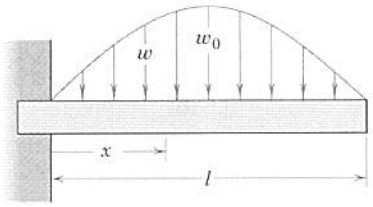


Sugestão Útil

① Devemos ser cuidadosos para não escolhermos a seção sob uma carga concentrada (tal como em $x = 6$ m), pois as relações do cortante e do momento envolvem descontinuidades nessas posições.

Exemplo 5/14

A viga em balanço está submetida a uma intensidade de carga (força por unidade de comprimento) que varia como $w = w_0 \operatorname{sen}(\pi x/l)$. Determine a força cisalhante (cortante) V e o momento fletor M em função da razão x/l.



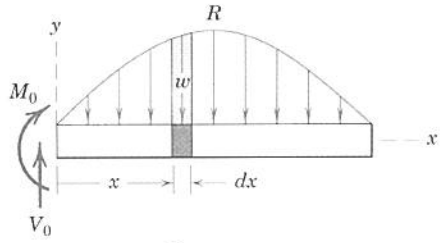
Solução. Primeiramente, o diagrama de corpo livre de toda a viga é desenhado, de modo que a força cisalhante V_0 e o momento fletor M_0 que atuam na extremidade apoiada em $x = 0$ possam ser calculados. Por convenção V_0 e M_0 estão mostrados em seus sentidos matemáticos positivos. Um somatório das forças verticais para que haja equilíbrio dá

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad V_0 - \int_0^l w\,dx = 0 \qquad V_0 = \int_0^l w_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\,dx = \frac{2w_0 l}{\pi}$$

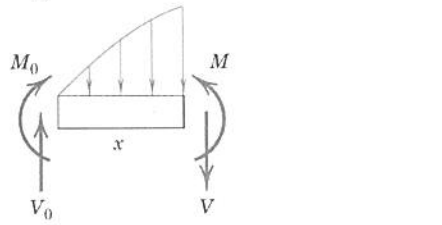
① O somatório dos momentos em relação à extremidade esquerda em $x = 0$ para que haja equilíbrio dá

$$[\Sigma M = 0] \qquad -M_0 - \int_0^l x(w\,dx) = 0 \qquad M_0 = -\int_0^l w_0 x \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\,dx$$

$$M_0 = \frac{-w_0 l^2}{\pi^2}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} - \frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\right]_0^l = -\frac{w_0 l^2}{\pi}$$



A partir do diagrama de corpo livre de uma seção arbitrária de comprimento x, a integração da Eq. 5/10 nos permite determinar a força cisalhante interna à viga. Assim,

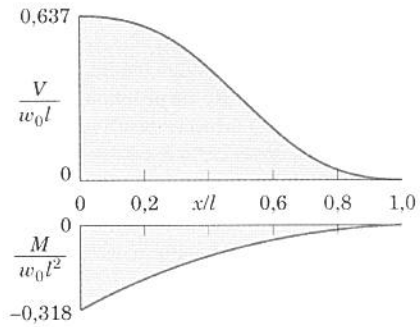


② $[dV = -w\,dx] \qquad \displaystyle\int_{V_0}^{V} dV = -\int_0^x w_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\,dx$

$$V - V_0 = \left[\frac{w_0 l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l}\right]_0^x \qquad V - \frac{2w_0 l}{\pi} = \frac{w_0 l}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{l} - 1\right)$$

ou de forma adimensional

$$\frac{V}{w_0 l} = \frac{1}{\pi}\left(1 + \cos\frac{\pi x}{l}\right) \qquad \textit{Resp.}$$



O momento fletor é obtido por integração da Eq. 5/11, que dá

$$[dM = V\,dx] \qquad \int_{M_0}^{M} dM = \int_0^x \frac{w_0 l}{\pi}\left(1 + \cos\frac{\pi x}{l}\right)dx$$

$$M - M_0 = \frac{w_0 l}{\pi}\left[x + \frac{l}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\right]_0^x$$

$$M = -\frac{w_0 l^2}{\pi} + \frac{w_0 l}{\pi}\left[x + \frac{l}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} - 0\right]$$

ou de forma adimensional

$$\frac{M}{w_0 l^2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{l} - 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\right) \qquad \textit{Resp.}$$

As variações de $V/w_0 l$ e $M/w_0 l^2$ com x/l estão mostradas nas figuras da parte de baixo. Os valores negativos de $M/w_0 l^2$ indicam que, fisicamente, o momento fletor está na direção oposta àquela mostrada.

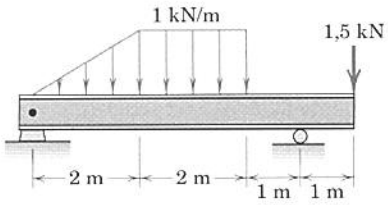
Sugestões Úteis

① Havendo simetria fica claro que a resultante $R = V_0 = 2\,w_0 l/\pi$ da distribuição de carga atua na metade do vão, de modo que o requisito para o momento é, simplesmente, $M_0 = -Rl/2 = -w_0 l^2/\pi$. O sinal de menos nos diz que, fisicamente, o momento fletor em $x = 0$ é oposto àquele representado no diagrama de corpo livre.

② O diagrama de corpo livre serve para nos lembrar que os limites de integração para V, bem como para x, devem ser considerados. Vemos que a expressão para V é positiva, de modo que a força cisalhante é como representada no diagrama de corpo livre.

Exemplo 5/15

Desenhe os diagramas de cortante e de momento para a viga carregada e determine o momento máximo M e sua posição x a partir da extremidade esquerda.



Solução. As reações dos apoios são mais facilmente obtidas considerando as resultantes das cargas distribuídas, como mostrado no diagrama de corpo livre da viga como um todo. O primeiro intervalo da viga é analisado a partir do diagrama de corpo livre da seção para $0 < x < 2$ m. O somatório das forças verticais e o somatório dos momentos em relação à seção cortada leva a

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad V = 1{,}233 - 0{,}25x^2$$

$$[\Sigma M = 0] \quad M + (0{,}25x^2)\frac{x}{3} - 1{,}233x = 0 \qquad M = 1{,}233x - 0{,}0833x^3$$

Esses valores de V e de M são válidos para $0 < x < 2$ m e estão apresentados para esse intervalo nos diagramas de cortante e de momento mostrados.

A partir do diagrama de corpo livre da seção para a qual $2 < x < 4$ m, o equilíbrio na direção vertical e o somatório dos momentos em relação à seção cortada fornecem

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad V + 1(x - 2) + 1 - 1{,}233 = 0 \qquad V = 2{,}23 - x$$

$$[\Sigma M = 0] \qquad M + 1(x - 2)\frac{x - 2}{2} + 1[x - \tfrac{2}{3}(2)] - 1{,}233x = 0$$

$$M = -0{,}667 + 2{,}23x - 0{,}50x^2$$

Esses valores de V e de M estão mostrados nos diagramas de cortante e de momento para o intervalo $2 < x < 4$ m.

A análise do restante da viga é feita a partir do diagrama de corpo livre da parte da viga à direita de uma seção no próximo intervalo. Deve ser observado que V e M estão representados em suas direções positivas. Um somatório das forças verticais, e o somatório de momentos em relação a essa seção levam a

$$V = -1{,}767 \text{ kN} \qquad \text{e} \qquad M = 7{,}33 - 1{,}767x$$

Esses valores de V e de M estão mostrados nos diagramas de cortante e de momento para o intervalo $4 < x < 5$ m.

O último intervalo pode ser analisado por inspeção. O cortante é constante em +1,5 kN e o momento segue uma relação linear, começando por zero na extremidade direita da viga.

O momento máximo ocorre em $x = 2{,}23$ m, onde a curva do cortante cruza o eixo dos x e o módulo de M é obtido para esse valor de x por substituição na expressão de M do segundo intervalo. O momento máximo vale

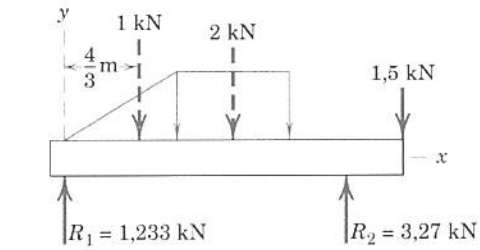
$$M = 1{,}827 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

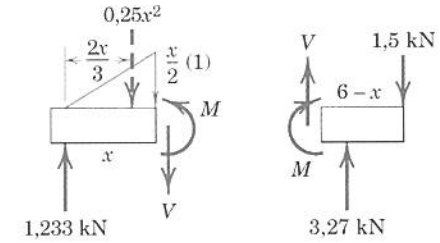
Observe, como anteriormente, que o momento M em qualquer seção é igual à área sob a curva do diagrama de cortante até aquela seção. Por exemplo, para $x < 2$ m,

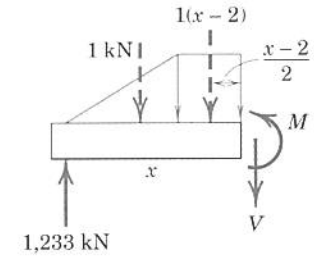
$$[\Delta M = \int V\,dx] \qquad M - 0 = \int_0^x (1{,}233 - 0{,}25x^2)\,dx$$

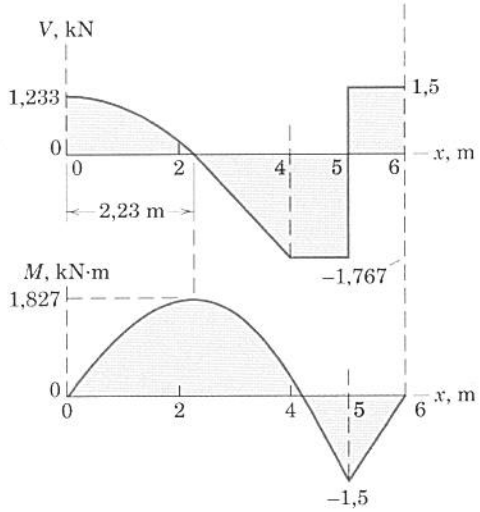
e, como acima,

$$M = 1{,}233x - 0{,}0833x^3$$







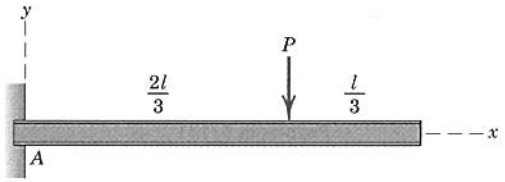


PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

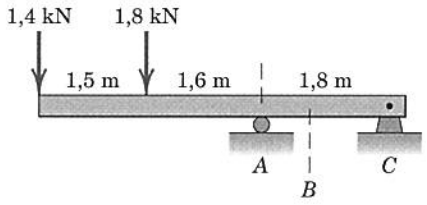
5/117 Determine as distribuições da força cortante e do momento fletor produzidos na viga pela carga concentrada. Quais são os valores do cortante e do momento em $x = l/2$?

Resp. $V = P, M = -\frac{Pl}{6}$



Problema 5/117

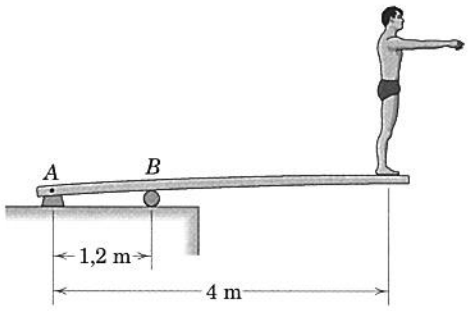
5/118 Determine o cortante V na seção B, localizada entre A e C, e o momento M no apoio A.



Problema 5/118

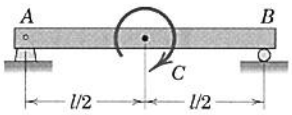
5/119 Desenhe os diagramas de cortante e de momento do trampolim, que sustenta o homem pesando 80 kg, preparado para mergulhar. Especifique o momento fletor de máximo módulo.

Resp. $M_B = -2200$ N · m



Problema 5/119

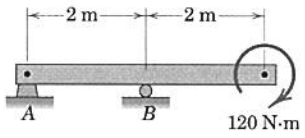
5/120 Desenhe os diagramas de cortante e de momento para a viga carregada em seu ponto médio pelo momento C.



Problema 5/120

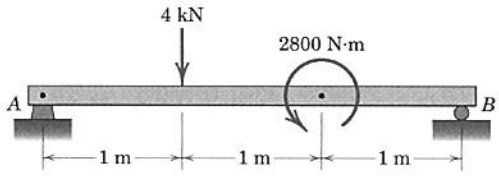
5/121 Desenhe os diagramas de cortante e de momento para a viga submetida a um momento em sua extremidade. Qual é o valor do momento em uma seção 0,5 m à direita de B?

Resp. $M = -120$ N · m



Problema 5/121

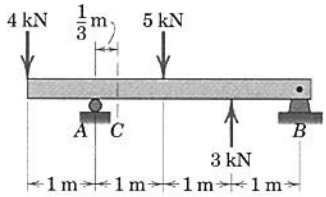
5/122 Desenhe os diagramas de cortante e de momento para a viga carregada. Quais são os valores do cortante e do momento no meio da viga?



Problema 5/122

5/123 Desenhe os diagramas de cortante e de momento para a viga mostrada e determine o momento fletor M na seção C.

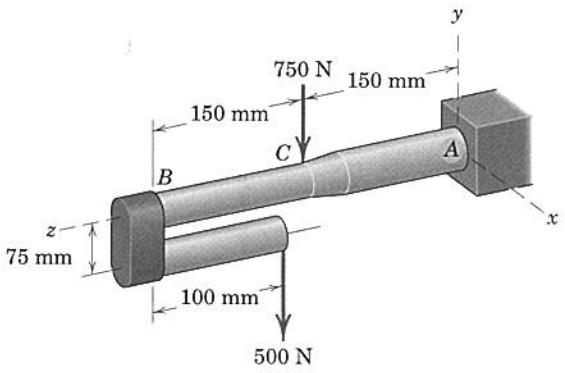
Resp. $M_C = -2{,}78$ kN · m



Problema 5/123

Problemas Representativos

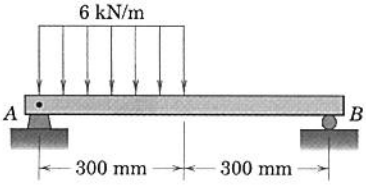
5/124 Construa o diagrama do momento fletor para o eixo em balanço AB, da unidade rígida mostrada.



Problema 5/124

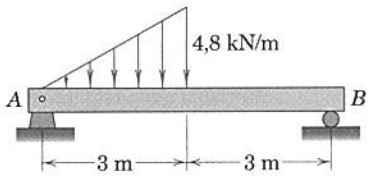
5/125 Determine o cortante V e o momento M em uma seção da viga carregada 200 mm à direita de A.

Resp. $V = 0{,}15$ kN, $M = 0{,}15$ kN · m



Problema 5/125

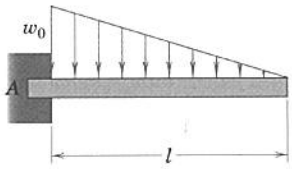
5/126 Determine o cortante V e o momento M em uma seção 2 m à direita da extremidade A da viga.



Problema 5/126

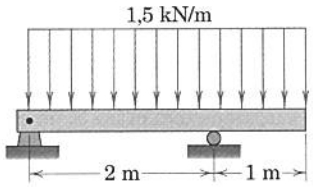
5/127 Desenhe os diagramas de cortante e de momento para a viga em balanço linearmente carregada, repetida aqui do Prob. 5/97. Determine o módulo máximo do momento fletor M.

Resp. $|M|_{\text{máx}} = \dfrac{w_0 l^2}{6}$



Problema 5/127

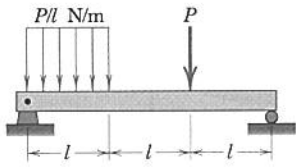
5/128 Desenhe os diagramas de cortante e de momento para a viga mostrada. Determine a distância b, medida a partir da extremidade esquerda, ao ponto entre os suportes onde o momento fletor é nulo.



Problema 5/128

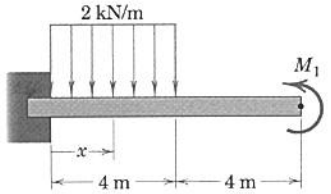
5/129 Desenhe os diagramas de cortante e de momento para a viga carregada e determine o módulo máximo M do momento fletor.

Resp. $M = \frac{5}{6}Pl$



Problema 5/129

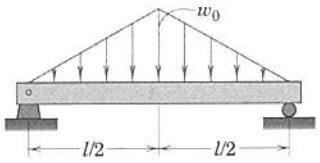
5/130 Desenhe os diagramas de cortante e de momento para a viga em balanço carregada, para a qual o momento M_1 é ajustado de modo a produzir um momento nulo na extremidade engastada da viga. Determine o momento fletor M em $x = 2$ m.



Problema 5/130

5/131 Desenhe os diagramas de cortante e de momento para a viga linearmente carregada mostrada. Determine o módulo máximo do momento fletor M.

Resp. $|M|_{\text{máx}} = \dfrac{w_0 l^2}{12}$

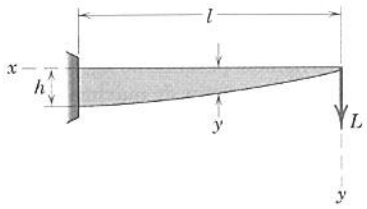


Problema 5/131

5/132 A força cortante, em quilonewtons, em uma determinada viga é dada por $V = 33x - 7x^3$, onde x é a distância, em metros, medida ao longo da viga. Determine, em quilonewtons por metro de comprimento, a variação correspondente ao carregamento normal em função de x. Determine, também, o momento fletor M em $x = 1{,}5$ m, se o momento fletor em $x = 0{,}5$ m vale 0,4 kN · m.

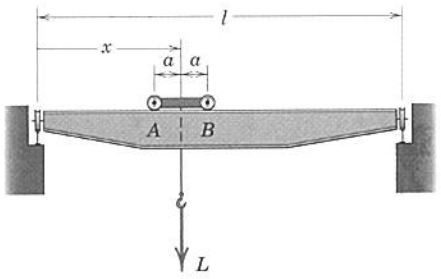
5/133 Sabe-se que resistência à flexão de uma viga com largura uniforme é proporcional ao quadrado da espessura y da viga. Para a viga em balanço mostrada, a espessura vale h, no apoio. Determine em função do comprimento x, a espessura y necessária para que todas as seções sejam igualmente efetivas em sua resistência à flexão.

Resp. $y = h\sqrt{x/l}$



Problema 5/133

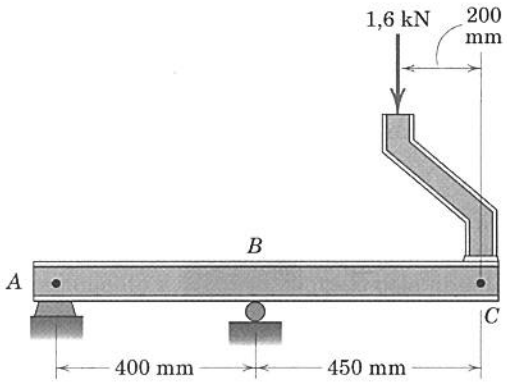
5/134 Determine o momento fletor máximo M e seu valor correspondente de x na viga da ponte rolante e indique a seção onde esse momento atua.



Problema 5/134

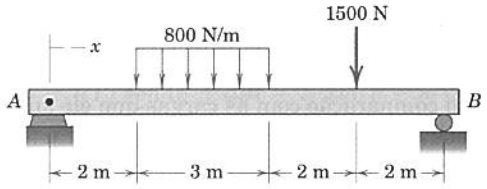
5/135 O suporte em ângulo está soldado à extremidade C da viga em I e sustenta uma força vertical de 1,6 kN. Determine o momento fletor em B e a distância x à esquerda de C na qual o momento fletor vale zero. Construa também o diagrama de momento para a viga.

Resp. $M_B = -0{,}40$ kN · m, $x = 0{,}2$ m



Problema 5/135

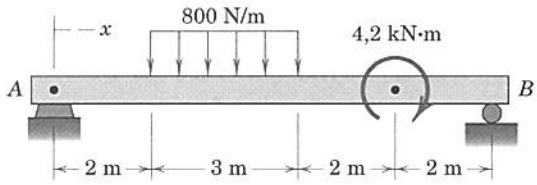
5/136 Construa os diagramas de cortante e de momento para a viga carregada pelas cargas pontual e distribuída. Quais são os valores do cortante e do momento em $x = 6$ m? Determine o momento fletor máximo $M_{máx}$.



Problema 5/136

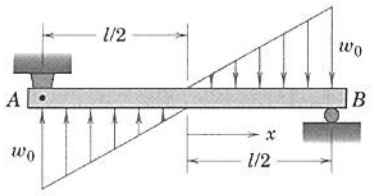
5/137 Repita o Prob. 5/136 substituindo a carga de 1500 N pelo momento de 4,2 kN · m.

Resp. $V = -1400$ N, $M = 0$, $M_{máx} = 2800$ N · m



Problema 5/137

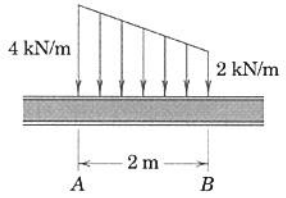
5/138 A viga está submetida aos dois carregamentos semelhantes mostrados, nos quais a máxima intensidade de carga vale w_0, em força por unidade de comprimento. Desenvolva expressões para o cortante V e o momento M na viga em termos da distância x medida desde o centro da viga.



Problema 5/138

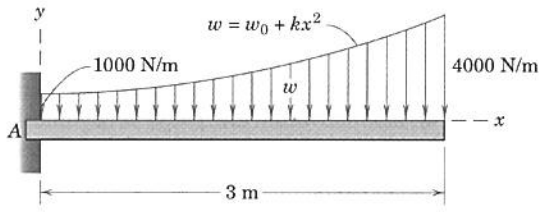
5/139 A carga distribuída decresce linearmente de 4 para 2 kN/m, em uma distância de 2 m ao longo de uma certa viga em equilíbrio. Se o cortante e o momento fletor na seção A valem $+3$ kN e $+2$ kN · m, respectivamente, calcule o cortante e o momento fletor na seção B.

Resp. $V_B = -3$ kN, $M_B = 4/3$ kN · m



Problema 5/139

5/140 Desenvolva expressões para o cortante V e o momento fletor M em função de x para a viga em balanço carregada como mostrado.

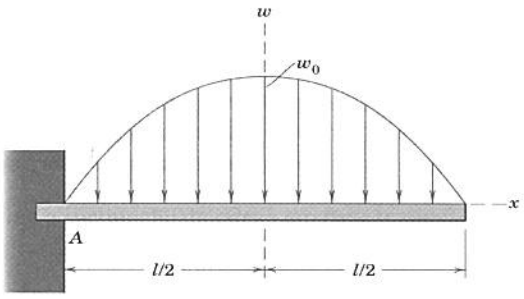


Problema 5/140

5/141 Desenvolva expressões para o cortante V e o momento fletor M em função de x para a viga em balanço do Prob. 5/108 novamente mostrada aqui.

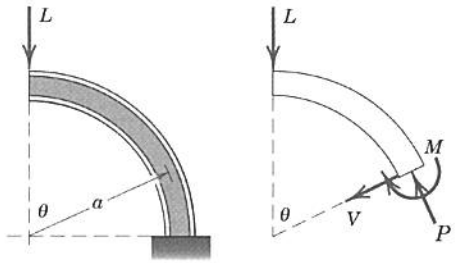
$$\textit{Resp. } V = w_0\left(\frac{l}{3} - x + \frac{4x^3}{3l^2}\right)$$

$$M = w_0\left(-\frac{l^2}{16} + \frac{xl}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3l^2}\right)$$



Problema 5/141

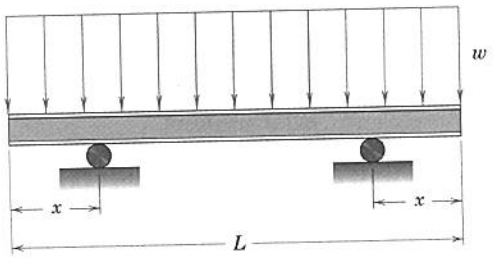
5/142 A viga em balanço curva tem a forma de um quarto de círculo. Determine as expressões para o cortante V e o momento fletor M em função de θ.



Problema 5/142

▶5/143 A viga sustenta uma carga unitária uniforme w. Determine a posição x dos dois apoios de modo a minimizar o momento fletor máximo $M_{máx}$ na viga. Especifique o valor de $M_{máx}$.

Resp. $x = 0{,}207L$, $M_{máx} = 0{,}0214wL^2$

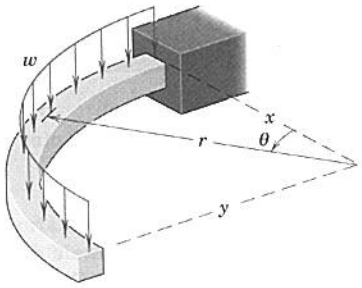


Problema 5/143

▶5/144 A viga curva em balanço, com a forma de um quarto de círculo, suporta uma carga de w N/m aplicada ao longo da parte curva da viga, em sua superfície superior. Determine os módulos do momento torçor T e do momento fletor M na viga em função de θ.

Resp. $T = wr^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \cos\theta\right)$

$M = wr^2(1 - \text{sen}\,\theta)$



Problema 5/144

5/8 Cabos Flexíveis

Um tipo importante de elemento estrutural é o cabo flexível, que é usado na sustentação de pontes, linhas de transmissão, cabos-guia para sustentação de linhas pesadas de telefone ou de cabos condutores para ônibus elétricos e muitas outras aplicações. Para projetar essas estruturas devemos conhecer as relações envolvendo a tensão trativa, vão, deflexão e comprimento dos cabos. Determinamos essas quantidades examinando o cabo como um corpo em equilíbrio. Na análise de cabos flexíveis consideramos que qualquer resistência oferecida à flexão é desprezível. Essa hipótese implica que a força no cabo está sempre na direção do cabo.

Cabos flexíveis podem sustentar uma série de cargas concentradas distintas, como mostrado na Fig. 5/26*a*, ou podem sustentar cargas distribuídas continuamente sobre seu comprimento, como indicado pelo carregamento de intensidade variável w na Fig. 5/26*b*. Algumas vezes o peso do cabo é desprezível em comparação com as cargas que ele sustenta. Em outros casos o peso do cabo pode representar uma carga apreciável ou ser a única carga, e não pode ser desprezado. Independentemente de qual destas condições está presente, os requisitos de equilíbrio do cabo podem ser formulados da mesma maneira.

Relações Gerais

Se a intensidade da carga contínua e variável aplicada ao cabo da Fig. 5/26*b* for dada como w unidades de força por unidade de comprimento horizontal x, então, a resultante R do carregamento vertical é

$$R = \int dR = \int w\,dx$$

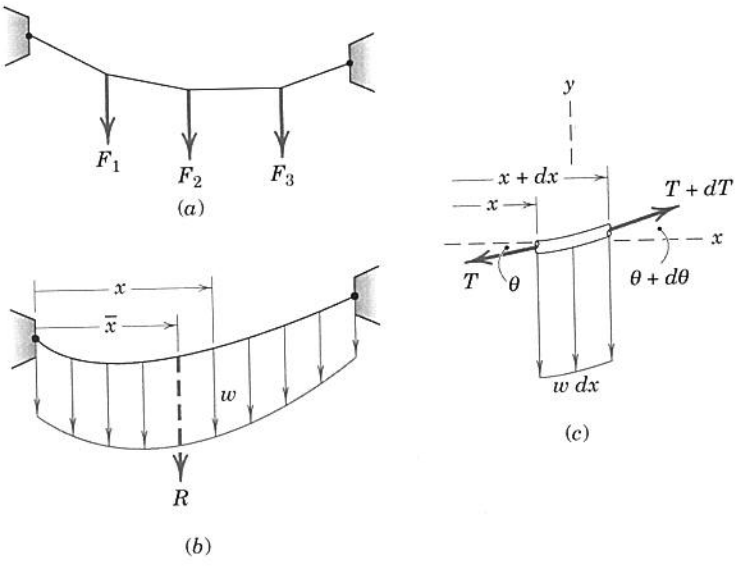


Figura 5/26

onde a integração é feita sobre o intervalo desejado. Determinamos a posição de R a partir do princípio dos momentos, de modo que

$$R\bar{x} = \int x\,dR \qquad \bar{x} = \frac{\int x\,dR}{R}$$

A carga elementar $dR = w\,dx$ é representada por uma faixa elementar de comprimento vertical w e largura dx do diagrama de carregamento e R é representado pela área total. Segue, das expressões anteriores, que R passa pelo *centróide* da área delimitada pelas setas.

A condição de equilíbrio do cabo é satisfeita se cada elemento infinitesimal do cabo estiver em equilíbrio. O diagrama de corpo livre de um elemento diferencial é mostrado na Fig. 5/26*c*. Na posição genérica x, a força trativa no cabo é T e o cabo faz um ângulo θ com a direção horizontal x. Na seção $x + dx$ a força trativa é $T + dT$ e o ângulo é $\theta + d\theta$. Observe que as variações de T e θ são consideradas positivas para variações positivas em x. A carga vertical $w\,dx$ completa o diagrama de corpo livre. O equilíbrio das forças verticais e horizontais requer, respectivamente, que

$$(T + dT)\,\text{sen}\,(\theta + d\theta) = T\,\text{sen}\,\theta + w\,dx$$

$$(T + dT)\cos(\theta + d\theta) = T\cos\theta$$

A expansão trigonométrica para o seno e o cosseno da soma de dois ângulos e as substituições de sen $d\theta = d\theta$ e cos $d\theta = 1$, que são válidas no limite quando $d\theta$ tende a zero, levam a

$$(T + dT)(\text{sen}\,\theta + \cos\theta\,d\theta) = T\,\text{sen}\,\theta + w\,dx$$

$$(T + dT)(\cos\theta - \text{sen}\,\theta\,d\theta) = T\cos\theta$$

Desprezando os termos de segunda ordem e simplificando obtém-se

$$T\cos\theta\,d\theta + dT\,\text{sen}\,\theta = w\,dx$$

$$-T\,\text{sen}\,\theta\,d\theta + dT\cos\theta = 0$$

que escrevemos como

$$d(T\,\text{sen}\,\theta) = w\,dx \qquad \text{e} \qquad d(T\cos\theta) = 0$$

A segunda relação expressa o fato de que a componente horizontal de T permanece inalterada, o que é claro a partir do diagrama de corpo livre. Se introduzirmos o símbolo $T_0 = T\cos\theta$ para esta força horizontal constante, podemos então substituir $T = T_0/\cos\theta$ na primeira das duas equações anteriormente formuladas e obter $d(T_0 \tan\theta) = w\,dx$. Como $\tan\theta = dy/dx$, a equação de equilíbrio pode ser escrita na forma

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0}} \qquad \textbf{(5/13)}$$

A Eq. 5/13 é a equação diferencial para o cabo flexível. A solução para essa equação será aquela relação funcional $y = f(x)$ que satisfizer a equação e também satisfizer as condições nas extremidades fixas do cabo, chamadas *condições de contorno.* Essa relação define a forma do cabo e vamos usá-la para resolver dois casos importantes e limites de carregamento em cabos.

Cabo Parabólico

Quando a intensidade do carregamento vertical w é constante, a condição se aproxima muito daquela de uma ponte suspensa onde o peso uniforme do pavimento pode ser dado pela constante w. A massa do cabo em si não é distribuída uniformemente em relação ao eixo horizontal, mas é relativamente pequena e, assim, desprezamos seu peso. Para esse caso limite mostraremos que o cabo forma um *arco parabólico.*

Começamos com um cabo suspenso a partir de dois pontos A e B, que não estão sobre a mesma linha horizontal, Fig. 5/27*a*. Colocamos a origem no ponto mais baixo do cabo, onde a força trativa é horizontal e vale T_0. Integrando uma vez a Eq. 5/13 em relação a x obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{T_0} + C$$

onde C é uma constante de integração. Para os eixos coordenados escolhidos, $dy/dx = 0$ quando $x = 0$, de modo que $C = 0$. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{T_0}$$

que define a inclinação da curva em função de x. Uma segunda integração dá

$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{wx}{T_0}\,dx \quad \text{ou} \quad \boxed{y = \frac{wx^2}{2T_0}} \qquad \textbf{(5/14)}$$

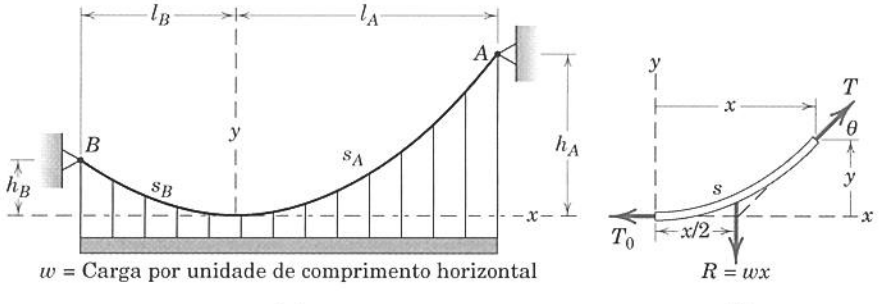


Figura 5/27

Alternativamente, você deve ser capaz de obter resultados idênticos com a integral indefinida, juntamente com a avaliação da constante de integração. A Eq. 5/14 dá a forma do cabo que, como vemos, é uma parábola vertical. O componente horizontal constante da força trativa se torna a força trativa do cabo na origem.

Colocando os valores correspondentes $x = l_A$ e $y = h_A$ na Eq. 5/14 obtém-se

$$T_0 = \frac{wl_A^2}{2h_A} \qquad \text{de modo que} \qquad y = h_A(x/l_A)^2$$

A força trativa T é determinada de um diagrama de corpo livre de uma porção finita do cabo, mostrado na Fig. 5/27*b*. A partir do teorema de Pitágoras

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2x^2}$$

A eliminação de T_0 dá

$$T = w\sqrt{x^2 + (l_A^2/2h_A)^2} \tag{5/15}$$

A tensão máxima ocorre onde $x = l_A$ e vale

$$T_{\text{máx}} = wl_A\sqrt{1 + (l_A/2h_A)^2} \tag{5/15a}$$

Obtemos o comprimento s_A do cabo desde a origem até o ponto A integrando a expressão para um comprimento diferencial $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Assim,

$$\int_0^{s_A} ds = \int_0^{l_A} \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx = \int_0^{l_A} \sqrt{1 + (wx/T_0)^2}\, dx$$

Embora possamos integrar esta expressão de forma fechada, para propósitos computacionais é mais conveniente escrever a raiz como uma série convergente e, então, integrá-la termo a termo. Para esse propósito usamos a expansão binomial

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

que converge para $x^2 < 1$. Substituindo x na série por $(wx/T_0)^2$ e colocando $n = 1/2$ obtém-se a expressão

$$s_A = \int_0^{l_A} \left(1 + \frac{w^2x^2}{2T_0^2} - \frac{w^4x^4}{8T_0^4} + \cdots\right) dx$$

$$= l_A\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^4 + \cdots\right] \tag{5/16}$$

Essa série é convergente para valores de $h_A/l_A < 1/2$, o que é válido para a maioria dos casos práticos.

As relações válidas para as seções do cabo, desde a origem até o ponto B, podem ser facilmente obtidas substituindo h_A, l_A e s_A por h_B, l_B e s_B, respectivamente.

Para uma ponte suspensa, onde as torres de sustentação estão em uma mesma linha horizontal, Fig. 5/28, o vão total vale $L = 2l_A$, a deflexão vale $h = h_A$ e o comprimento total do cabo é $S = 2s_A$. Com essas substituições, a força trativa máxima e o comprimento total se tornam

$$T_{\text{máx}} = \frac{wL}{2}\sqrt{1 + (L/4h)^2} \tag{5/15b}$$

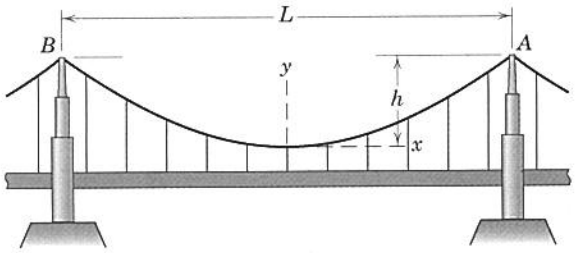


Figura 5/28

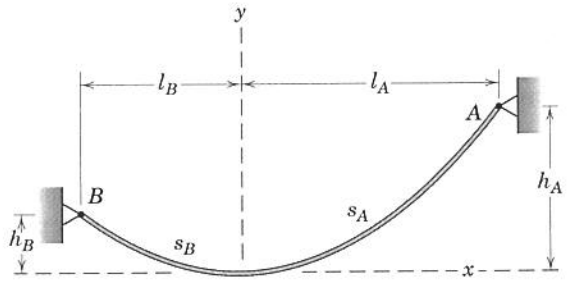
$$S = L\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{L}\right)^4 + \cdots\right] \tag{5/16a}$$

Essa série converge para todos os valores de $h/L < 1/4$. Na maioria dos casos h é muito menor do que $L/4$, de modo que os três termos da Eq. 5/16*a* dão uma aproximação suficientemente precisa.

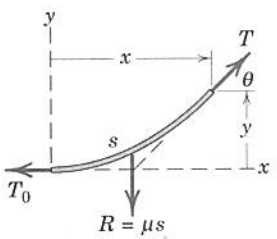
Cabo Catenário

Considere agora um cabo uniforme, Fig. 5/29*a*, suspenso de dois pontos A e B e apenas sob ação de seu próprio peso. Mostraremos, nesse caso limite, que o cabo assume uma forma curva conhecida como *catenária*.

O diagrama de corpo livre de uma porção finita do cabo de comprimento s, medido desde a origem, é mostrado na parte *b* da figura. Esse diagrama de corpo livre difere daquele da Fig. 5/27*b*, já que a força vertical total suportada é igual ao peso da seção do cabo de comprimento s, em vez da carga uniformemente distribuída em relação à horizontal. Se o cabo tem um peso μ por unidade de comprimento, a resultante R da carga é $R = \mu s$ e a carga vertical incre-



(*a*)



(*b*)

Figura 5/29

mental $w\,dx$ da Fig. 5/26*c* é substituída por $\mu\,ds$. Com esta substituição, a relação diferencial, Eq. 5/13, para o cabo se torna

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\frac{ds}{dx} \tag{5/17}$$

Como $s = f(x, y)$ devemos mudar esta equação para uma que contenha apenas as duas variáveis.

Podemos substituir a identidade $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ para obter

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{5/18}$$

A Eq. 5/18 é a equação diferencial da curva (catenária) formada pelo cabo. Essa equação é mais fácil de resolver se substituímos $p = dy/dx$ para obter

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\mu}{T_0}dx$$

Integrando essa equação obtemos

$$\ln\,(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{\mu}{T_0}x + C$$

A constante C vale zero, pois $dy/dx = p = 0$ quando $x = 0$. Substituindo $p = dy/dx$, mudando para a forma exponencial e eliminando a raiz da equação obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\mu x/T_0} - e^{-\mu x/T_0}}{2} = \operatorname{senh}\frac{\mu x}{T_0}$$

onde a função hiperbólica* foi introduzida por conveniência. A inclinação pode ser integrada para obter

$$y = \frac{T_0}{\mu}\cosh\frac{\mu x}{T_0} + K$$

A constante de integração K é avaliada a partir da condição de contorno $x = 0$ quando $y = 0$. Essa substituição requer que $K = -T_0/\mu$ e, assim,

$$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\frac{\mu x}{T_0} - 1\right) \tag{5/19}$$

A Eq. 5/19 é a equação da curva (catenária) formada pelo cabo pendendo sob a ação de seu próprio peso.

A partir do diagrama de corpo livre na Fig. 5/29*b* vemos que $dy/dx = \tan\theta = \mu s/T_0$. Assim, da expressão anterior para a inclinação,

$$s = \frac{T_0}{\mu}\operatorname{senh}\frac{\mu x}{T_0} \tag{5/20}$$

Obtemos a força trativa T no cabo a partir do triângulo de equilíbrio das forças na Fig. 5/29*b*. Assim,

$$T^2 = \mu^2 s^2 + {T_0}^2$$

que, quando combinada com a Eq. 5/20, se torna

$$T^2 = {T_0}^2\left(1 + \operatorname{senh}^2\frac{\mu x}{T_0}\right) = {T_0}^2\cosh^2\frac{\mu x}{T_0}$$

ou

$$T = T_0\cosh\frac{\mu x}{T_0} \tag{5/21}$$

Podemos também expressar a força trativa em termos de y com a ajuda da Eq. 5/19, que, quando substituída na Eq. 5/21, dá

$$T = T_0 + \mu y \tag{5/22}$$

A Eq. 5/22 mostra que a mudança na força trativa do cabo a partir daquela na posição mais baixa depende apenas de μy.

A maioria dos problemas lidando com catenárias envolve soluções das Eqs. 5/19 a 5/22, que podem ser tratadas com uma aproximação gráfica ou resolvidas por computador. O procedimento para uma solução gráfica ou computacional está ilustrado no Exemplo 5/17.

A solução de problemas de catenária onde a razão deflexão/vão é pequena pode ser aproximada pelas relações desenvolvidas para o cabo parabólico. Uma razão deflexão/vão pequena significa um cabo esticado e a distribuição uniforme de peso ao longo do cabo não é muito diferente da mesma intensidade de carga uniformemente distribuída ao longo da horizontal.

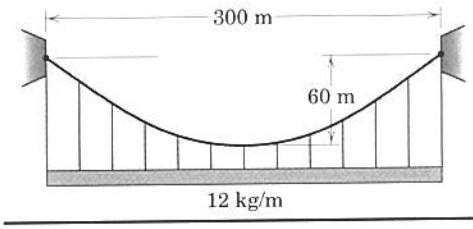
Muitos problemas que lidam tanto com cabos catenários quanto parabólicos envolvem pontos de sustentação que não estão no mesmo nível. Nesses casos podemos aplicar as relações recém-desenvolvidas às partes do cabo em cada lado do ponto mais baixo.

© MedioImages/Media Bakery

Teleférico em Juneau, Alasca.

*Veja as Seções C/8 e C/10, Apêndice C, para a definição e integração das funções hiperbólicas.

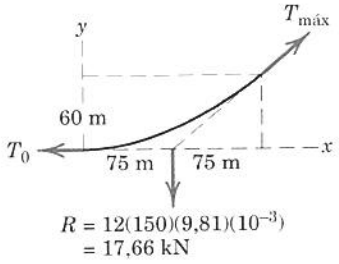
Exemplo 5/16



O cabo leve sustenta uma massa de 12 kg por metro de comprimento horizontal e está suspenso entre dois pontos distantes de 300 m e situados no mesmo nível. Se a deflexão vale 60 m, ache a força trativa no meio do comprimento, a força trativa máxima e o comprimento total do cabo.

Solução. Com uma distribuição horizontal uniforme de carga, a solução da parte (*b*) da Seção 5/8 se aplica e temos uma forma parabólica para o cabo. Para $h = 60$ m, $L = 300$ m e $w = 12(9{,}81)(10^{-3})$kN/m a relação que segue a Eq. 5/14, com $l_A = L/2$, dá a força trativa no meio do comprimento

$$\left[T_0 = \frac{wL^2}{8h}\right] \qquad T_0 = \frac{0{,}1177(300)^2}{8(60)} = 22{,}1 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$



A força trativa máxima ocorre nos apoios e é dada pela Eq. 5/15*b*. Assim,

① $$\left[T_{máx} = \frac{wL}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{L}{4h}\right)^2}\right]$$

$$T_{máx} = \frac{12(9{,}81)(10^{-3})(300)}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{300}{4(60)}\right)^2} = 28{,}3 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestão Útil

① *Sugestão:* Verifique o valor de $T_{máx}$ diretamente do diagrama de corpo livre da metade direita do cabo, a partir da qual um polígono de força pode ser desenhado.

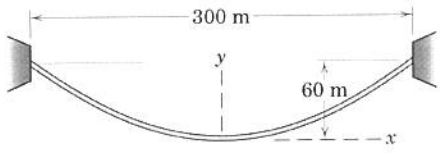
A razão deflexão/vão vale 60/300 = 1/5 < 1/4. Desse modo, a expressão da série desenvolvida na Eq. 5/16*a* é convergente e podemos escrever para o comprimento total

$$S = 300\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \cdots\right]$$

$$= 300[1 + 0{,}1067 - 0{,}01024 + \cdots]$$

$$= 329 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Exemplo 5/17



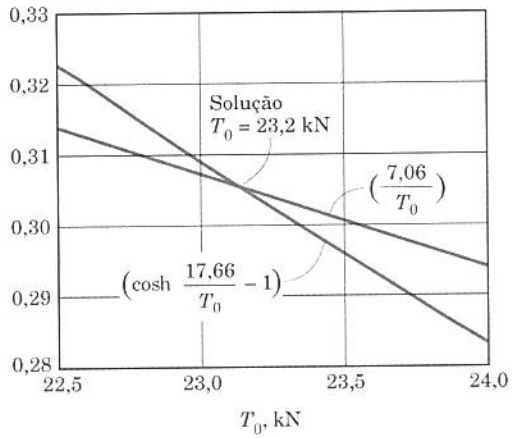
Substitua o cabo do Exemplo 5/16, que está carregado uniformemente ao longo da horizontal, por um cabo que tem uma massa de 12 kg por metro de seu próprio comprimento e sustenta apenas seu próprio peso. O cabo está suspenso entre dois pontos distantes de 300 m e situados no mesmo nível, tendo uma deflexão de 60 m. Determine a força trativa na metade do comprimento, a força trativa máxima e o comprimento total do cabo.

Solução. Com uma carga distribuída uniformemente ao longo do cabo a solução da parte (*c*) da Seção 5/8 se aplica e temos uma forma catenária para o cabo. As Eqs. 5/20 e 5/21 para o comprimento e a força trativa no cabo envolvem, ambas, a força trativa mínima T_0 na metade do comprimento, que deve ser determinada da Eq. 5/19. Assim, para $x = 150$ m, $y = 60$ m e $\mu = 12(9{,}81)(10^{-3}) = 0{,}1177$ kN/m, temos

$$60 = \frac{T_0}{0{,}1177}\left[\cosh\frac{(0{,}1177)(150)}{T_0} - 1\right]$$

ou

$$\frac{7{,}06}{T_0} = \cosh\frac{17{,}66}{T_0} - 1$$



Essa equação pode ser resolvida graficamente. Calculamos a expressão em cada lado do sinal de igual e fazemos seu gráfico em função de T_0. A interseção das duas curvas estabelece a igualdade e determina o valor correto de T_0. Esse gráfico é mostrado na figura que acompanha esse problema e leva à solução

$$T_0 = 23{,}2 \text{ kN}$$

Alternativamente, podemos escrever a equação como

$$f(T_0) = \cosh\frac{17{,}66}{T_0} - \frac{7{,}06}{T_0} - 1 = 0$$

e fazer um programa de computador para calcular o(s) valor(es) de T_0 que faça(m) $f(T_0) = 0$. Veja a Seção C/11 do Apêndice C para uma explicação de um método numérico aplicável.

A força trativa máxima ocorre para o máximo y e, da Eq. 5/22, vale

$$T_{máx} = 23{,}2 + (0{,}1177)(60) = 30{,}2 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

① Da Eq. 5/20 o comprimento total do cabo será

$$2s = 2\,\frac{23{,}2}{0{,}1177}\,\text{senh}\,\frac{(0{,}1177)(150)}{23{,}2} = 330 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestão Útil

① Observe que a solução do Exemplo 5/16 para o cabo parabólico dá uma aproximação muito boa dos valores para a catenária, embora tenhamos uma deflexão razoavelmente grande. A aproximação será ainda melhor para razões deflexão/vão menores.

PROBLEMAS

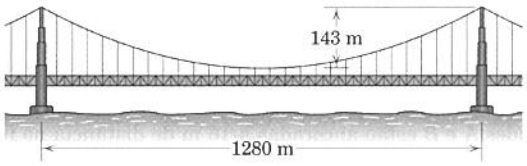
(Os problemas marcados com um asterisco (*) envolvem equações transcendentais, que podem ser resolvidas com auxílio de um computador ou por métodos gráficos.)

Problemas Introdutórios

5/145 Um rolo de uma trena com 30 m de comprimento tem uma massa de 0,283 kg. Calcule a deflexão h na metade da fita quando ela é esticada entre dois pontos, situados em um mesmo nível, por uma força trativa de 42 N em cada extremidade.

Resp. $h = 248$ mm

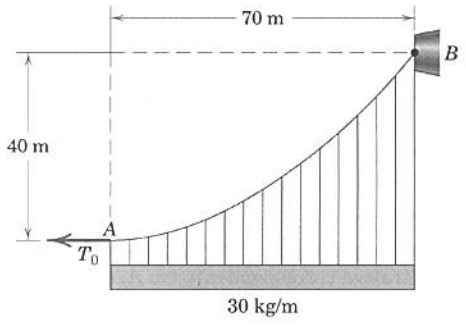
5/146 A ponte Golden Gate em São Francisco tem um vão principal de 1280 m, uma deflexão de 143 m e um carregamento estático total de 310,8 kN por metro linear de medida horizontal. O peso de ambos os cabos principais está incluído nesse valor e é considerado uniformemente distribuído ao longo da horizontal. O ângulo feito pelo cabo com a horizontal no topo da torre é o mesmo em cada lado de cada torre. Calcule a força trativa no meio do vão T_0 em cada um dos cabos principais e a força compressiva C exercida por cada cabo no topo de cada torre.



Problema 5/146

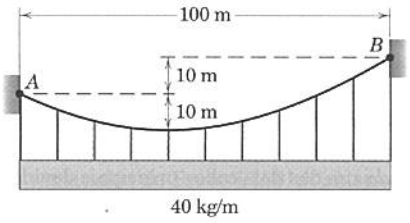
5/147 Calcule a força trativa T_0 no cabo, em A, necessária para sustentar a carga uniformemente distribuída em relação à horizontal. Determine também o ângulo θ feito pelo cabo com a horizontal, no ponto de amarração em B.

Resp. $T_0 = 18{,}03$ kN, $\theta = 48{,}8°$



Problema 5/147

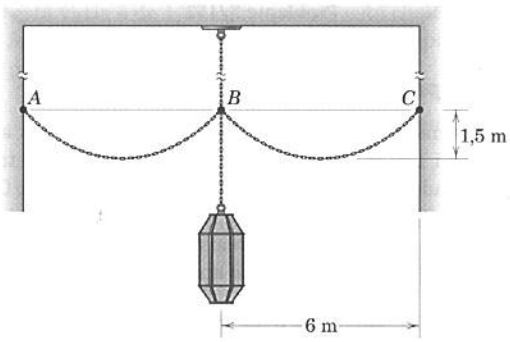
5/148 Um cabo sustenta uma carga uniformemente distribuída de 40 kg/m em relação à horizontal e está suspenso dos dois pontos fixos A e B, localizados como mostrado. Calcule as forças trativas no cabo, em A e B, e a força trativa mínima, T_0.



Problema 5/148

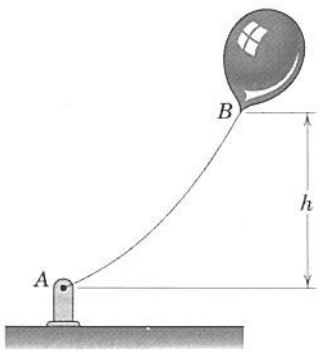
***5/149** Uma luminária está suspensa do teto de um pórtico externo. Quatro correntes, duas das quais estão mostradas, previnem movimento excessivo da luminária devido ao vento. Se as correntes pesam 200 N por metro de comprimento, determine a força trativa na corrente em C e o comprimento L da corrente BC.

Resp. $T_C = 945$ N, $L = 6{,}90$ m



Problema 5/149

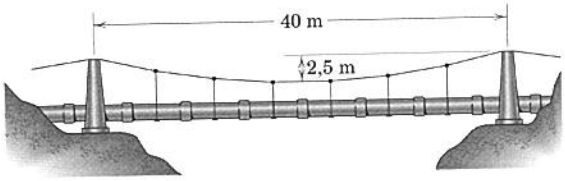
5/150 Um balão de propaganda está amarrado a um suporte por um cabo que tem uma massa de 0,12 kg/m. Com o vento, as forças trativas em A e B são de 110 N e 230 N, respectivamente. Determine a altura h do balão.



Problema 5/150

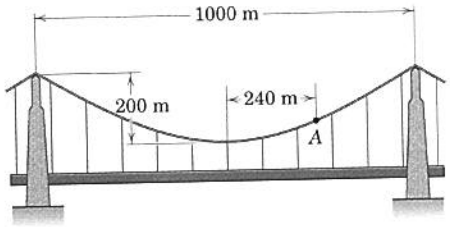
5/151 Um tubo de água horizontal de 350 mm de diâmetro é sustentado sobre uma ravina pelo cabo mostrado. O tubo e a água dentro dele têm uma massa combinada de 1400 kg por metro de seu comprimento. Calcule a força compressiva C exercida pelo cabo em cada suporte. Os ângulos feitos pelo cabo com a horizontal são os mesmos em ambos os lados de cada suporte.

Resp. $C = 549$ kN



Problema 5/151

5/152 Medidas de deformação feitas nos cabos da ponte suspensa na posição A indicam um aumento da força trativa de 2,14 MN em *cada* um dos dois cabos principais devido ao recapeamento da ponte. Determine a massa total m' do material de recapeamento adicionado por metro da pista de rolamento.

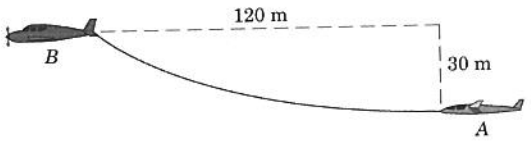


Problema 5/152

Problemas Representativos

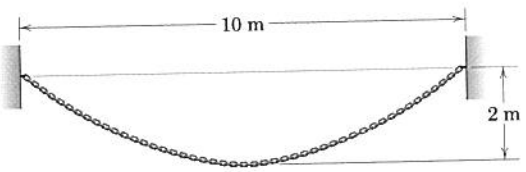
***5/153** O planador A está sendo rebocado em um vôo a altura constante e está 120 m atrás e 30 m abaixo do avião B. A tangente ao cabo no planador é horizontal. O cabo tem uma massa de 0,750 kg por metro de comprimento. Calcule a força trativa horizontal T_0 no cabo junto ao planador. Despreze a resistência do ar e compare o resultado com aquele obtido quando se aproxima a forma do cabo por uma parábola.

Resp. $T_0 = 1801$ N, $(T_0)_{\text{paráb}} = 1766$ N



Problema 5/153

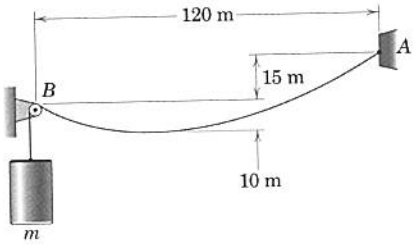
***5/154** Ache o comprimento total L da corrente que terá uma deflexão de 2 m quando for suspensa de dois pontos, distando de 10 m e situados sobre a mesma linha horizontal.



Problema 5/154

5/155 Um cabo pesando 40 newtons por metro de comprimento está suspenso do ponto A e passa pela pequena polia em B. Determine a massa m do cilindro preso ao cabo, que vai produzir uma deflexão de 10 m. Devido à pequena razão deflexão/vão, a aproximação de um cabo parabólico pode ser usada.

Resp. $m = 480$ kg

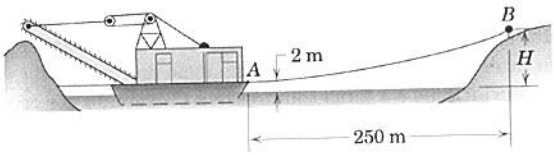


Problema 5/155

***5/156** Repita o Prob. 5/155, mas não use a aproximação de um cabo parabólico. Compare seus resultados com as resposta dada para o Prob. 5/155.

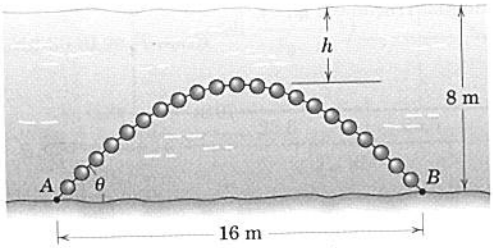
5/157 Uma draga está ancorada em uma posição fixa por um único cabo-guia, que tem uma direção horizontal na fixação em A e percorre uma distância horizontal de 250 m até um ponto de ancoragem B em terra. Uma força trativa de 300 kN é requerida no cabo em A. Se o cabo tem uma massa de 22 kg por metro de seu comprimento, calcule a altura H, acima do nível do mar, necessária para a ancoragem e ache o comprimento s do cabo entre A e B.

Resp. $H = 24{,}5$ m, $s = 251$ m



Problema 5/157

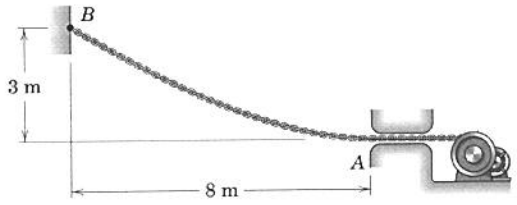
***5/158** Diversas bóias esféricas estão igualmente espaçadas e rigidamente presas a um cabo flexível de 20 m de comprimento. As extremidades A e B estão ancoradas a 16 m de distância no fundo de um lago de água doce, a uma profundidade de 8 m. As bóias e o cabo têm um peso combinado de 100 N por metro de comprimento do cabo e a flutuação delas na água produz uma força direcionada para cima de 560 N por metro de comprimento do cabo. Calcule a profundidade h abaixo da superfície, do topo da linha de bóias. Ache, também, o ângulo θ feito pela linha de bóias com a horizontal em A.



Problema 5/158

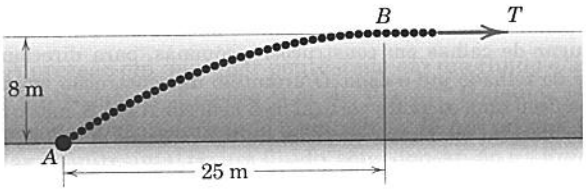
***5/159** Determine o comprimento necessário L da corrente entre A e B, e a força trativa correspondente em A, se a inclinação da corrente for horizontal quando ele entra na guia em A. O peso da corrente vale 140 N por metro de seu comprimento.

Resp. $L = 8{,}71$ m, $T_A = 1559$ N



Problema 5/159

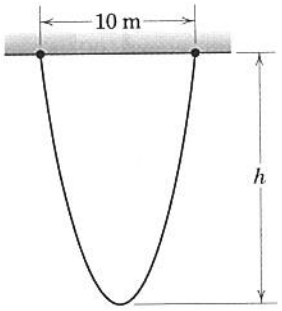
*5/160 Muitos pequenos dispositivos de flutuação estão presos a um cabo e a diferença entre a flutuação e o peso resulta em uma força direcionada para cima de 30 newtons por metro do comprimento do cabo. Determine a força T que deve ser aplicada para impor ao cabo a configuração mostrada.



Problema 5/160

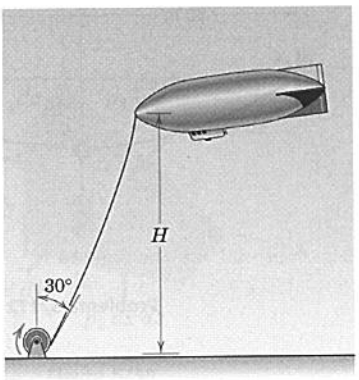
*5/161 Uma corda de 40 m de comprimento está suspensa entre dois pontos que estão separados por uma distância horizontal de 10 m. Calcule a distância h até o ponto mais baixo da corda.

Resp. $h = 18{,}53$ m



Problema 5/161

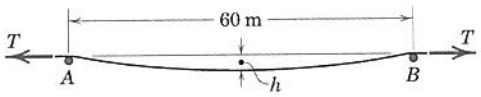
5/162 Sob vento fraco, o dirigível está amarrado ao guincho no solo por 100 m de um cabo de 12 mm, que tem uma massa de 0,51 kg/m. Um torque de 400 N · m no tambor é necessário para iniciar o enrolamento do cabo. Nessa condição, o cabo faz um ângulo de 30° com a vertical à medida que ele se aproxima do guincho. Calcule a altura H do dirigível. O diâmetro do tambor do guincho é de 0,5 m.



Problema 5/162

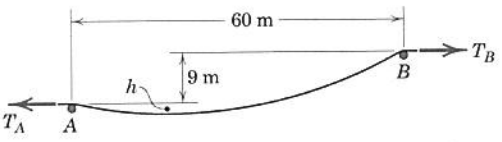
*5/163 Uma equipe de instalação de cabos quer estabelecer a dependência da força de tração T com a deflexão h do cabo. Faça um gráfico tanto da força trativa mínima T_0 quanto da força trativa T nos apoios A e B em função de h, para $1 \leq h \leq 10$ m. A massa do cabo, por unidade de comprimento, vale 3 kg/m. Determine os valores de T_0 e de T para $h = 2$ m.

Resp. $T_0 = 6630$ N, $T = 6690$ N



Problema 5/163

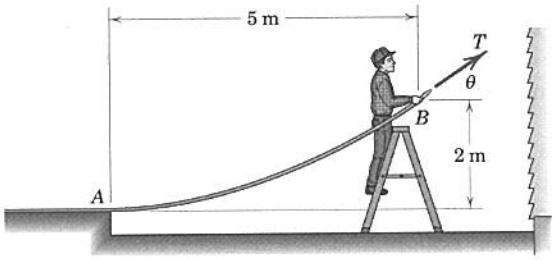
*5/164 O cabo do Prob. 5/163 foi agora colocado sobre os suportes A e B, cuja elevação difere de 9 m, como mostrado. Faça um gráfico da força trativa mínima T_0, da força trativa T_A no apoio A e da força trativa T_B no apoio B em função de h, para $1 \leq h \leq 10$ m, onde h é a deflexão abaixo do ponto A. Determine os três valores de força para $h = 2$ m e compare com os resultados do Prob. 5/163. A massa do cabo, por unidade de comprimento, vale 3 kg/m.



Problema 5/164

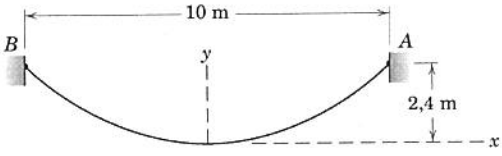
*5/165 Ao se preparar para limpar uma parede com um jato de água, uma pessoa segura a mangueira conforme mostrado na figura. A mangueira está na horizontal em A e tem uma massa de 0,75 kg/m quando está vazia e de 1,25 kg/m quando está cheia de água. Determine a força de tração T e o ângulo θ necessários para a mangueira vazia e para a mangueira cheia.

Resp. $T = 63{,}0$ N (vazia), $T = 105{,}0$ N (cheia)
$\theta = 40{,}0°$ em ambos os casos



Problema 5/165

*5/166 Um determinado comprimento de um cabo, que tem uma massa de 1,2 kg/m, deve ter uma deflexão de 2,4 m quando estiver suspenso entre dois pontos A e B distando 10 m sobre a mesma linha horizontal. Para efeito de comparações, determine o comprimento L do cabo necessário e faça um gráfico de sua configuração para os dois casos: (a) considerando uma forma parabólica e (b) usando o modelo



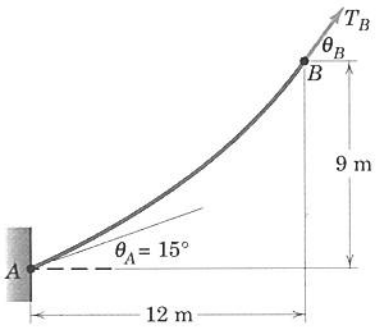
Problema 5/166

de catenária apropriado. A fim de distinguir mais claramente entre os dois casos, faça também o gráfico da diferença $(y_C - y_P)$ em função de x, onde C e P se referem à catenária e à parábola, respectivamente.

***5/167** Uma linha de transmissão está suspensa entre duas torres distando de 200 m sobre uma mesma linha horizontal. O cabo tem uma massa de 18,2 kg por metro de comprimento e tem uma deflexão de 32 m no seu ponto médio. Se o cabo pode suportar uma força trativa máxima de 60 kN, determine a massa ρ de gelo, por metro, que pode se formar sobre o cabo sem exceder a máxima força trativa do cabo.

Resp. $\rho = 13{,}44$ kg de gelo por metro

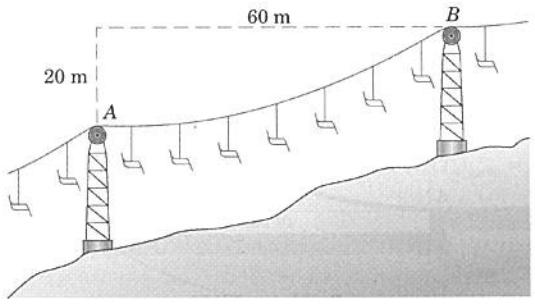
***5/168** Um cabo que tem uma massa de 0,5 kg por metro de comprimento está preso ao ponto A. Uma força trativa T_B é aplicada ao ponto B, fazendo com que o ângulo θ_A valha 15°. Determine T_B e θ_B.



Problema 5/168

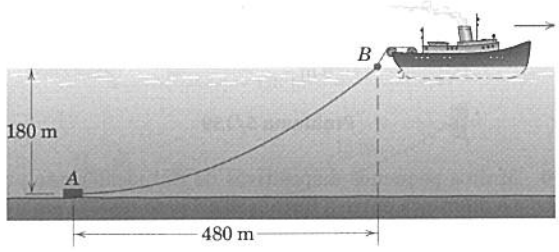
***5/169** O cabo móvel para o teleférico de uma rampa de esqui tem uma massa de 10 kg/m e suporta cadeiras e passageiros igualmente espaçados, cuja massa extra é de 20 kg/m quando se faz uma média sobre todo o comprimento do cabo. O cabo puxa horizontalmente a partir da roda-guia de sustentação em A. Calcule as forças trativas no cabo em A e B e o comprimento s do cabo entre A e B.

Resp. $T_A = 27{,}4$ kN, $T_B = 33{,}3$ kN, $s = 64{,}2$ m



Problema 5/169

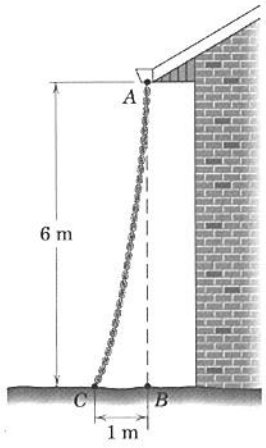
***5/170** Um navio lançador de cabos submarinos reboca um equipamento para abrir valas A, durante uma inspeção do leito submarino, para a posterior colocação de um cabo telefônico. O navio mantém uma velocidade reduzida constante, com o equipamento em uma profundidade de 180 m e com um comprimento suficiente de cabo, de modo que o cabo sai horizontalmente do equipamento para abrir valas, o qual está 480 m atrás do navio. O cabo de reboque tem um peso efetivo de 45,2 N/m quando a flutuabilidade na água é levada em consideração. As forças sobre o cabo devido ao movimento através da água são desprezadas sob velocidade reduzida. Calcule a força horizontal T_0 aplicada ao equipamento de abrir valas e a máxima força trativa no cabo. Ache, também, o comprimento do cabo de reboque do ponto A até o ponto B.



Problema 5/170

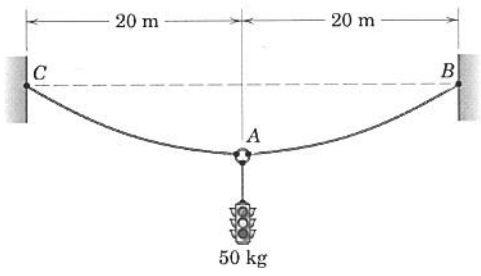
***5/171** Por razões estéticas, correntes são algumas vezes usadas no lugar de calhas em construções pequenas, para direcionar a água do telhado até o chão. O arquiteto da construção mostrada especificou uma corrente vertical de 6 m desde A até B, mas o construtor decidiu usar uma corrente de 6,1 m desde A até C, como mostrado, para afastar mais a água da estrutura. De qual porcentagem n o construtor aumentou o módulo da força exercida na calha em A em relação à proposta pelo arquiteto? A corrente pesa 100 N por metro de seu comprimento.

Resp. $n = 29{,}0\%$



Problema 5/171

***5/172** Um sinal de trânsito está suspenso por dois cabos de 21 m de comprimento, que têm uma massa de 1,2 kg por metro. Determine a deflexão vertical δ do anel de junção A relativamente a sua posição antes do sinal ser colocado.



Problema 5/172

5/9 Fluido-Estática

Até agora neste capítulo tratamos a ação de forças sobre e entre corpos *sólidos*. Nesta seção consideramos o equilíbrio de corpos submetidos a forças devidas à pressão de fluidos. Um *fluido* é qualquer substância contínua que, quando em repouso, é incapaz de sustentar força cisalhante. Uma força cisalhante é tangente à superfície sobre a qual ela atua e é desenvolvida quando velocidades diferentes existem entre camadas adjacentes de fluidos. Assim sendo, um fluido em repouso pode exercer apenas forças normais sobre uma superfície de contato. Fluidos podem ser tanto gasosos quanto líquidos. A estática de fluidos é geralmente chamada *hidrostática*, quando o fluido é um líquido e *aerostática* quando o fluido é um gás.

Pressão de um Fluido

A pressão em qualquer ponto dado em um fluido é a mesma em todas as direções (Lei de Pascal). Podemos provar esse conceito considerando o equilíbrio de um prisma triangular infinitesimal de um fluido, como mostrado na Fig. 5/30. As pressões do fluido normais às faces do elemento são p_1, p_2, p_3 e p_4, como mostrado. Como força é igual à pressão vezes a área, o equilíbrio de forças nas direções x e y é

$$p_1\,dy\,dz = p_3\,ds\,dz\,\text{sen}\,\theta \qquad p_2\,dx\,dz = p_3\,ds\,dz\cos\theta$$

Como $ds\,\text{sen}\,\theta = dy$ e $ds\cos\theta = dx$, essas equações requerem que

$$p_1 = p_2 = p_3 = p$$

Girando o elemento de 90°, vemos que p_4 também é igual às outras pressões. Assim, a pressão em qualquer ponto em um fluido em repouso é a mesma em todas as direções. Nessa análise não precisamos considerar o peso do elemento de fluido, porque quando o peso por unidade de volume (massa específica ρ vezes g) é multiplicado pelo volume do elemento, resulta em uma quantidade diferencial de terceira ordem que desaparece no limite, se comparada com os termos de segunda ordem, de pressão e força.

Em todos os fluidos em repouso a pressão é uma função da dimensão vertical. Para determinar essa função, consideramos as forças agindo em um elemento diferencial de uma coluna vertical de fluido com seção transversal dA, como mostrado na Fig. 5/31. A direção positiva da medida vertical h é considerada direcionada para baixo. A pressão sobre a face

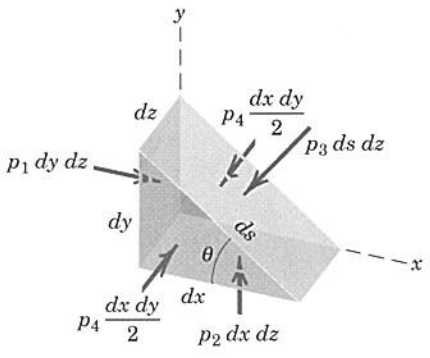


Figura 5/30

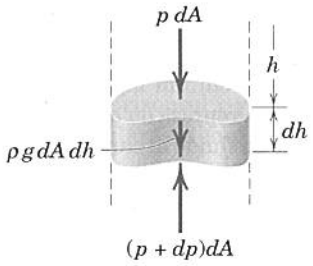


Figura 5/31

superior é p e aquela sobre a face inferior é p mais a variação em p, ou $p + dp$. O peso do elemento iguala ρg multiplicado por seu volume. As forças normais sobre a superfície lateral, que são horizontais e não afetam o equilíbrio de forças na direção vertical, não estão mostradas. O equilíbrio do elemento de fluido na direção h requer

$$p\,dA + \rho g\,dA\,dh - (p + dp)\,dA = 0$$

$$dp = \rho g\,dh \qquad \textbf{(5/23)}$$

Essa relação diferencial mostra que a pressão em um fluido aumenta com a profundidade ou decresce com o aumento da altura. A Eq. 5/23 é válida tanto para líquidos quanto para gases e concorda com nossas observações comuns das pressões do ar e da água.

Fluidos que são essencialmente incompressíveis são chamados *líquidos* e, para a maioria dos propósitos práticos, podemos considerar sua massa específica ρ constante em cada parte do líquido*. Com ρ constante, a integração da Eq. 5/23 dá

$$\boxed{p = p_0 + \rho gh} \qquad \textbf{(5/24)}$$

A pressão p_0 é a pressão na superfície do líquido, onde $h = 0$. Se p_0 é devido à pressão atmosférica e o instrumento de medida registra apenas o incremento acima da pressão atmosférica†, a medição fornece o que é chamado de *pressão manométrica*. Ela é calculada como $p = \rho gh$.

A unidade comum de pressão em unidades SI é o quilopascal (kPa), que equivale ao quilonewton por metro quadrado (10^3 N/m^2). Ao calcular a pressão, se usamos Mg/m^3 para ρ, m/s^2 para g e m para h, então, o produto ρgh nos dá a pressão diretamente em kPa. Por exemplo, a pressão em uma profundidade de 10 m em água doce é

$$p = \rho gh = \left(1{,}0\,\frac{\text{Mg}}{\text{m}^3}\right)\left(9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{ m}) = 98{,}1\left(10^3\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}\,\frac{1}{\text{m}^2}\right)$$

$$= 98{,}1\text{ kN/m}^2 = 98{,}1\text{ kPa}$$

Em unidades SI do sistema gravitacional, teríamos para uma profundidade de 10 m:

$$p = \rho gh = \left(62{,}4\,\frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}\right)\left(\frac{1}{1728}\,\frac{\text{ft}^3}{\text{in}^3}\right)(120\text{ in}) = 4{,}33\text{ lb/in}^2$$

*Veja a Tabela D/1, Apêndice D, para uma lista de massas específicas e de pesos específicos.

†A pressão atmosférica ao nível do mar pode ser considerada como 101,3 kPa ou 14,7 psi².

Pressão Hidrostática em Superfícies Retangulares Submersas

Um corpo submerso em um líquido, tal como a válvula de uma comporta em uma represa ou a parede de um tanque, está submetido à pressão do fluido atuando normal a sua superfície e distribuída sobre sua área. Em problemas onde as forças do fluido são apreciáveis, devemos determinar a força resultante devida à distribuição de pressão sobre a superfície e a posição na qual essa resultante atua. Para sistemas abertos para a atmosfera, a pressão atmosférica p_0 atua sobre todas as superfícies e, assim, origina uma resultante nula. Em tais casos, então, precisamos considerar apenas a pressão manométrica $p = \rho gh$, que é o incremento acima da pressão atmosférica.

Considere o caso especial, porém comum, da ação da pressão hidrostática sobre a superfície de uma placa retangular submersa em um líquido. A Fig. 5/32*a* mostra uma placa 1-2-3-4 com sua aresta superior horizontal e com o plano da placa fazendo um ângulo θ arbitrário com o plano vertical. A superfície horizontal do líquido é representada pelo plano x-y'. A pressão do fluido (manométrica) atuando normal à placa no ponto 2 está representada pela flecha 6-2 e é igual a ρg vezes a distância vertical desde a superfície do líquido até o ponto 2. Essa mesma pressão atua em todos os pontos ao longo da aresta 2-3. No ponto 1 na aresta inferior, a pressão do fluido é igual a ρg vezes a profundidade do ponto 1 e essa pressão é a mesma em todos os pontos ao longo da aresta 1-4. A variação da pressão p sobre a área da placa é governada pela relação linear da profundidade e, portanto, ela é representada pela flecha p, mostrada na Fig. 5/32*b*, que varia linearmente desde o valor 6-2 até o valor 5-1. A força resultante produzida por essa distribuição de pressão é representada por R, que atua em algum ponto P, chamado de *centro de pressão*.

As condições que prevalecem na seção vertical 1-2-6-5 na Fig. 5/32*a* são idênticas àquelas na seção 4-3-7-8 e nas demais seções verticais normais à placa. Assim, podemos analisar o problema a partir da vista bidimensional de uma seção vertical, como mostrado na Fig. 5/32*b* para a seção 1-2-6-5. Para essa seção, a distribuição de pressão é trapezoidal. Se b é a dimensão horizontal da placa medida normal ao plano da figura (dimensão 2-3 na Fig. 5/32*a*), um elemento de área da placa, sobre o qual a pressão $p = \rho gh$ atua, é $dA = b\,dy$ e um incremento da força resultante é $dR = p\,dA = bp\,dy$. Mas $p\,dy$ é simplesmente o incremento sombreado da área trapezoidal dA', de modo que $dR = b\,dA'$. Podemos, desse modo, expressar a força resultante atuando sobre toda a placa como a área trapezoidal 1-2-6-5 vezes a largura b da placa,

$$R = b \int dA' = bA'$$

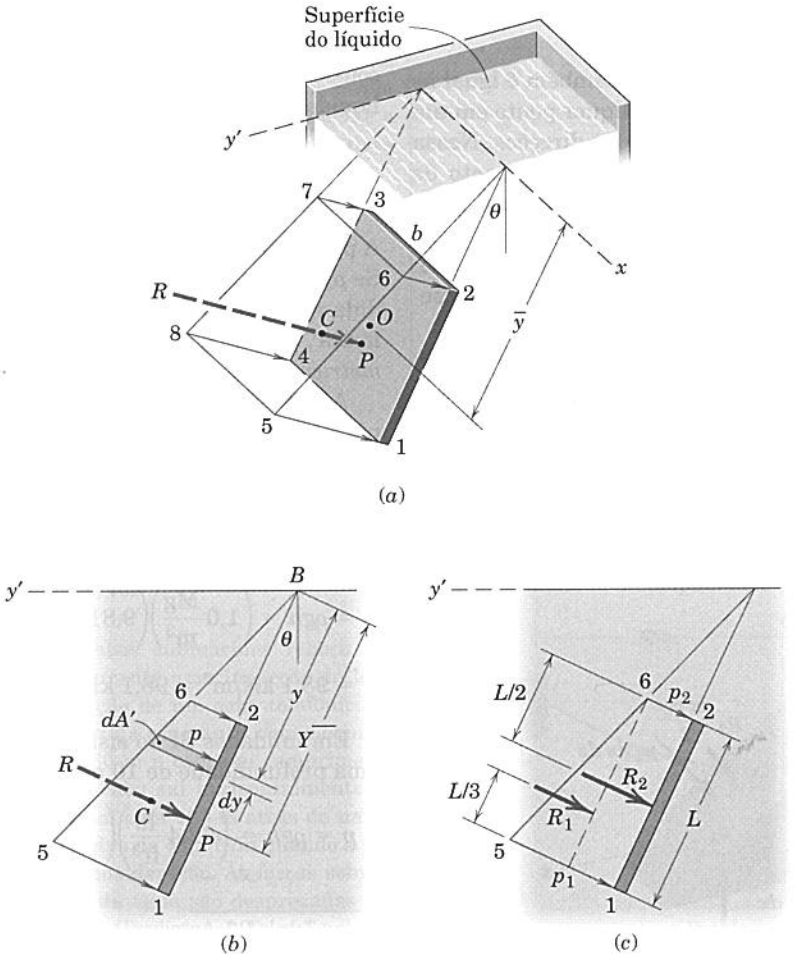


Figura 5/32

Tenha cuidado para não confundir a área física A da placa com a área geométrica A' definida pela distribuição trapezoidal de pressão.

A área trapezoidal representando a distribuição de pressão é facilmente dada usando sua altura média. A força resultante R pode, desse modo, ser escrita em termos da pressão média $p_{méd} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ vezes a área da placa A. A pressão média é também a pressão que existe na profundidade média, medida até o centróide O da placa. Uma expressão alternativa para R é, portanto,

$$R = p_{méd}A = \rho g\bar{h}A$$

onde $\bar{h} = \bar{y}\cos\theta$.

Obtemos a linha de ação da força resultante R a partir do princípio dos momentos. Usando o eixo x (o ponto B na Fig. 5/32*b*) como o eixo dos momentos resulta em $R\bar{Y} = \int y(pb\,dy)$. Substituindo $p\,dy = dA'$ e $R = bA'$ e cancelando b obtém-se

$$\bar{Y} = \frac{\int y\,dA'}{\int dA'}$$

que é simplesmente a expressão para a coordenada do centróide da área trapezoidal A'. Desse modo, na vista bidimensional, a resultante R passa pelo centróide C da área trapezoidal definida pela distribuição de pressão na seção vertical. Claramente, $\bar{y}$ também localiza o centróide C do prisma truncado 1-2-3-4-5-6-7-8 na Fig. 5/32*a*, pelo qual passa a resultante.

Para uma distribuição trapezoidal de pressão, podemos simplificar os cálculos dividindo o trapézio em um retângulo e um triângulo, Fig. 5/32*c*, e considerando separadamente a força representada por cada parte. A força representada pela porção retangular atua no centro O da placa e vale $R_2 = p_2A$, onde A é a área 1-2-3-4 da placa. A força R_1, representada pelo incremento triangular da distribuição de pressão, vale $\frac{1}{2}(p_1 - p_2)A$ e atua no centróide da parte triangular mostrada.

Pressão Hidrostática em Superfícies Cilíndricas

A determinação da resultante R devida à pressão distribuída sobre uma superfície curva submersa envolve mais cálculos do que a determinação para uma superfície plana. Por exemplo, considere a superfície cilíndrica submersa mostrada na Fig. 5/33*a* onde os elementos da superfície curva são paralelos à superfície horizontal x-y' do líquido. Todas as seções verticais perpendiculares à superfície apresentam a mesma curva AB e a mesma distribuição de pressão. Assim, a representação bidimensional na Fig. 5/33*b* pode ser usada. Para achar R por integração direta precisamos integrar as componentes x e y de dR ao longo da curva AB, pois dR muda de direção continuamente. Assim,

$$R_x = b\int (p\,dL)_x = b\int p\,dy \quad \text{e} \quad R_y = b\int (p\,dL)_y = b\int p\,dx$$

Uma equação de momentos seria necessária agora se desejássemos estabelecer a posição de R.

Um segundo método para achar R é normalmente muito mais simples. Considere o equilíbrio do bloco de líquido ABC diretamente acima da superfície, mostrado na Fig. 5/33*c*. A resultante R aparece, então, como a reação igual e oposta da superfície sobre o bloco de líquido. As resultantes das pressões ao longo de AC e CB são P_y e P_x, respectivamente, e são facilmente obtidas. O peso W do bloco de líquido é calculado a partir da área ABC de sua seção, multiplicada pela dimensão constante b e por ρg. O peso W passa pelo centróide da área ABC. A força de equilíbrio R é, então, completamente determinada a partir das equações de equilíbrio que aplicamos ao diagrama de corpo livre do bloco de fluido.

Pressão Hidrostática em Superfícies Planas de Qualquer Forma

A Fig. 5/34*a* mostra uma placa plana, com uma forma qualquer, submersa em um líquido. A superfície horizontal do líquido é o plano x-y' e o plano da placa faz um ângulo θ com a vertical. A força atuando em uma faixa diferencial de área dA, paralela à superfície do líquido, é $dR = p\,dA = \rho gh\,dA$. A pressão p tem o mesmo módulo por todo o comprimento da faixa, pois não existe mudança da profundidade ao longo da faixa. Obtemos a força total agindo sobre a área exposta A por integração, obtendo

$$R = \int dR = \int p\,dA = \rho g\int h\,dA$$

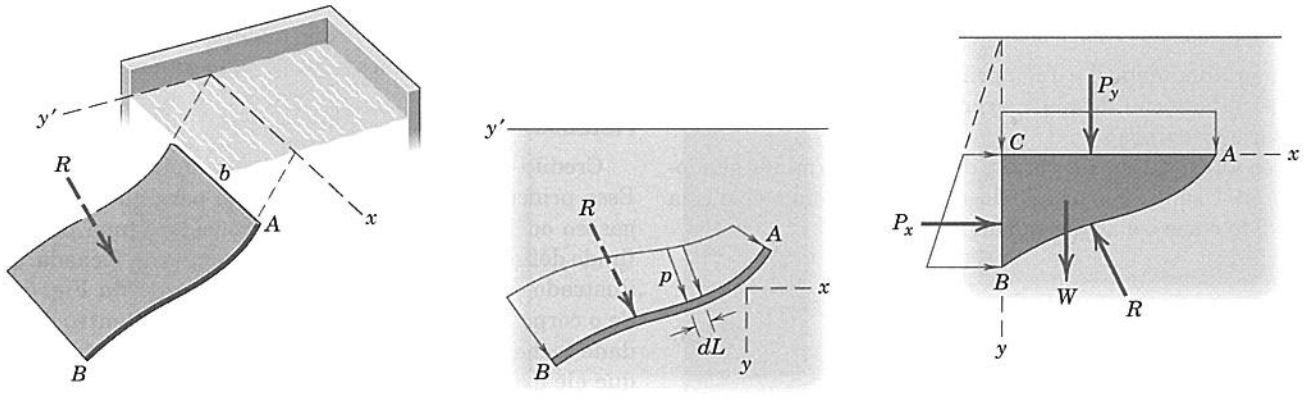
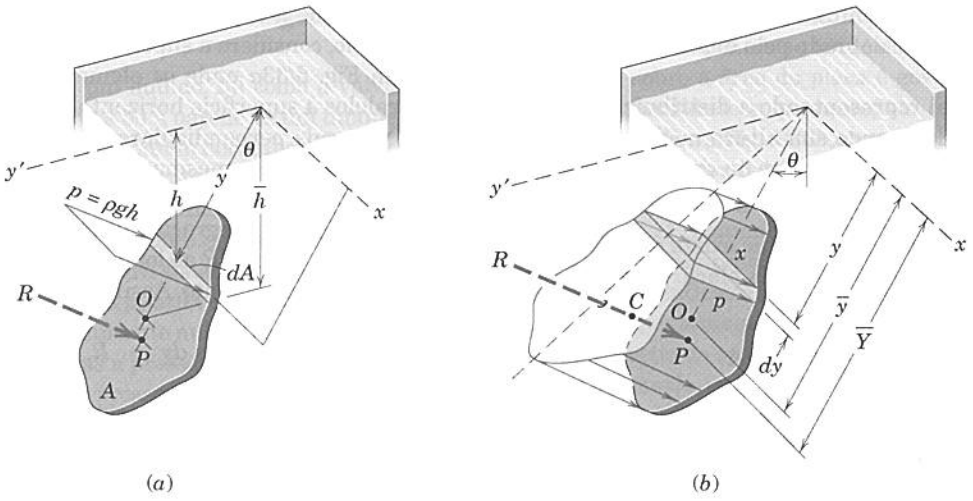


Figura 5/33



(a) (b)

Figura 5/34

Substituindo a relação do centróide $\bar{h}A = \int h\, dA$ obtém-se

$$R = \rho g \bar{h} A \qquad \textbf{(5/25)}$$

A quantidade $\rho g\bar{h}$ é a pressão que existe na profundidade do centróide O da área e é a pressão média sobre a área.

Podemos representar também a resultante R geometricamente, pelo volume V' da figura mostrada na Fig. 5/34*b*. Nesse caso, a pressão do fluido p é representada como uma dimensão normal à placa, tomada como uma base. Vemos que o volume resultante é um cilindro truncado. A força dR agindo na área diferencial $dA = x\, dy$ é representada pelo volume elementar $p\, dA$ mostrado pela faixa sombreada e a força total é representada pelo volume total do cilindro. Vemos da Eq. 5/25 que a profundidade média do cilindro truncado é a pressão média $\rho g\bar{h}$ que existe na profundidade correspondente ao centróide O da área exposta à pressão.

Para problemas onde o centróide O ou o volume V' não são aparentes imediatamente, uma integração direta pode ser feita para obter R. Assim,

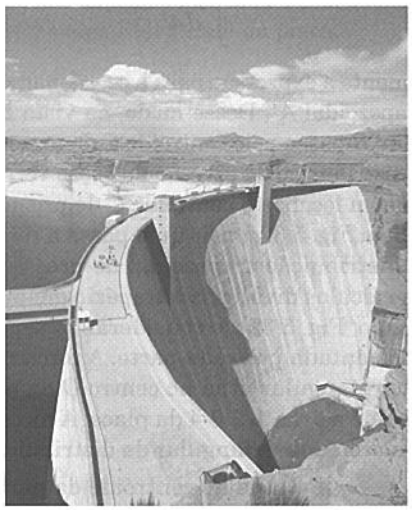
$$R = \int dR = \int p\, dA = \int \rho g h x\, dy$$

onde a profundidade h e o comprimento x da faixa horizontal de área diferencial deve ser expressa em termos de y para realizar a integração.

Após a resultante ser obtida, devemos determinar sua localização. Usando o princípio dos momentos, com o eixo x da Fig. 5/34*b* como o eixo dos momentos, obtemos

$$R\bar{Y} = \int y\, dR \qquad \text{ou} \qquad \bar{Y} = \frac{\int y(px\, dy)}{\int px\, dy} \qquad \textbf{(5/26)}$$

Essa segunda relação satisfaz a definição da coordenada $\bar{Y}$ ao centróide do volume V' do cilindro truncado da área de pressão. Concluímos, deste modo, que a resultante R passa pelo centróide C do volume descrito, tendo a área da placa como base e a pressão com variação linear como a coordenada perpendicular. O ponto P no qual R é aplicado à placa é o centro de pressão. Observe que o centro de pressão P e o centróide O da área da placa *não* são os mesmos.


© Angelo Cavalli/The Image Bank/Getty Images

Represa Glen Canyon em Lake Powell, Arizona.

Flutuabilidade

Credita-se o *princípio da flutuabilidade* a Arquimedes. Esse princípio é facilmente explicado para qualquer fluido, gasoso ou líquido, em equilíbrio. Considere uma porção de fluido definida por uma superfície imaginária fechada, como ilustrado pelo contorno irregular tracejado na Fig. 5/35*a*. Se o corpo do fluido pudesse ser sugado de dentro da cavidade fechada e substituído simultaneamente pelas forças que ele exerce no contorno da cavidade, Fig. 5/35*b*, o equilíbrio do fluido em volta não seria perturbado. Além disto, um diagrama de corpo livre da porção do fluido antes de sua remoção, Fig. 5/35*c*, mostra que a resultante das for-

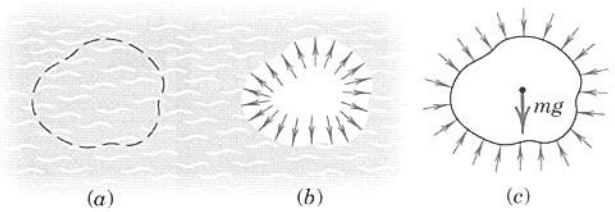


Figura 5/35

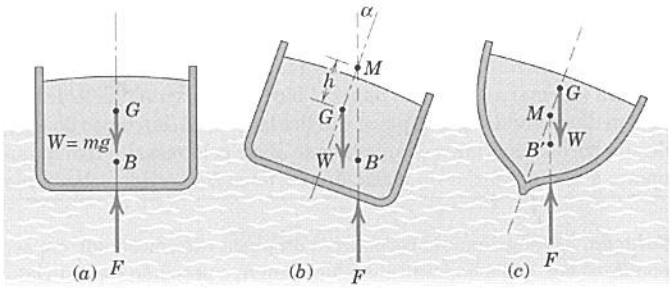


Figura 5/36

ças devidas à pressão, distribuídas sobre sua superfície deve ser igual e oposta a seu peso mg e deve passar pelo centro de massa do elemento de fluido. Se substituirmos o elemento de fluido por um corpo de mesmas dimensões, as forças superficiais atuando sobre o corpo mantido nessa posição serão idênticas àquelas agindo no elemento de fluido. Assim, a força resultante exercida sobre a superfície de um objeto imerso em um fluido é igual e oposta ao peso de fluido deslocado e passa pelo centro de massa do fluido deslocado. Essa resultante de força é chamada força de *flutuação*.

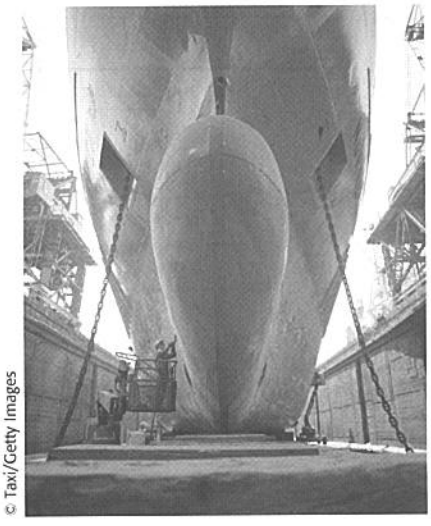
$$F = \rho g V \qquad \textbf{(5/27)}$$

onde ρ é a massa específica do fluido, g é a aceleração devida à gravidade e V é o volume do fluido deslocado. No caso de um líquido cuja massa específica seja constante, o centro de massa do líquido deslocado coincide com o centróide do volume deslocado.

Assim, quando a massa específica de um objeto for menor do que a massa específica do fluido no qual ele está totalmente imerso, existe um desequilíbrio de força na direção vertical e o objeto sobe. Quando o fluido é um líquido, o objeto continua a subir até que ele atinja a superfície do líquido e então fique em repouso em uma posição de equilíbrio, considerando-se que a massa específica do novo fluido acima da superfície seja menor do que a massa específica do objeto. No caso da superfície de contorno entre um líquido e um gás, tal como entre a água e o ar, o efeito da pressão do gás sobre a porção do objeto que flutua acima do líquido é equilibrada pela pressão imposta no líquido devida à ação do gás sobre sua superfície.

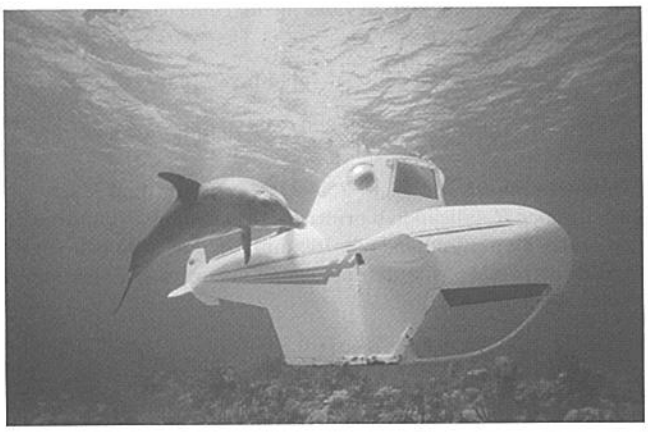
Um problema importante envolvendo flutuação é a determinação da estabilidade de um objeto que flutua, tal como o casco de um navio, mostrado em seção transversal e aprumado na Fig. 5/36*a*. O ponto B é o centróide do volume deslocado e é chamado *centro de flutuação*. A resultante de forças exercida sobre o casco pela pressão da água é a força de flutuação F, que passa por B e é igual e oposta ao peso W do navio. Se o navio for forçado a adernar de um ângulo α, Fig. 5/36*b*, a forma do volume deslocado muda e o centro de flutuação muda para B'.

O ponto de interseção da linha vertical que passa por B' com a linha de centro do navio é chamado de *metacentro* M, e a distância h de M a partir do centro de massa G é chamada de *altura metacêntrica*. Para a maioria das formas de cascos h permanece praticamente constante para ângulos de adernagem de até 20°. Quando M está acima de G, como na Fig. 5/36*b*, existe um momento de correção que tende a trazer o navio de volta a sua posição aprumada. Se M está abaixo de G, como para o casco da Fig. 5/36*c*, o momento que acompanha a adernagem atua na direção de aumentá-la. Essa é, claramente, uma condição de instabilidade e deve ser evitada no projeto de qualquer navio.



© Taxi/Getty Images

O projeto de cascos de navios deve levar em consideração a dinâmica dos fluidos, bem como a fluidoestática.

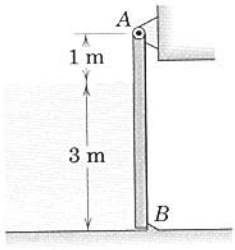


© Cousteau Society/The Image Bank/Getty Images

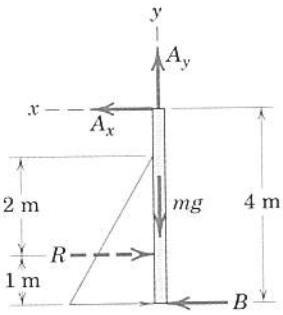
Submarinos devem ser projetados tendo em conta a presença de pressões externas extremamente elevadas.

Exemplo 5/18

Uma placa retangular AB, mostrada em seção vertical, tem 4 m de altura e 6 m de largura (normal ao plano do papel) e bloqueia a extremidade de um canal de água doce de 3 m de profundidade. A placa é articulada em A, em torno do eixo horizontal ao longo de sua borda superior, e é impedida de abrir pelo ressalto fixo B, que escora horizontalmente a borda inferior da placa. Ache a força B exercida sobre a placa pelo ressalto.



Solução. O diagrama de corpo livre da placa está mostrado em seção e inclui as componentes vertical e horizontal da força em A, o peso não especificado da placa ($W = mg$), a força horizontal incógnita B e a resultante R da distribuição triangular de pressão contra a face vertical.



A massa específica da água doce é $\rho = 1{,}000$ Mg/m^3, de modo que a pressão média é

① $[p_{\text{méd}} = \rho g\bar{h}]$ $\quad p_{\text{méd}} = 1{,}000(9{,}81)(\frac{3}{2}) = 14{,}72$ kPa

A resultante R das forças devidas à pressão contra a placa será

$[R = p_{\text{méd}}A]$ $\quad R = (14{,}72)(3)(6) = 265$ kN

Essa força atua através do centróide da distribuição triangular de pressão, que está 1 m acima do fundo da placa. Um somatório de momentos nulo em relação a A estabelece a força incógnita B. Assim,

$[\Sigma M_A = 0]$ $\quad 3(265) - 4B = 0$ $\quad B = 198{,}7$ kN *Resp.*

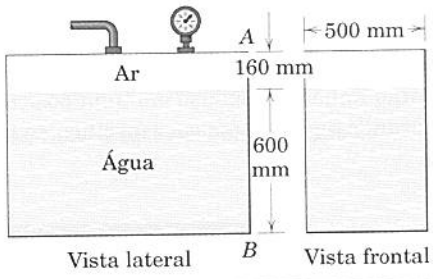
Sugestão Útil

① Observe que as unidades de pressão ρgh são

$$\left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\text{m}) = \left(10^3 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{1}{\text{m}^2}\right) = \text{kN/m}^2 = \text{kPa}.$$

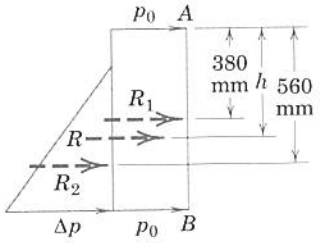
Exemplo 5/19

O espaço de ar no tanque fechado de água doce é mantido sob uma pressão de 5,5 kPa (acima da pressão atmosférica). Determine a força resultante R exercida pelo ar e pela água sobre a lateral do tanque.



Solução. A distribuição de pressão sobre a superfície lateral é mostrada, onde $p_0 = 5{,}5$ kPa. O peso específico da água doce é $\mu = \rho g = 1000(9{,}81) = 9{,}81$ kN/m^3, de modo que o incremento de pressão Δp devido à água é

$$\Delta p = \mu\, \Delta h = 9{,}81(0{,}6) = 5{,}89 \text{ kPa}$$



① As forças resultantes R_1 e R_2 devidas às distribuições de pressão retangular e triangular, respectivamente, são

$$R_1 = p_0 A_1 = 5{,}5(0{,}760)(0{,}5) = 2{,}09 \text{ kN}$$

$$R_2 = \Delta p_{\text{méd}} A_2 = \frac{5{,}89}{2}(0{,}6)(0{,}5) = 0{,}883 \text{ kN}$$

A resultante é, então, $R = R_1 + R_2 = 2{,}09 + 0{,}883 = 2{,}97$ kN. *Resp.*

Localizamos R aplicando o princípio dos momentos em torno de A, notando que R_1 age no centro da profundidade de 760 mm e que R_2 atua pelo centróide da distribuição triangular de pressão, 400 mm abaixo da superfície da água e 400 + 160 = 560 mm abaixo de A. Assim,

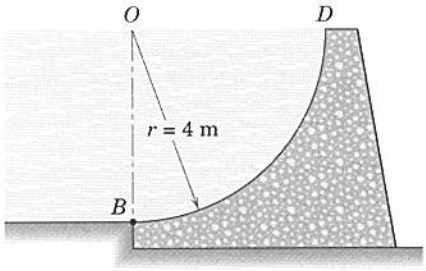
$[Rh = \Sigma M_A]$ $\quad 2{,}97h = 2{,}09(380) + 0{,}833(560)$ $\quad h = 433$ mm *Resp.*

Sugestão Útil

① A divisão da distribuição de pressão nessas duas partes é, decididamente, o modo mais simples de fazer o cálculo.

Exemplo 5/20

Determine a força resultante R exercida pela água sobre a superfície cilíndrica da represa. A massa específica da água doce é 1,000 Mg/m³ e a represa tem um comprimento b, normal ao papel, de 30 m.



Solução. O bloco circular, BDO, de água é isolado e seu diagrama de corpo livre é construído. A força P_x é

① $$P_x = \rho g\bar{h}A = \frac{\rho g r}{2} br = \frac{(1{,}000)(9{,}81)(4)}{2}(30)(4) = 2350 \text{ kN}$$

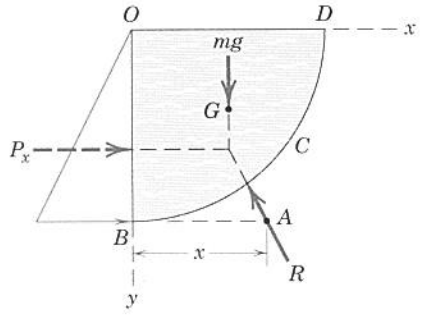
O peso W da água passa pelo centro de massa G da seção de quarto de círculo e vale

$$mg = \rho g V = (1{,}000)(9{,}81)\frac{\pi(4)^2}{4}(30) = 3700 \text{ kN}$$

O equilíbrio da seção de água requer

$[\Sigma F_x = 0]$ $\qquad R_x = P_x = 2350 \text{ kN}$

$[\Sigma F_y = 0]$ $\qquad R_y = mg = 3700 \text{ kN}$

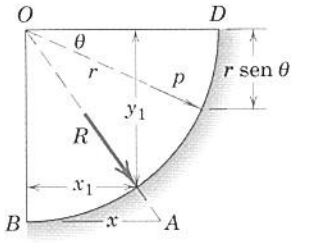


A força resultante R exercida pelo fluido sobre a represa é igual e oposta àquela mostrada atuando sobre o fluido e vale

$[R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}]$ $\qquad R = \sqrt{(2350)^2 + (3700)^2} = 4380 \text{ kN}$ *Resp.*

A coordenada x do ponto A através do qual R passa, pode ser encontrada a partir do princípio dos momentos. Usando B como o centro dos momentos tem-se

$$P_x\frac{r}{3} + mg\frac{4r}{3\pi} - R_x x = 0, x = \frac{2350\left(\frac{4}{3}\right) + 3700\left(\frac{16}{3\pi}\right)}{3700} = 2{,}55 \text{ m} \quad \textit{Resp.}$$



② ***Solução Alternativa.*** A força atuando sobre a superfície da represa pode ser obtida por integração direta dos componentes

$$dR_x = p\,dA\cos\theta \qquad \text{e} \qquad dR_y = p\,dA\,\text{sen}\,\theta$$

onde $p = \rho g h = \rho g r \,\text{sen}\,\theta$ e $dA = b(r\,d\theta)$. Assim,

$$R_x = \int_0^{\pi/2} \rho g r^2 b\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta = -\rho g r^2 b\left[\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}\rho g r^2 b$$

$$R_y = \int_0^{\pi/2} \rho g r^2 b\,\text{sen}^2\,\theta\,d\theta = \rho g r^2 b\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{4}\pi\rho g r^2 b$$

Logo, $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \frac{1}{2}\rho g r^2 b\sqrt{1 + \pi^2/4}$. Substituindo os valores numéricos tem-se

$$R = \tfrac{1}{2}(1{,}000)(9{,}81)(4^2)(30)\sqrt{1 + \pi^2/4} = 4380 \text{ kN} \quad \textit{Resp.}$$

Como dR sempre passa pelo ponto O, vemos que R também passa por O e, desse modo, os momentos de R_x e R_y em torno de O devem se cancelar. Assim, escrevemos $R_x y_1 = R_y x_1$, obtendo

$$x_1/y_1 = R_x/R_y = (\tfrac{1}{2}\rho g r^2 b)/(\tfrac{1}{4}\pi\rho g r^2 b) = 2/\pi$$

Por triângulos semelhantes vemos que

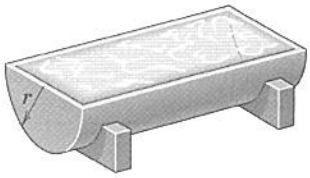
$$x/r = x_1/y_1 = 2/\pi \qquad \text{e} \qquad x = 2r/\pi = 2(4)/\pi = 2{,}55 \text{ m} \quad \textit{Resp.}$$

Sugestões Úteis

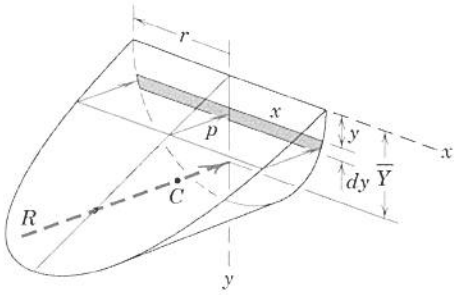
① Veja a nota no Exemplo 5/18, se existir qualquer dúvida sobre as unidades para $\rho g\bar{h}$.

② Esse enfoque por integração é factível nesse caso devido, principalmente, à geometria simples do arco circular.

Exemplo 5/21



Determine a força resultante R exercida sobre a extremidade semicircular do tanque de água mostrado na figura, se o tanque está totalmente cheio. Dê o resultado em termos do raio r e da massa específica da água ρ.



Solução I. Primeiramente vamos obter R por uma integração direta. Com a faixa horizontal de área $dA = 2x\,dy$ submetida à pressão $p = \rho g y$, o incremento da força resultante é $dR = p\,dA$, de modo que

$$R = \int p\,dA = \int \rho g y(2x\,dy) = 2\rho g \int_0^r y\sqrt{r^2 - y^2}\,dy$$

Integrando obtém-se $$R = \tfrac{2}{3}\rho g r^3 \qquad \textit{Resp.}$$

A localização de R é determinada usando o princípio dos momentos. Tomando momentos em relação ao eixo x tem-se

$$[R\overline{Y} = \int y\,dR] \qquad \tfrac{2}{3}\rho g r^3 \overline{Y} = 2\rho g \int_0^r y^2\sqrt{r^2 - y^2}\,dy$$

Integrando obtém-se $$\tfrac{2}{3}\rho g r^3 \overline{Y} = \frac{\rho g r^4}{4}\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \overline{Y} = \frac{3\pi r}{16} \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestão Útil

① Tenha muito cuidado para não cometer o erro de considerar que R passa pelo centróide da área sobre a qual a pressão atua.

Solução II. Podemos usar a Eq. 5/25 diretamente para achar R, onde a pressão média é $\rho g\bar{h}$ e $\bar{h}$ é a coordenada ao centróide da área sobre a qual atua a pressão. Para uma área semicircular $\bar{h} = 4r/(3\pi)$.

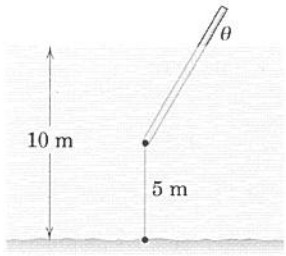
$$[R = \rho g \bar{h} A] \qquad R = \rho g \frac{4r}{3\pi}\frac{\pi r^2}{2} = \tfrac{2}{3}\rho g r^3 \qquad \textit{Resp.}$$

que é o volume da figura da área da pressão.

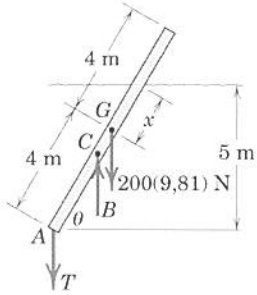
A resultante R atua pelo centróide C do volume definido pela figura da área da pressão.

① O cálculo da distância ao centróide $\overline{Y}$ envolve a mesma integral obtida na *Solução I*.

Exemplo 5/22



Uma bóia, na forma de um poste uniforme de 8 m com 0,2 m de diâmetro, tem uma massa de 200 kg e está presa em sua extremidade inferior ao fundo de um lago de água doce, por um cabo de 5 m. Se a profundidade da água é de 10 m, calcule o ângulo θ feito pelo poste com a horizontal.



Solução. O diagrama de corpo livre da bóia mostra seu peso atuando por G, a força trativa vertical T no cabo de ancoragem e a força de flutuação B que passa pelo centróide C da parte submersa da bóia. Seja x a distância desde G até a superfície da água. A massa específica da água doce é $\rho = 10^3$ kg/m^3, de modo que a força de flutuação é

$$[B = \rho g V] \qquad B = 10^3(9{,}81)\pi(0{,}1)^2(4 + x)\ \text{N}$$

O equilíbrio de momentos, $\Sigma M_A = 0$, em torno de A dá

$$200(9{,}81)(4\cos\theta) - [10^3(9{,}81)\pi(0{,}1)^2(4 + x)]\frac{4 + x}{2}\cos\theta = 0$$

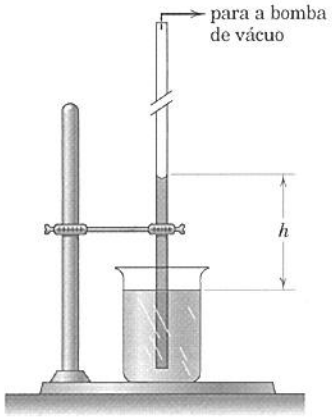
Assim, $$x = 3{,}14\ \text{m} \quad \text{e} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{5}{4 + 3{,}14}\right) = 44{,}5° \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

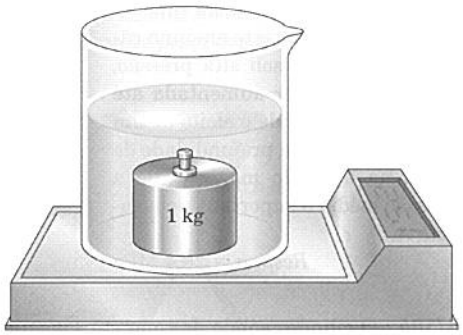
5/173 Determine a altura máxima h até a qual a bomba de vácuo pode fazer a água doce subir. Considere que a pressão atmosférica-padrão vale $1{,}0133(10^5)$ Pa. Repita os cálculos para o mercúrio.

Resp. $h = 10{,}33$ m (água)
$h = 0{,}761$ m (mercúrio)



Problema 5/173

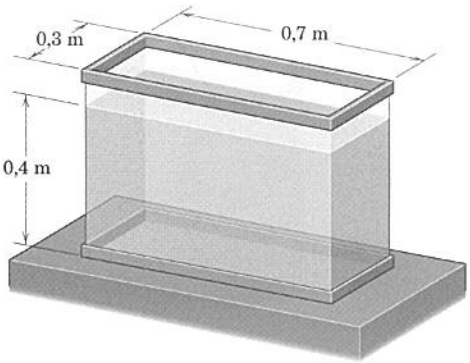
5/174 Um béquer com água doce está em uma balança quando o peso de aço inoxidável de 1 kg é colocado no béquer. Qual é a força normal que o peso exerce sobre o fundo do béquer? De quanto aumenta a leitura da balança, quando o peso é adicionado? Explique a sua resposta.



Problema 5/174

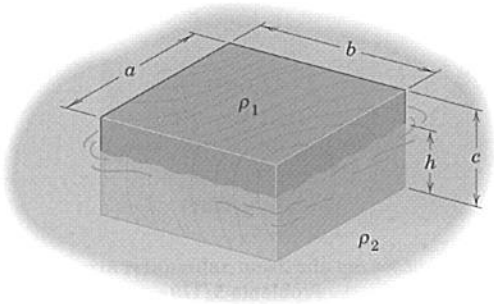
5/175 Especifique o módulo e a localização da força resultante que atua em cada lado e no fundo do aquário, devido à água doce dentro dele.

Resp. Força no fundo = 824 N
Forças nos lados = 235 N, 549 N
Todas as forças atuam a 2/3 da altura



Problema 5/175

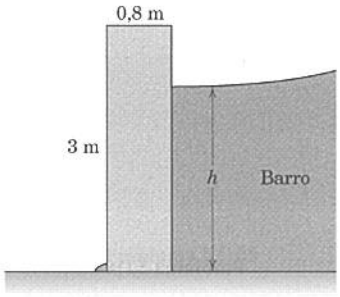
5/176 Um bloco retangular de massa específica ρ_1 flutua em um líquido de massa específica ρ_2. Determine a razão $r = h/c$, onde h é a altura submersa do bloco. Avalie r para um bloco de carvalho flutuando em água doce e para um bloco de aço flutuando em mercúrio.



Problema 5/176

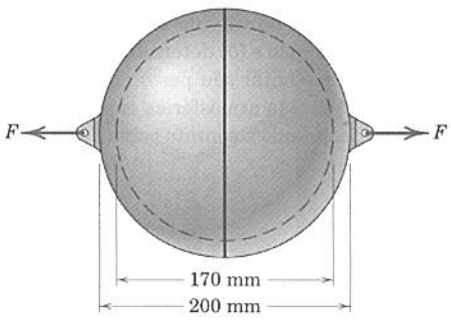
5/177 Calcule a altura h do barro, para a qual a barreira de contenção de concreto, de 3 m de altura, está a ponto de tombar sobre sua aresta frontal. A massa específica do barro pode ser considerada como 1760 kg/m³ e a do concreto como 2400 kg/m³.

Resp. $h = 1{,}99$ m



Problema 5/177

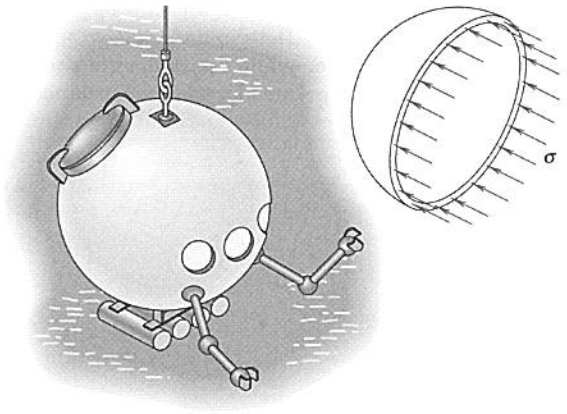
5/178 As duas cascas hemisféricas estão perfeitamente seladas sobre as suas superfícies de contato e o ar em seu interior foi parcialmente removido até que uma pressão de 14 kPa foi atingida. A pressão atmosférica vale 101,3 kPa. Determine a força F necessária para separar as cascas.



Problema 5/178

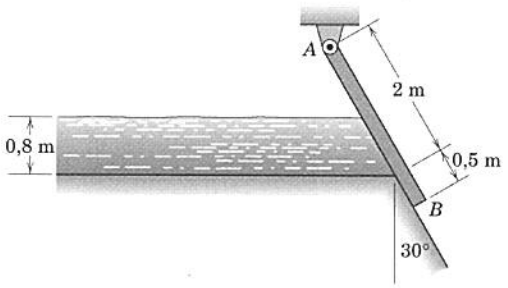
5/179 Uma câmara para mergulhos profundos, projetada na forma de uma casca esférica com 1500 mm de diâmetro, é lastreada com chumbo de modo que seu peso excede ligeiramente sua flutuabilidade. A pressão atmosférica é mantida dentro da esfera durante um mergulho no oceano até uma profundidade de 3 km. A espessura da casca é de 25 mm. Para essa espessura calcule a tensão compressiva σ que atua em uma seção diametral da casca, como indicado na vista à direita.

Resp. $\sigma = 463$ MPa



Problema 5/179

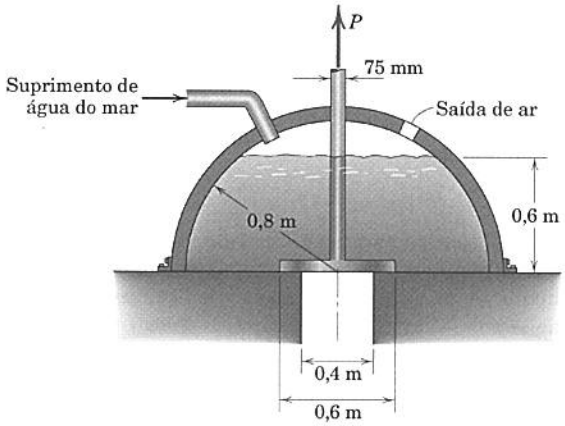
5/180 A água doce em um canal é contida pela placa uniforme de 2,5 m, que pode bascular livremente em A. Se a comporta foi projetada para abrir quando a profundidade da água atingir 0,8 m, como mostrado na figura, qual deve ser o peso w da comporta (em newtons por metro de comprimento horizontal perpendicularmente ao plano do papel)?



Problema 5/180

5/181 Quando o nível da água do mar dentro da câmara hemisférica atinge 0,6 m, mostrado na figura, o tampão é levantado, permitindo que um fluxo de água do mar entre pelo tubo vertical. Para esse nível de água (a) determine a pressão média σ suportada pela área de vedação da válvula antes que uma força seja aplicada para levantar o tampão e (b) determine a força P (adicional à força necessária para sustentar seu peso) necessária para levantar o tampão. Considere pressão atmosférica em todos os espaços livres e na área de vedação quando o contato cessa sob a ação de P.

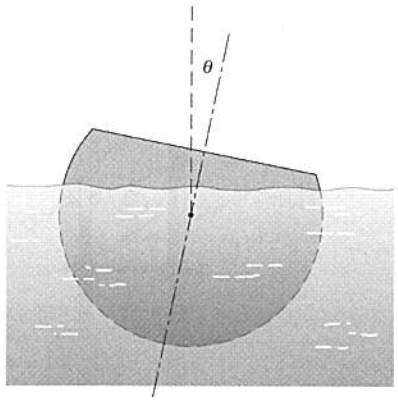
Resp. $\sigma = 10{,}74$ kPa, $P = 1{,}687$ kN



Problema 5/181

Problemas Representativos

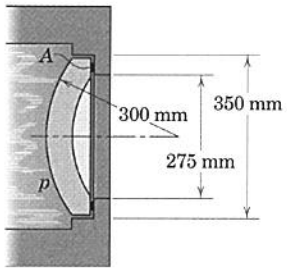
5/182 A figura mostra a vista posterior de um cilindro homogêneo, sólido e comprido, que flutua em um líquido e tem um segmento removido. Mostre que $\theta = 0$ e $\theta = 180°$ são os dois valores do ângulo entre a sua linha de centro e a vertical para os quais o cilindro flutua em posições estáveis.



Problema 5/182

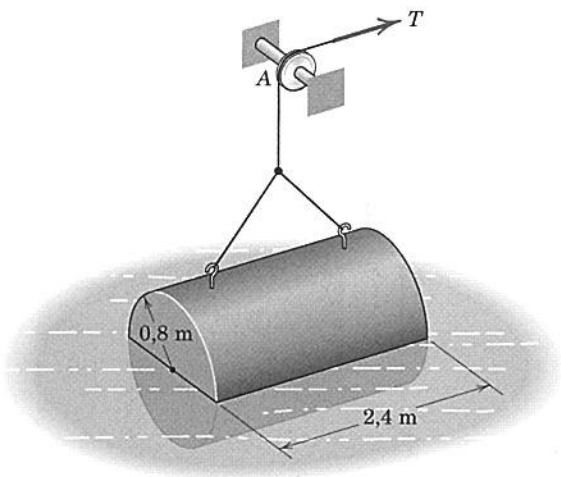
5/183 Um dos problemas críticos no projeto de veículos para mergulhos profundos é colocar visores que irão suportar pressões hidrostáticas tremendas sem fraturar ou vazar. A figura mostra a seção transversal de uma janela experimental de acrílico, com superfícies esféricas, sob teste em uma câmara com fluido sob alta pressão. Se a pressão p for aumentada até um nível que simule o efeito de um mergulho até uma profundidade de 1 km na água do mar, calcule a pressão média σ suportada pela gaxeta A.

Resp. $\sigma = 26{,}4$ MPa



Problema 5/183

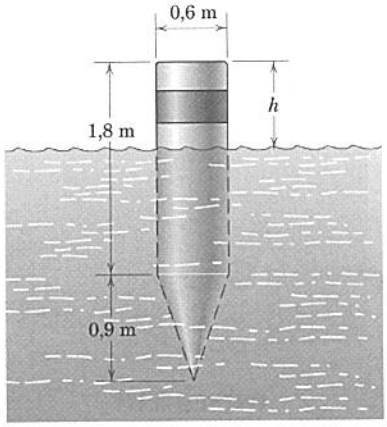
5/184 O cilindro sólido de concreto com 2,4 m de comprimento e 1,6 m de diâmetro é sustentado em uma posição semi-submersa em água doce por um cabo que passa sobre uma polia fixa em A. Calcule a força trativa T no cabo. O cilindro é impermeabilizado por um revestimento de plástico. (Consulte a Tabela D/1, Apêndice D, quando necessário.)



Problema 5/184

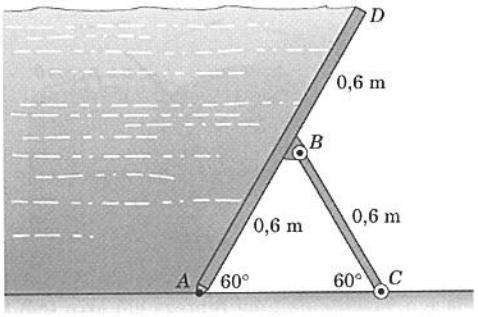
5/185 Uma bóia de marcação consistindo de um cilindro e um cone tem as dimensões mostradas e tem uma massa de 285 kg. Determine a altura h quando a bóia está flutuando em água salgada. A bóia é construída de modo que um centro de massa baixo assegura estabilidade.

Resp. $h = 1{,}121$ m



Problema 5/185

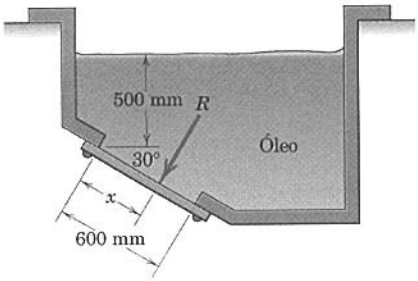
5/186 Um canal de água doce com 3 m de largura (normal ao plano do papel) está bloqueado na sua extremidade por uma barreira retangular, *ABD*, mostrada em seção. Escoras *BC* estão espaçadas a cada 0,6 m ao longo da largura de 3 m. Determine a força compressiva C em cada escora. Despreze os pesos dos elementos.



Problema 5/186

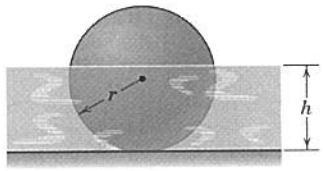
5/187 Uma seção vertical de um tanque para drenagem de óleo está mostrada. A placa de acesso cobre uma abertura retangular, que tem uma dimensão de 400 mm normal ao plano do papel. Calcule a força total R exercida pelo óleo sobre a placa e a localização x de R. O óleo tem uma massa específica de 900 kg/m³.

Resp. $R = 1377$ N, $x = 323$ mm



Problema 5/187

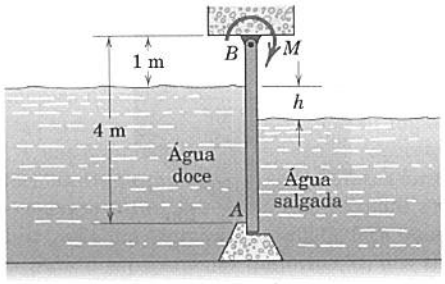
5/188 Uma esfera sólida e homogênea de raio r está apoiada sobre o fundo de um tanque que contém um líquido de massa específica ρ_l, que é maior do que a massa específica ρ_s da esfera. À medida que o tanque é enchido, uma altura h é atingida, na qual a esfera começa a flutuar. Determine a expressão para a massa específica ρ_s da esfera.



Problema 5/188

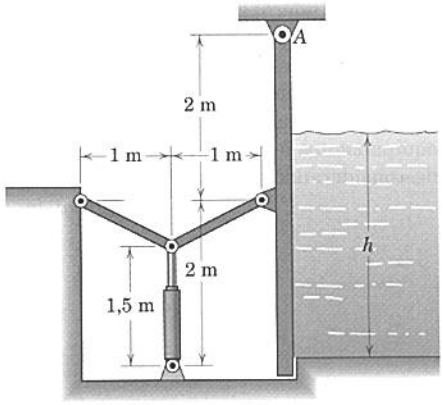
5/189 A comporta retangular, mostrada em seção, tem 3 m de comprimento (perpendicular ao plano do papel) e bascula em relação a sua borda superior B. A comporta divide um canal, que à esquerda leva a um lago de água doce, e à direita a uma bacia de água do mar preenchida pela maré. Calcule o torque M no eixo da comporta, em B, necessário para prevenir que a comporta abra quando o nível de água do mar cai para $h = 1$ m.

Resp. $M = 195{,}2$ kN · m



Problema 5/189

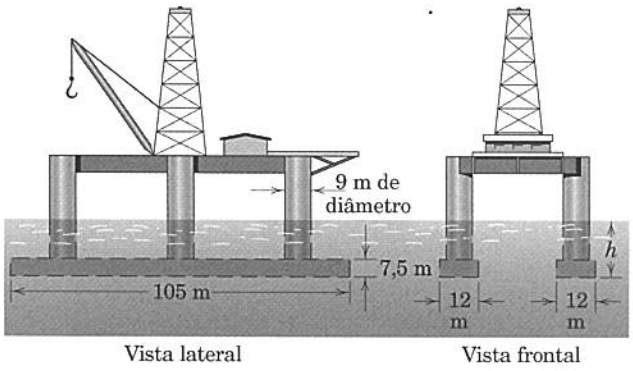
5/190 O cilindro hidráulico opera o engate articulado que fecha a comporta vertical contra a pressão da água doce no lado oposto. A comporta é retangular com uma largura horizontal de 2 m perpendicular ao papel. Para uma profundidade de água $h = 3$ m, calcule a pressão de óleo p necessária, que atua no pistão de 150 mm de diâmetro do cilindro hidráulico.



Problema 5/190

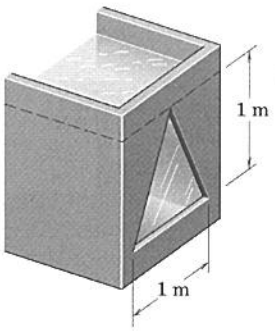
5/191 O projeto de uma plataforma flutuante de perfuração de petróleo consiste em dois flutuadores retangulares e em seis colunas cilíndricas, que suportam a plataforma de trabalho. Quando lastreada, a estrutura como um todo tem um deslocamento de 26.000 toneladas métricas (1 tonelada métrica é igual a 1000 kg). Calcule a altura total submersa h da estrutura quando ela é ancorada no oceano. A massa específica da água salgada é de 1030 kg/m³. Despreze as componentes verticais das forças de ancoragem.

Resp. $h = 24{,}1$ m



Problema 5/191

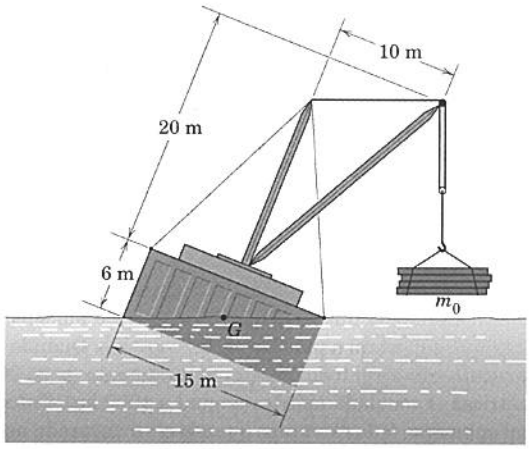
5/192 Determine a força total R exercida sobre a janela triangular pela água doce no tanque. O nível da água coincide com o topo da janela. Determine, também, a distância H, desde R até o nível da água.



Problema 5/192

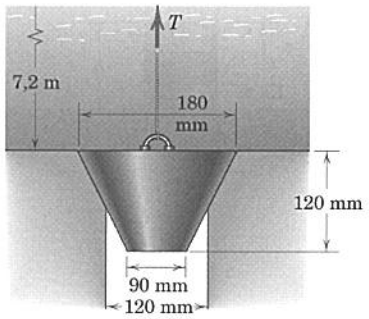
5/193 A balsa guindaste tem uma seção transversal retangular de 6 m por 15 m ao longo de todo o seu comprimento de 40 m. Se a submersão e a adernagem máximas permissíveis na água do mar são representadas pela posição mostrada, determine a máxima massa segura m_0 correspondente que a balsa pode manejar na posição estendida de 10 m do guindaste. Ache, também, o deslocamento total m em toneladas métricas da balsa sem carga. A distribuição dos equipamentos e do lastro coloca o centro de gravidade G da balsa, desconsiderando a massa m_0, no centro do casco.

Resp. $m_0 = 203$ Mg, $m = 1651$ Mg



Problema 5/193

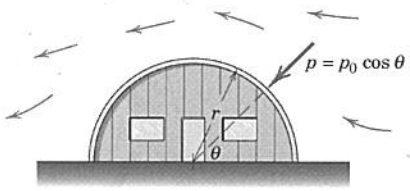
5/194 O tampão de ferro fundido fecha o tubo de drenagem de um tanque aberto de água doce, que está cheio até uma altura de 7,2 m. Determine a força trativa T necessária para remover o tampão sobre o buraco cônico. Existe pressão atmosférica no tubo de drenagem e na área de vedação, à medida que o tampão está sendo removido. Despreze o atrito mecânico entre o tampão e suas superfícies de contato.



Problema 5/194

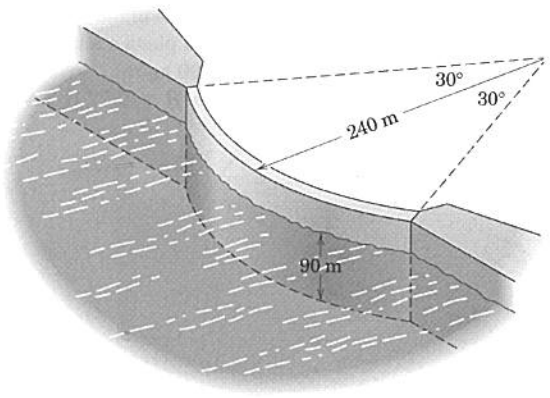
5/195 A cabana do tipo Quonset está submetida a um vento horizontal e a pressão p contra o telhado circular pode ser aproximada por $p_0 \cos\theta$. A pressão é positiva no lado da cabana exposto ao vento e é negativa no lado oposto. Determine, por unidade de comprimento do telhado medido normalmente ao plano do papel, o cisalhamento horizontal total Q nas fundações.

Resp. $Q = \frac{1}{2}\pi r p_0$



Problema 5/195

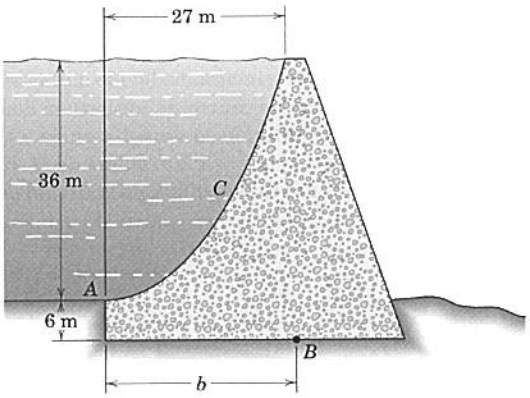
5/196 A face a vazante de uma represa em arco tem a forma de uma superfície cilíndrica vertical com 240 m de raio e subentende um ângulo de 60°. Se a altura da coluna de água doce é de 90 m, determine a força total R exercida pela água na face da represa.



Problema 5/196

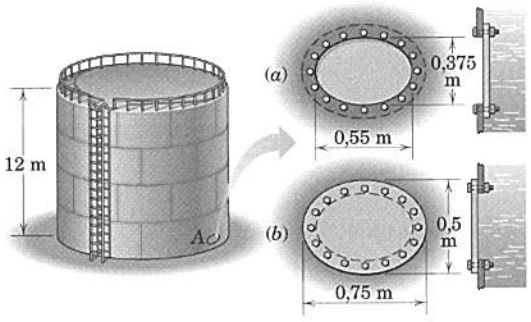
5/197 O lado cheio por água doce de uma represa de concreto tem a forma de uma parábola vertical com vértice em A. Determine a posição b do ponto B na base da represa, pelo qual atua a força resultante da água contra a face C da represa.

Resp. $b = 28{,}1$ m



Problema 5/197

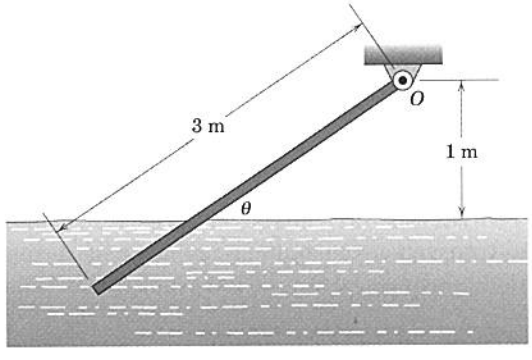
5/198 A pequena abertura de acesso, A, permite que os trabalhadores de manutenção entrem no tanque de armazenamento no nível do chão, quando ele está vazio. Dois projetos, (a) e (b), estão mostrados para a tampa da abertura. Se o tanque estiver cheio de água doce, estime a pressão média σ na área de vedação do projeto (a) e o aumento médio ΔT na força trativa inicial em cada um dos 16 parafusos do projeto (b). Você pode considerar a pressão sobre toda a área da abertura como constante e a pressão na área de vedação do projeto (b) pode ser considerada como a atmosférica.



Problema 5/198

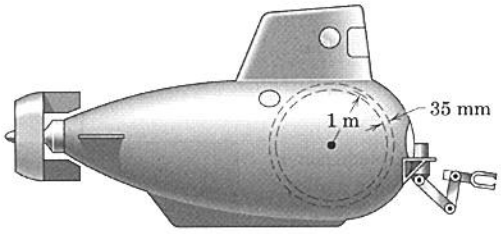
5/199 A prancha de 3 m mostrada em seção tem uma massa específica de 800 kg/m³ e bascula em relação ao eixo horizontal através de sua borda superior O. Calcule o ângulo θ assumido pela prancha em relação à horizontal, para o nível de água doce mostrado.

Resp. $\theta = 48{,}2°$



Problema 5/199

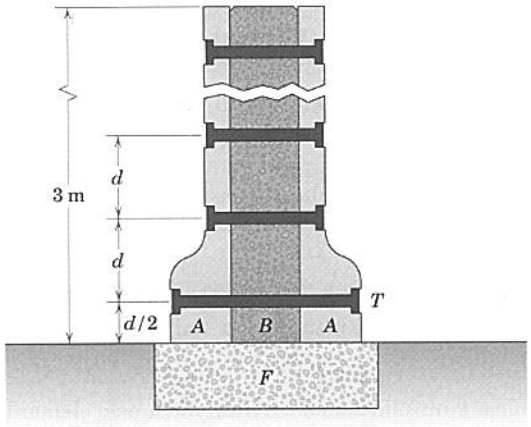
5/200 O submarino de pesquisa para grandes profundidades tem um compartimento de passageiros na forma de uma casca esférica, feita em aço, com um raio médio de 1,000 m e uma espessura de 35 mm. Calcule a massa do lastro de chumbo que o submarino deve carregar de modo que o peso combinado da casca de aço e do lastro de chumbo cancele exatamente a flutuabilidade combinada apenas dessas duas partes. (Consulte a tabela D/1, Apêndice D, quando necessário.)



Problema 5/200

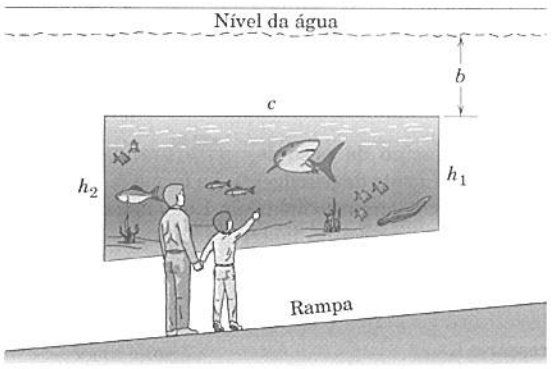
5/201 Os elementos de um novo método para construção das paredes de fundações de concreto para casas novas estão mostrados na figura. Uma vez que a sapata, F, está no seu lugar, formas de poliestireno, A, são erguidas e uma mistura de concreto, B, é vertida entre as formas. Os tirantes, T, impedem que as formas se separem. Após o concreto curar, as formas são deixadas em seu lugar como isolantes. Como um exercício de projeto, faça uma estimativa conservadora para o espaçamento uniforme, d, dos tirantes se a força trativa em cada tirante não deve exceder 6,5 kN. O espaçamento horizontal dos tirantes é o mesmo que o espaçamento vertical. Apresente qualquer hipótese levantada. A massa específica do concreto úmido é 2400 kg/m³.

Resp. $d = 0{,}300$ m



Problema 5/201

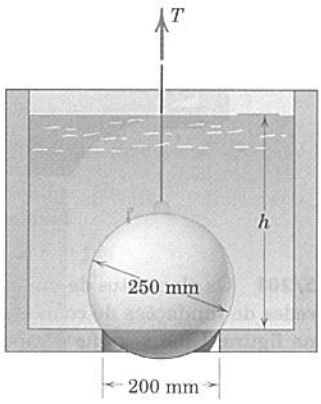
5/202 A janela de observação trapezoidal em um aquário de água salgada tem as dimensões mostradas. Com a ajuda dos diagramas e coordenadas apropriados, descreva dois métodos pelos quais a força resultante R sobre o vidro, devida à pressão de água, e a posição vertical de R, possam ser determinadas se valores numéricos forem dados.



Problema 5/202

▶5/203 A esfera é usada como uma válvula, para fechar a abertura no tanque de água doce. À medida que a profundidade h diminui, a força trativa T necessária para abrir a válvula decresce, pois a força direcionada para baixo, sobre a esfera, diminui com a redução da pressão. Determine a profundidade h para a qual T é igual ao peso da esfera.

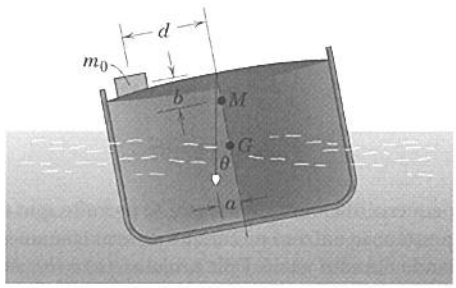
Resp. $h = 0{,}233$ m



Problema 5/203

▶5/204 A determinação exata da posição vertical do centro de massa G de um navio é difícil de ser obtida por cálculo. Ela é mais facilmente obtida por um experimento simples de inclinação do navio carregado. Fazendo referência à figura, uma massa externa conhecida, m_0, é colocada a uma distância d da linha de centro e o ângulo de adernagem θ é medido por meio da deflexão de um prumo de chumbo. O deslocamento do navio e a posição do metacentro M são conhecidos. Calcule a altura do metacentro $\overline{GM}$ para um navio de 12 000 t, inclinado devido a uma massa de 27 t colocada a 7,8 m da linha de centro, se um prumo de chumbo com 6 m de comprimento é defletido de uma distância $a = 0{,}2$ m. A massa m_0 está a uma distância $b = 1{,}8$ m acima de M. [Observe que a tonelada métrica (t) é igual a 1000 kg e equivale ao megagrama (Mg).]

Resp. $\overline{GM} = 0{,}530$ m



Problema 5/204

5/10 Revisão do Capítulo

No Capítulo 5 estudamos diversos exemplos comuns de forças distribuídas em volumes, sobre áreas e ao longo de linhas. Em todos esses problemas, freqüentemente, precisamos determinar a resultante das forças distribuídas e a localização dessa resultante.

Achando Resultantes de Cargas Distribuídas

Para achar a resultante e a linha de ação de uma força distribuída:

1. Inicie multiplicando o valor da força pelo elemento de volume, área ou comprimento apropriado, em função do qual o valor da força é dado. Some (integre), então, as forças incrementais sobre a região envolvida para obter sua resultante.
2. Para localizar a linha de ação da resultante, use o princípio dos momentos. Avalie o somatório dos momentos de todos os incrementos de força em relação a um eixo conveniente. Iguale esse somatório ao momento da resultante em relação ao mesmo eixo. Resolva, então, para o braço de alavanca desconhecido da resultante.

Forças Gravitacionais

Quando uma força é distribuída por toda uma massa, como no caso da atração gravitacional, seu módulo é a força de atração ρg por unidade de volume, onde ρ é a massa específica e g é a aceleração da gravidade. Para corpos cuja massa específica é constante, vimos na Seção A que ρg se cancela quando o princípio dos momentos é aplicado. Isso nos deixa com um problema estritamente geométrico para determinar o centróide da figura, que coincide com o centro de massa do corpo físico cujos contornos definem a figura.

1. Para placas planas e cascas que são homogêneas e têm espessura constante, o problema se resume a determinar as propriedades de uma área.
2. Para barras esbeltas e fios de massa específica uniforme e seção transversal constante, o problema se resume a determinar as propriedades de um segmento de linha.

Integração de Relações Diferenciais

Para problemas que requerem a integração de relações diferenciais, tenha em mente as seguintes considerações.

1. Selecione um sistema de coordenadas que forneça a descrição mais simples dos contornos da região de integração.
2. Elimine termos diferenciais de ordem superior, sempre que termos diferenciais de menor ordem permanecerem.
3. Escolha um elemento diferencial de primeira ordem, preferencialmente a um elemento de segunda ordem, e um elemento de segunda ordem preferencialmente a um elemento de terceira ordem.
4. Sempre que possível, escolha um elemento diferencial que evite descontinuidades dentro da região de integração.

Forças Distribuídas em Vigas, Cabos e Fluidos

Na Seção B usamos essas diretrizes juntamente com os princípios de equilíbrio para determinar os efeitos das forças distribuídas em vigas, cabos e fluidos. Lembre que:

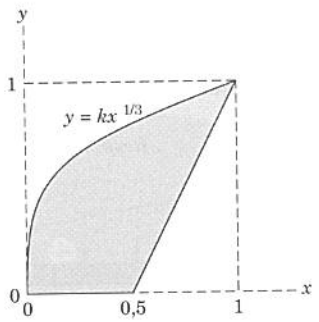
1. Para vigas e cabos, o módulo da força é dado como força por unidade de comprimento.
2. Para fluidos, o módulo da força é dado como força por unidade de área, ou pressão.

Embora vigas, cabos e fluidos sejam aplicações bastante diferentes fisicamente, a formulação de seus problemas compartilha os elementos comuns citados anteriormente.

PROBLEMAS DE REVISÃO

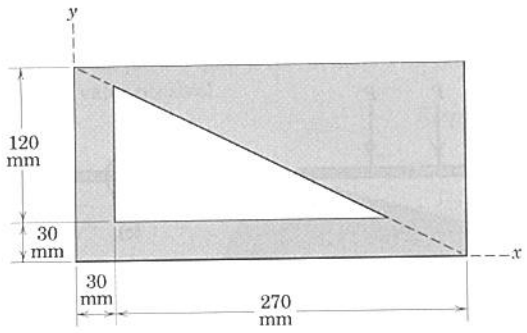
5/205 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.

Resp. $\bar{x} = \frac{37}{84}$, $\bar{y} = \frac{13}{30}$



Problema 5/205

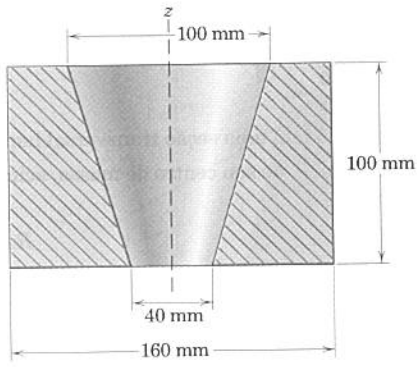
5/206 Determine as coordenadas x e y do centróide da área sombreada.



Problema 5/206

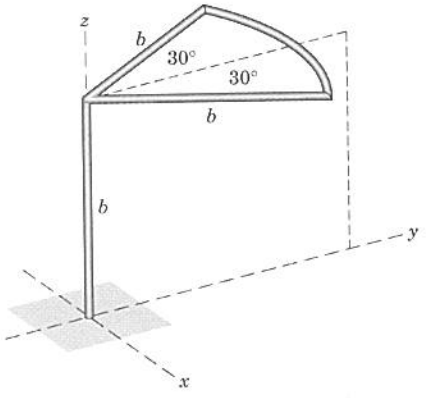
5/207 A seção transversal mostrada representa um corpo de revolução, em torno do eixo z, de uma peça fabricada em ferro fundido. Calcule sua massa m.

Resp. $m = 11{,}55$ kg



Problema 5/207

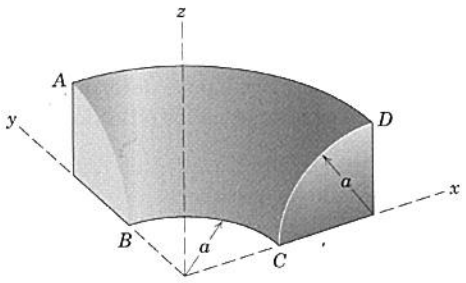
5/208 A montagem consiste em quatro barras cortadas de uma mesma barra original. O elemento curvo é um arco circular de raio b. Determine as coordenadas y e z do centro de massa desta montagem.



Problema 5/208

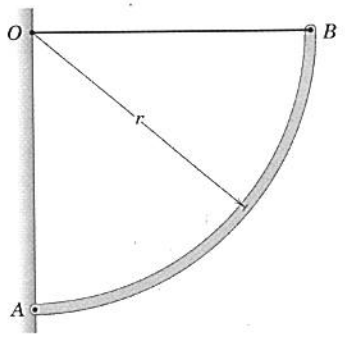
5/209 Determine a área A da superfície curva $ABCD$ do sólido de revolução mostrado.

Resp. $A = \frac{\pi a^2}{2}(\pi - 1)$



Problema 5/209

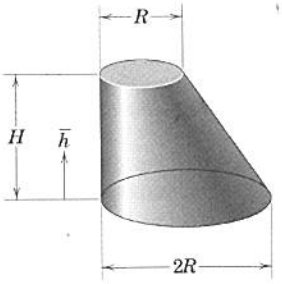
5/210 A barra uniforme de massa m está curvada em um quarto de arco circular, no plano vertical, e bascula livremente em A. A barra é mantida em posição pelo arame horizontal desde O até B. Determine o módulo R da força sobre o pino em A.



Problema 5/210

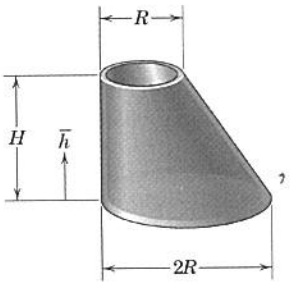
5/211 O corpo afilado tem uma seção transversal horizontal circular. Determine a altura $\bar{h}$ de seu centro de massa, acima da base do sólido homogêneo.

Resp. $\bar{h} = \frac{11}{28}H$



Problema 5/211

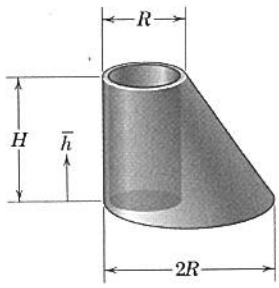
5/212 A figura mostra um corpo semelhante ao do Prob. 5/211, mas agora o corpo é uma casca fina com aberturas na base e no topo. Determine a altura $\bar{h}$ de seu centro de massa, acima da base do sólido homogêneo, e compare seu resultado com a resposta dada para o Prob. 5/211.



Problema 5/212

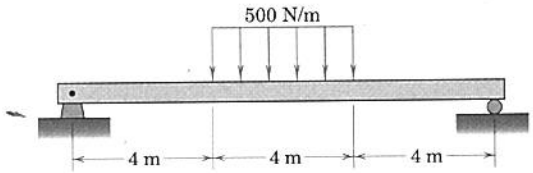
5/213 O corpo homogêneo mostrado é construído a partir do corpo sólido do Prob. 5/211 e, a seguir, removendo um volume cilíndrico com um diâmetro pouco menor do que R, como mostrado, deixando uma parede fina na parte esquerda do corpo, bem como no seu topo. Determine a altura $\bar{h}$ de seu centro de massa, acima da base do corpo.

Resp. $\bar{h} = \frac{5}{16}H$



Problema 5/213

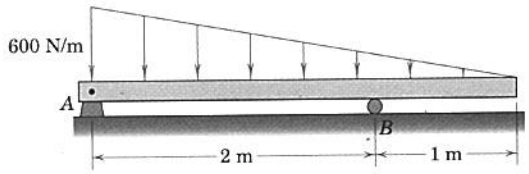
5/214 Construa os diagramas de cortante e de momento para a viga, que sustenta a carga uniforme de 500 N por metro do comprimento da viga, distribuída ao longo da sua seção média. Determine o momento fletor máximo e sua posição.



Problema 5/214

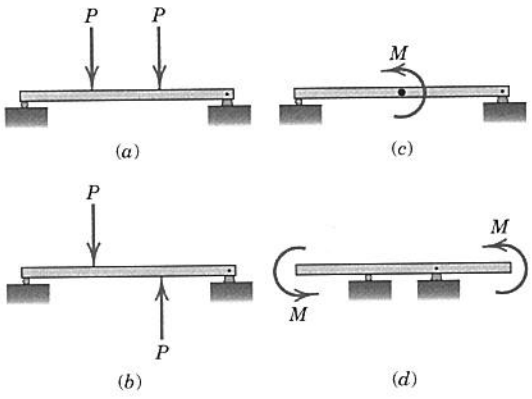
5/215 Determine o momento fletor máximo, $M_{máx}$, para a viga carregada e especifique a distância x à direita da extremidade A onde $M_{máx}$ ocorre.

Resp. $M_{máx} = 186,4\text{N} \cdot \text{m}$ em $x = 0,879$ m.



Problema 5/215

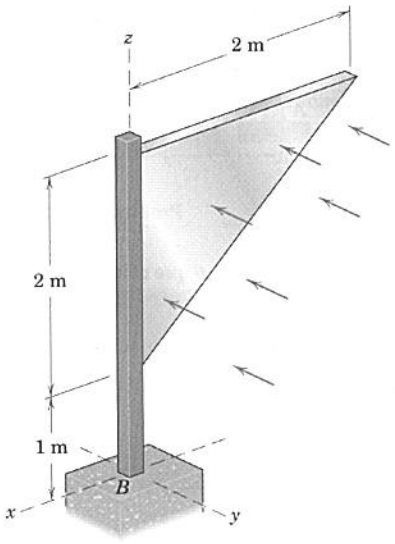
5/216 Esboce os diagramas de cortante e de momento para cada uma das quatro vigas carregadas e apoiadas como mostrado.



Problema 5/216

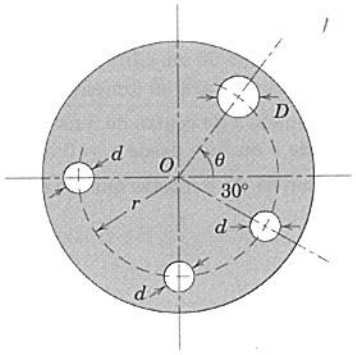
5/217 O letreiro triangular está preso ao poste engastado em uma base de concreto em B. Calcule a força cisalhante V, o momento fletor M e o momento torçor T sobre o poste em B, durante uma tempestade na qual a velocidade do vento normal ao letreiro atinge 100 km/h. A pressão do ar (chamada pressão de estagnação) contra a superfície vertical, correspondente a esta velocidade, vale 1,4 kPa.

Resp. $V = 2{,}8$ kN, $M = 6{,}53$ kN · m, $T = 1{,}867$ kN · m



Problema 5/217

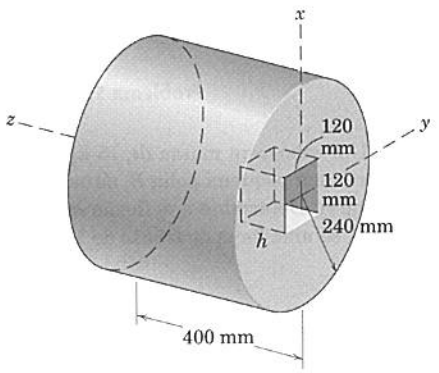
5/218 O disco circular gira em relação a um eixo que passa por seu centro O e tem três furos de diâmetro d, posicionados como mostrado. Um quarto furo deve ser usinado no disco, no mesmo raio r, tal que o disco estará em equilíbrio (centro de massa em O). Determine o diâmetro necessário D do novo furo e sua posição angular.



Problema 5/218

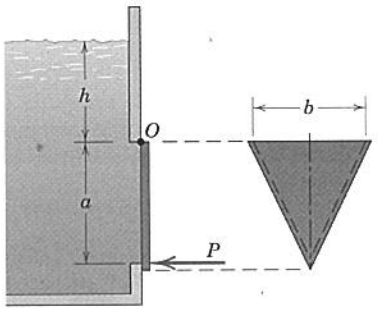
5/219 Determine a profundidade h de um furo quadrado no cilindro circular sólido, para o qual a coordenada z do centro de massa terá o máximo valor possível.

Resp. $h = 204$ mm



Problema 5/219

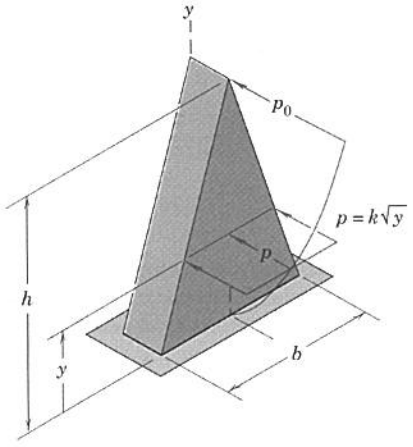
5/220 Uma placa plana sela uma abertura triangular na parede vertical de um tanque com líquido de massa específica ρ. A placa bascula em torno da borda superior O triângulo. Determine a força P necessária para manter a placa em uma posição fechada contra a pressão do líquido.



Problema 5/220

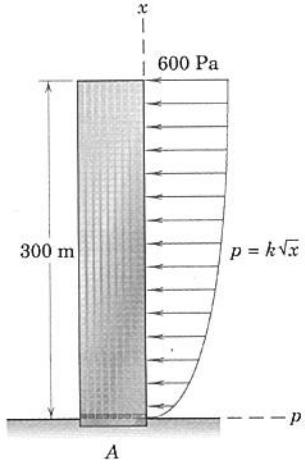
5/221 Uma estrutura prismática de altura h e base b está submetida a uma carga horizontal, devida ao vento, cuja pressão p aumenta desde zero, na base, até p_0, no topo, de acordo com $p = k\sqrt{y}$. Determine o momento de reação M na base da estrutura.

Resp. $M = \frac{4}{35} p_0 b h^2$



Problema 5/221

5/222 Como parte de um estudo preliminar de um projeto, estão sendo investigados os efeitos das cargas devidas ao vento em um prédio de 300 m. Para a distribuição parabólica da pressão do vento, mostrada na figura, calcule as forças e o momento de reação na base A do prédio devido ao carregamento causado pelo vento. A largura do prédio (perpendicular ao papel) vale 60 m.



Problema 5/222

▶5/223 Considere o prédio alto do Prob. 5/222 como uma viga uniforme vertical. Determine a força cortante e o momento na estrutura, e faça um gráfico de ambos, em função da altura x acima do chão. Avalie suas expressões para $x = 150$ m.

Resp. $V = 7{,}2(10^6) - 1386\,x^{3/2}$ N

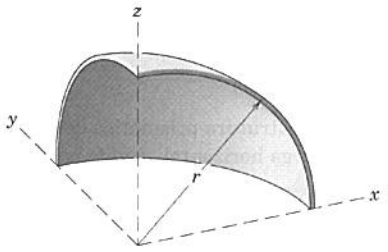
$M = 1296 - 7{,}2\,x + 5{,}54(10^{-4})\,x^{5/2}$ MN · m

$V_{x\,=\,150\text{ m}} = 4{,}65$ MN

$M_{x\,=\,150\text{ m}} = 369$ MN · m

▶5/224 Localize o centro de massa da casca esférica fina, que é formada cortando-se um oitavo de uma casca esférica completa.

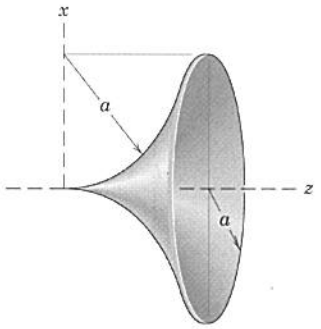
Resp. $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \dfrac{r}{2}$



Problema 5/224

▶5/225 Localize o centro de massa da casca homogênea, em formato de sino, de espessura uniforme, mas desprezível.

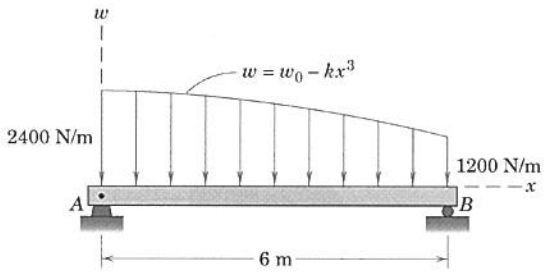
Resp. $\bar{z} = \dfrac{a}{\pi - 2}$



Problema 5/225

*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador

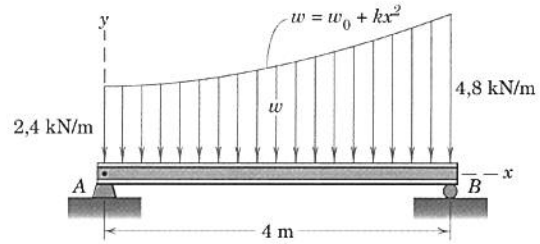
***5/226** Construa os diagramas de cortante e de momento para a viga carregada do Prob. 5/113, repetida aqui. Determine os valores máximos do cortante e do momento e suas posições na viga.



Problema 5/226

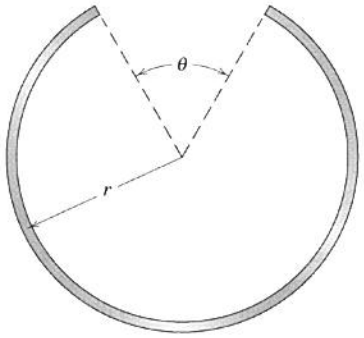
***5/227** Construa os diagramas de cortante e de momento para a viga carregada mostrada. Determine o momento fletor máximo e sua posição.

Resp. $M_{máx} = 6{,}23$ kN · m em $x = 2{,}13$ m



Problema 5/227

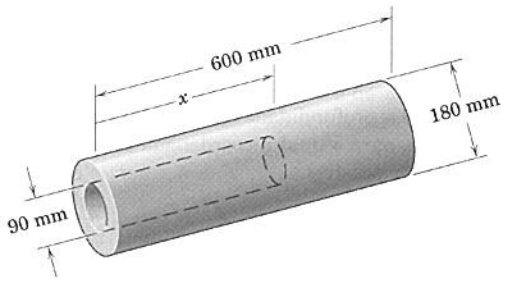
***5/228** Ache o ângulo θ que colocará o centro de massa do anel fino a uma distância $r/10$ do centro do arco.



Problema 5/228

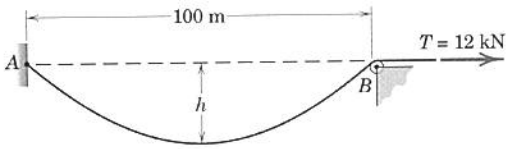
***5/229** Uma carga homogênea de propelente sólido para um foguete está na forma de um cilindro circular com um furo concêntrico de profundidade x. Para as dimensões mostradas, faça o gráfico de $\bar{X}$, a coordenada x do centro de massa do propelente, em função da profundidade x do furo desde $x = 0$ até $x = 600$ mm. Determine o valor máximo de $\bar{X}$ e mostre que ele é igual ao valor correspondente de x.

Resp. $\bar{X}_{máx} = 322$ m



Problema 5/229

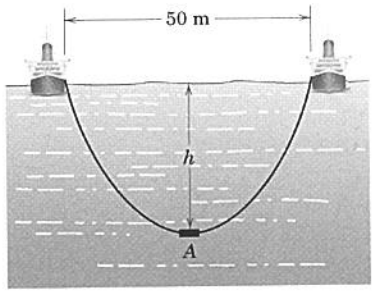
***5/230** Um cabo, com massa de 15 kg/m, está preso ao ponto A e passa sobre uma pequena polia B, situada sobre a mesma linha horizontal que A. Determine a deflexão h e o comprimento S do cabo entre A e B, se uma força de tração de 12 kN for aplicada ao cabo sobre a polia.



Problema 5/230

*5/231 Um instrumento de detecção submarina A está preso ao ponto médio de um cabo de 100 m, suspenso entre dois barcos distando 50 m entre si. Determine a profundidade h do instrumento, que tem massa desprezível. O resultado depende da massa do cabo ou da massa específica da água?

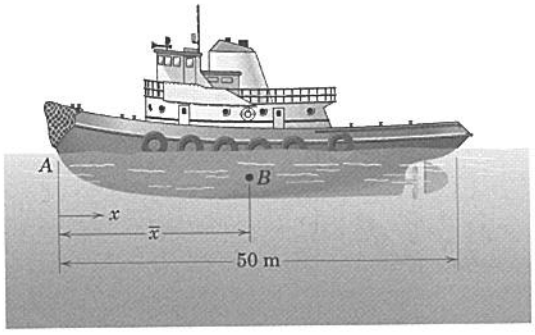
Resp. $h = 39{,}8$ m



Problema 5/231

*5/232 O centro de flutuação B do casco de um navio é o centróide do seu volume submerso. As seções transversais das áreas submersas A, ao longo da direção transversal do casco do rebocador mostrado, estão listadas na tabela para cada cinco metros do comprimento da linha d'água. Com auxílio de um programa de computador adequado, determine, com uma aproximação de 0,5 m, a distância $\bar{x}$ de B atrás do ponto A.

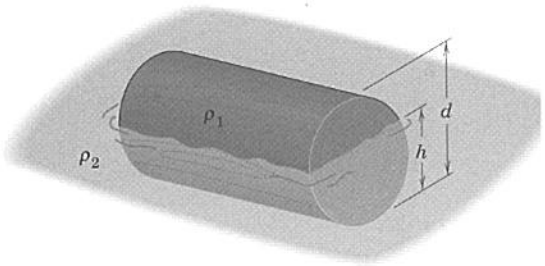
x, m	A, m^2	x, m	A, m^2
0	0	30	23,8
5	7,1	35	19,5
10	15,8	40	12,5
15	22,1	45	5,1
20	24,7	50	0
25	25,1		



Problema 5/232

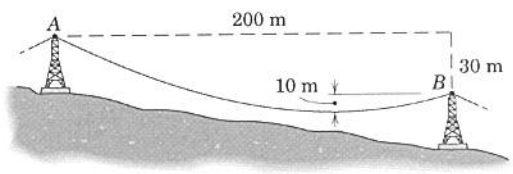
*5/233 Um cilindro circular de massa específica ρ_1 flutua em um líquido de massa específica ρ_2. Se d é o diâmetro do cilindro e h é a altura submersa, faça o gráfico da razão $r = h/d$ em função de ρ_1/ρ_2 na faixa $0 \le \rho_1/\rho_2 \le 1$. Avalie r para um cilindro de pinheiro flutuando na água do mar.

Resp. $r = 0{,}473$

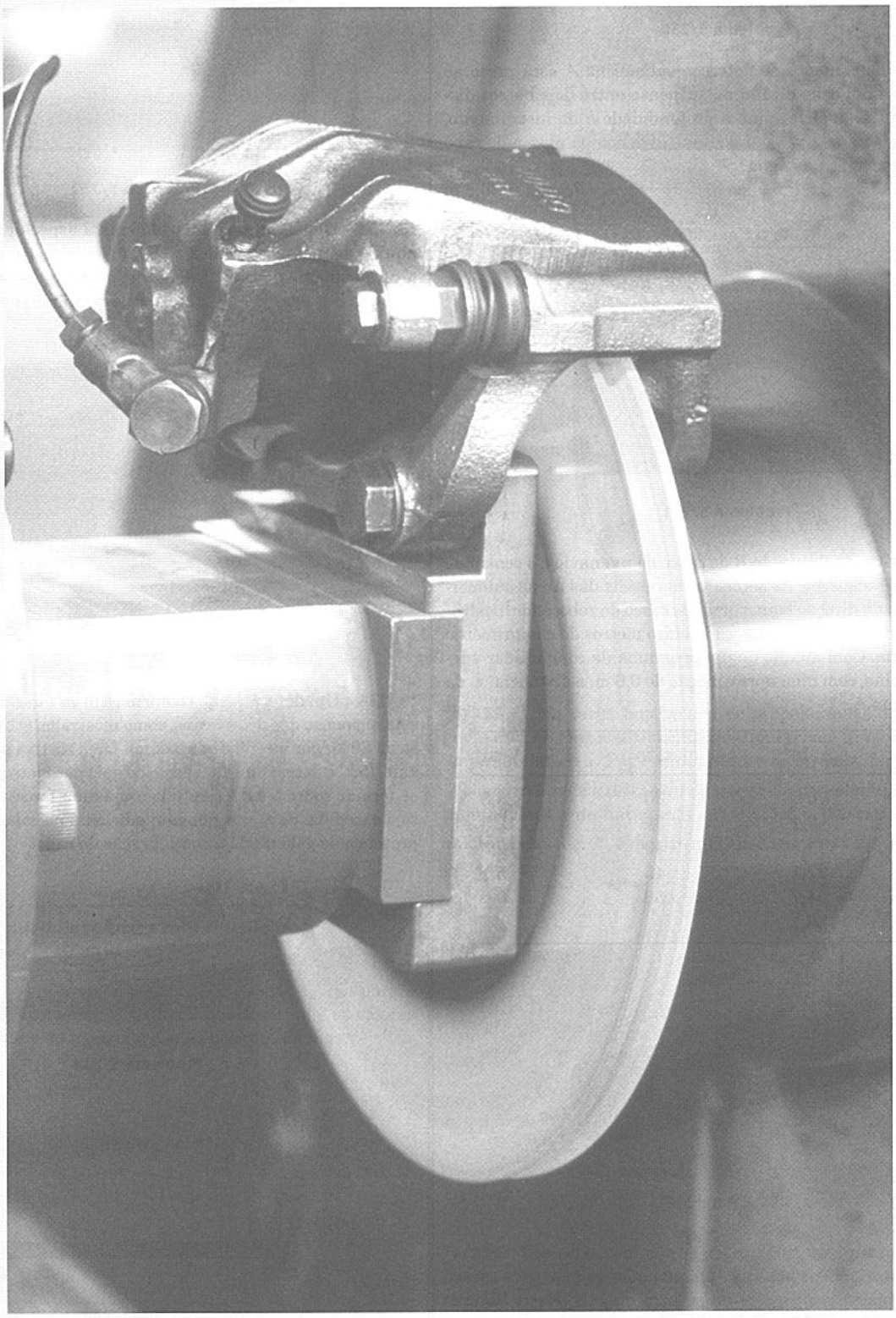


Problema 5/233

*5/234 Um determinado comprimento de um cabo de transmissão está suspenso das duas torres, como mostrado. O cabo tem uma massa de 20 kg por metro. Se a máxima força trativa admissível no cabo vale 75 kN, determine a massa ρ de gelo por metro de cabo, que pode se formar sobre o cabo sem que a máxima força trativa admissível seja excedida. Se o alongamento adicional no cabo for desprezado, a presença do gelo muda a configuração do cabo?



Problema 5/234



© Erika Koch/zefa/Corbis Images

Esse teste de um disco de freio mostra, de maneira dramática, a transformação de energia mecânica em energia térmica por meio do atrito dinâmico entre as sapatas de freio estacionárias e o disco que gira.

6 ATRITO

DESCRIÇÃO DO CAPÍTULO

6/1 Introdução

SEÇÃO A FENÔMENOS ENVOLVENDO ATRITO
6/2 Tipos de Atrito
6/3 Atrito a Seco

SEÇÃO B APLICAÇÕES DE ATRITO EM MÁQUINAS
6/4 Cunhas
6/5 Parafusos
6/6 Mancais Radiais
6/7 Mancais de Escora; Atrito em Discos
6/8 Correias Flexíveis
6/9 Resistência ao Rolamento
6/10 Revisão do Capítulo

6/1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores consideramos, usualmente, que as forças de ação e reação entre superfícies em contato atuam na direção normal às superfícies. Essa hipótese caracteriza a interação entre superfícies lisas e foi ilustrada no Exemplo 2 da Fig. 3/1. Embora essa hipótese ideal envolva, freqüentemente, apenas um erro relativamente pequeno, existem muitos problemas nos quais devemos considerar a habilidade das superfícies de contato suportarem forças tangenciais, além de forças normais. Forças tangenciais geradas entre superfícies de contato são chamadas *forças de atrito* e ocorrem, em algum grau, na interação entre todas as superfícies reais. Sempre que existir a tendência de uma superfície de contato deslizar em relação à outra superfície, as forças de atrito desenvolvidas serão necessariamente na direção contrária a essa tendência.

Em alguns tipos de máquinas e processos desejamos minimizar o efeito de frenagem das forças de atrito. Exemplos são os mancais de todos os tipos, parafusos de pressão, engrenagens, o fluxo de fluidos em tubos e a propulsão de aviões e mísseis através da atmosfera. Em outras situações desejamos maximizar os efeitos do atrito, como em freios, embreagens, correias de transmissão e cunhas. Veículos com rodas dependem do atrito tanto para iniciar o movimento quanto para parar; e o simples caminhar depende do atrito entre o sapato e o chão.

Forças de atrito estão presentes em toda parte na natureza e existem em todas as máquinas, não importa quão precisamente construídas ou cuidadosamente lubrificadas. Uma máquina ou um processo no qual o atrito é pequeno o suficiente para ser desprezado é chamada de *ideal*. Quando o atrito deve ser levado em consideração, a máquina, ou o processo, é denominada *real*. Em todos os casos onde existe movimento de deslizamento entre partes, as forças de atrito resultam em uma perda de energia que é dissipada na forma de calor. O desgaste é outro efeito do atrito.

SEÇÃO A FENÔMENOS ENVOLVENDO ATRITO

6/2 TIPOS DE ATRITO

Nessa seção discutiremos brevemente os tipos de atrito encontrados em mecânica. O próximo item contém um maior detalhamento do tipo de atrito mais comum, o atrito a seco.

(a) Atrito a Seco. O atrito a seco ocorre quando as superfícies não lubrificadas de dois sólidos estão em contato sob uma condição de deslizamento relativo ou com uma tendência a haver deslizamento. Uma força de atrito tangente às superfícies de contato ocorre tanto durante o intervalo de tempo que precede o deslizamento iminente, quanto durante o deslizamento. A direção dessa força de atrito sempre é oposta ao movimento ou ao movimento iminente. Esse tipo de atrito é chamado também de *atrito de Coulomb*. Os princípios do atrito a seco ou de Coulomb foram amplamente desenvolvidos a partir das experiências de Coulomb em 1781 e do trabalho de Morin de 1831 a 1834. Embora ainda não tenhamos uma teoria abrangente do atrito a seco, na Seção 6/3 descrevemos um modelo analítico suficiente para lidar com a ampla maioria dos problemas envolvendo atrito a seco. Esse modelo forma a base para a maior parte deste capítulo.

(b) Atrito entre Fluidos. O atrito entre fluidos ocorre quando camadas adjacentes em um fluido (líquido ou gás) estão se movendo em velocidades diferentes. Esse movimen-

to causa forças de atrito entre os elementos dos fluidos e essas forças dependem da velocidade relativa entre as camadas. Quando não existe velocidade relativa, não existe atrito entre os fluidos. O atrito entre fluidos não depende apenas dos gradientes de velocidade dentro do fluido, mas também da viscosidade do fluido, que é uma medida de sua resistência à ação cisalhante entre as camadas de fluido. O atrito entre fluidos é tratado no estudo da mecânica dos fluidos e não será mais discutido neste livro.

(c) Atrito Interno. O atrito interno ocorre em todos os materiais sólidos que estão submetidos a carregamento cíclico. Para materiais altamente elásticos, a recuperação da deformação ocorre com muito pouca perda de energia devida ao atrito interno. Para materiais que têm limite de elasticidade baixo e que sofrem deformação plástica apreciável durante o carregamento, uma quantidade considerável de atrito interno pode acompanhar essa deformação. O mecanismo de atrito interno está associado com a ação da deformação cisalhante, que é discutida em referências sobre ciência dos materiais. Como este livro trata primariamente dos efeitos externos de forças, não discutiremos mais o atrito interno.

6/3 Atrito a Seco

O restante deste capítulo descreve os efeitos do atrito a seco atuando sobre as superfícies externas de corpos rígidos. Explicaremos agora o mecanismo do atrito a seco com a ajuda de um experimento muito simples.

Mecanismo do Atrito a Seco

Considere um bloco sólido de massa m em repouso sobre uma superfície horizontal, como mostrado na Fig. 6/1a. Consideramos que as superfícies de contato têm alguma rugosidade. O experimento envolve a aplicação de uma força horizontal P, que aumenta continuamente desde zero até um valor suficiente para mover o bloco e levá-lo a uma velocidade apreciável. O diagrama de corpo livre do bloco para qualquer valor de P está mostrado na Fig. 6/1b, onde a força de atrito tangencial exercida pelo plano sobre o bloco é denominada F. Essa força de atrito atuando sobre o corpo *sempre* estará em uma direção oposta ao movimento ou oposta à tendência de movimento do corpo. Existe também uma força normal N, que nesse caso é igual a mg, e a força total R exercida pela superfície sobre o bloco é a resultante de N e de F.

Uma ampliação das irregularidades das superfícies que se tocam, Fig. 6/1c, nos ajuda a visualizar a ação mecânica do atrito. O contato é necessariamente intermitente e existe nas irregularidades das superfícies em contato. A direção de cada uma das reações sobre o bloco, R_1, R_2, R_3, etc, não depende apenas do perfil geométrico das irregularidades, mas também da grandeza da deformação local em cada ponto de contato. A força normal total N é a soma das componentes n das forças de reação R e a força de atrito total F é a soma das componentes t das forças de reação R. Quando as superfícies estão em movimento relativo, os contatos ocorrem, na maior parte, nos picos das irregularidades e as componentes t são menores do que quando as superfícies estão em repouso relativo entre si. Essa observação ajuda a explicar o fato bem conhecido de que a força P necessária para manter o movimento é geralmente menor do que a necessária para iniciar o movimento do bloco, quando as irregularidades estão mais encaixadas.

Se fizermos o experimento e registrarmos a força de atrito F em função de P, obtemos a relação mostrada na Fig. 6/1d. Quando P é zero, o equilíbrio impõe que não exista força de atrito. À medida que P aumenta, a força de atrito deve ser igual e oposta a P enquanto o bloco não deslizar. Durante esse período o bloco está em equilíbrio e todas as forças atuando sobre ele devem satisfazer as equações de equilíbrio.

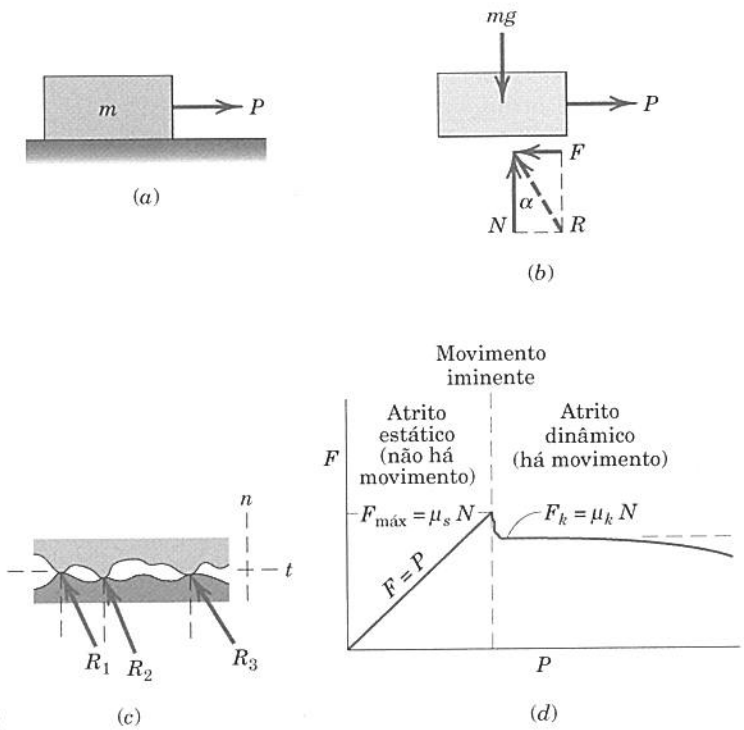


Figura 6/1

Finalmente, atingimos um valor de P que faz com que o bloco deslize e se mova na direção da força aplicada. Nesse mesmo instante a força de atrito decresce levemente, de maneira súbita. Ela então permanece essencialmente constante durante um tempo, mas depois decresce ainda mais conforme a velocidade aumenta.

Atrito Estático

A região na Fig. 6/1*d* até o ponto de deslizamento, ou de movimento iminente, é chamada a região de *atrito estático*, e nessa região o valor da força de atrito é determinado pelas *equações de equilíbrio*. Essa força de atrito pode ter qualquer valor desde zero até o valor máximo, inclusive. Para um dado par de superfícies em contato, o ensaio mostra que esse valor máximo do atrito estático, $F_{máx}$, é proporcional à força normal N. Assim, podemos escrever

$$F_{máx} = \mu_s N \tag{6/1}$$

onde μ_s é a constante de proporcionalidade, chamada de *coeficiente de atrito estático*.

Tenha em mente que a Eq. 6/1 descreve apenas o valor *máximo* ou *limite* da força de atrito estático e *não* qualquer valor menor. Assim, a equação se aplica apenas para os casos onde o movimento é iminente, com a força de atrito em seu valor máximo. Para uma condição de equilíbrio estático quando o movimento *não* é iminente, a força de atrito estático é

$$F < \mu_s N$$

© Ted Wood/Stone/Getty Images

Esse alpinista depende do atrito entre seu corpo e as pedras, como também do atrito entre a corda e os equipamentos mecânicos pelos quais a corda pode deslizar.

Atrito Dinâmico

Depois que o deslizamento ocorre, uma condição de *atrito dinâmico* acompanha o movimento que se segue. A força de atrito dinâmico é, normalmente, um pouco menor do que a força de atrito estático máxima. A força de atrito dinâmico F_k é, também, proporcional à força normal. Assim,

$$F_k = \mu_k N \tag{6/2}$$

onde μ_k é o *coeficiente de atrito dinâmico*. Normalmente μ_k é menor do que μ_s. Conforme a velocidade do bloco aumenta, o atrito dinâmico diminui um pouco, e a velocidades maiores esse decréscimo pode ser significativo. Os coeficientes de atrito dependem muito das exatas condições das superfícies, como também da velocidade relativa, e estão sujeitos à considerável incerteza.

Devido à variabilidade das condições que governam a ação do atrito, é freqüentemente difícil, na prática de engenharia, distinguir entre um coeficiente estático e um dinâmico, especialmente na região de transição entre movimento iminente e movimento. Roscas de parafusos bem lubrificadas sob cargas baixas, por exemplo, freqüentemente exibem atritos comparáveis, quer elas estejam a ponto de girar, quer estejam em movimento.

Na literatura de engenharia achamos, freqüentemente, expressões para o atrito estático máximo e para o atrito dinâmico escritas simplesmente como $F = \mu N$. Fica subentendido do problema em questão se o atrito estático máximo ou se o atrito dinâmico está sendo descrito. Iremos, freqüentemente, diferenciar os coeficientes estático e dinâmico, porém, em alguns casos, não será feita distinção e o coeficiente de atrito será escrito simplesmente como μ. Nesses casos você deve decidir qual das condições de atrito, atrito estático máximo para movimento iminente, ou atrito dinâmico, está envolvida. Enfatizamos novamente que muitos problemas envolvem uma força de atrito estático que é menor do que o valor máximo na iminência do movimento e, portanto, a relação de atrito, Eq. 6/1, não pode ser usada sob essas condições.

A Fig. 6/1*c* mostra que superfícies rugosas têm maior probabilidade de ter ângulos maiores entre as forças de reação e a direção n do que superfícies mais lisas. Assim, para um par de superfícies em contato, um coeficiente de atrito reflete a rugosidade, que é uma propriedade geométrica das superfícies. Com esse modelo geométrico de atrito, descrevemos superfícies como sendo "lisas" quando as forças de atrito que elas podem suportar são pequenas. Não existe sentido em falar de um coeficiente de atrito para uma única superfície.

Ângulos de Atrito

A direção da resultante R na Fig. 6/1*b*, medida desde a direção de N, é especificada por $\tan \alpha = F/N$. Quando a força de atrito atinge seu valor estático limite, $F_{máx}$, o ângulo α atinge um valor máximo ϕ_s. Assim,

$$\tan \phi_s = \mu_s$$

Quando está ocorrendo deslizamento, o ângulo α tem um valor ϕ_k, correspondente à força de atrito dinâmica. De modo semelhante,

$$\tan \phi_k = \mu_k$$

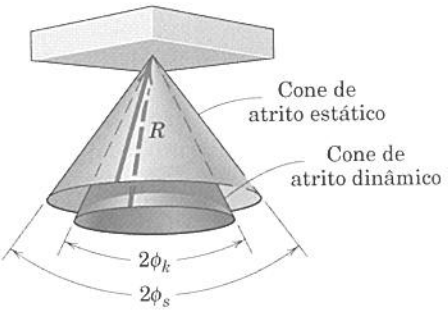


Figura 6/2

Na prática, vemos freqüentemente a expressão $\tan \phi = \mu$, na qual o coeficiente de atrito pode se referir tanto ao caso estático quanto ao dinâmico, dependendo do problema específico. O ângulo ϕ_s é chamado *ângulo do atrito estático* e o ângulo ϕ_k é chamado *ângulo do atrito dinâmico.* O ângulo de atrito para cada caso define claramente a direção limite da força de reação total R entre duas superfícies em contato. Se o movimento é iminente, R deve ser um elemento de um cone circular com um vértice de ângulo $2\phi_s$, como mostrado na Fig. 6/2. Se o movimento não é iminente, R está dentro do cone. Este cone com um vértice de ângulo $2\phi_s$ é chamado *cone de atrito estático* e representa o lugar geométrico de possíveis direções para a força de reação R na iminência do movimento. Se o movimento ocorre, o ângulo de atrito dinâmico é o que se aplica, e a força de reação deve estar sobre a superfície de um cone ligeiramente diferente, com ângulo de vértice $2\phi_k$. Esse cone é o *cone de atrito dinâmico.*

Fatores que Afetam o Atrito

Outros experimentos mostram que a força de atrito é essencialmente independente da área de contato aparente ou projetada. A área de contato verdadeira é muito menor do que o valor projetado, pois apenas os picos das irregularidades das superfícies em contato sustentam a carga. Mesmo cargas normais relativamente pequenas resultam em tensões elevadas nesses pontos de contato. Conforme a força normal aumenta, a área de contato verdadeira também aumenta à medida que o material sofre escoamento, esmagamento ou rasgamento nos pontos de contato.

Uma teoria abrangente do atrito a seco deve ir além da explicação mecânica apresentada aqui. Por exemplo, existe evidência que a atração molecular pode ser uma causa importante de atrito sob condições em que as superfícies em contato estejam muito próximas. Outros fatores que influenciam o atrito a seco são a geração de temperaturas locais elevadas e a adesão nos pontos de contato, a dureza relativa das superfícies em contato, e a presença de finas camadas superficiais de óxidos, óleo, sujeira ou outras substâncias.

Alguns valores típicos de coeficientes de atrito são dados na Tabela D/1, Apêndice D. Esses valores são apenas aproximados e estão sujeitos à considerável variação, dependendo das condições exatas existentes. Eles podem ser usados, entretanto, como exemplos típicos dos valores dos efeitos do atrito. Para fazer um cálculo confiável envolvendo atrito, o coeficiente de atrito apropriado deve ser determinado por experimentos que dupliquem as condições das superfícies da maneira mais acurada possível.

Tipos de Problemas com Atrito

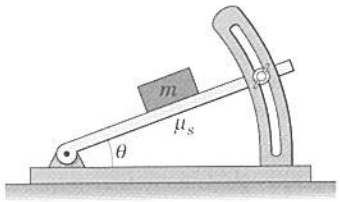
Podemos agora reconhecer os três seguintes tipos de problemas, encontrados em aplicações envolvendo atrito a seco. O primeiro passo na resolução de um problema com atrito é identificar seu tipo.

1. No *primeiro* tipo de problema é sabido que a condição de movimento iminente existe. Nesse caso, um corpo que está em equilíbrio está a ponto de deslizar e a força de atrito é igual à força de atrito estático máxima, $F_{máx} = \mu_s N$. As equações de equilíbrio, é claro, serão válidas.
2. No *segundo* tipo de problema não é sabido se a condição de movimento iminente ou a condição de movimento existem. Para determinar as condições reais de atrito, assumimos, primeiramente, o equilíbrio estático e, então, determinamos a força de atrito, F, necessária para o equilíbrio. Três resultados são possíveis:
   (*a*) $F < (F_{máx} = \mu_s N)$: Aqui, a força de atrito necessária para o equilíbrio pode ser suportada e, portanto, o corpo está em equilíbrio estático, como suposto. Enfatizamos que a força de atrito *real*, F, é *menor do que* o valor limite $F_{máx}$ dado pela Eq. 6/1 e que F é determinada *unicamente* pelas equações de equilíbrio.
   (*b*) $F = (F_{máx} = \mu_s N)$: Já que a força de atrito, F, está em seu valor máximo, $F_{máx}$, o movimento é iminente, como discutido no problema do tipo (1). A hipótese de equilíbrio estático é válida.
   (*c*) $F > (F_{máx} = \mu_s N)$: Essa condição, claramente, é impossível, pois as superfícies não podem sustentar mais força do que a máxima, $\mu_s N$. A hipótese de equilíbrio é, portanto, inválida e ocorre movimento. A força de atrito F, a partir da Eq. 6/2, é igual a $\mu_k N$.
3. No *terceiro* tipo de problema, sabe-se que existe movimento relativo entre as superfícies em contato e, assim, o coeficiente de atrito dinâmico, claramente, é válido. Para esse tipo de problema a Eq. 6/2 sempre dá diretamente a força de atrito dinâmico.

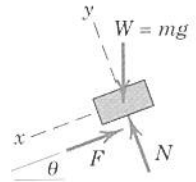
A discussão anterior é válida para todas as superfícies com contato a seco e, dentro de uma faixa limitada, para superfícies em movimento, que estejam parcialmente lubrificadas.

Exemplo 6/1

Determine o angulo máximo, θ, que o plano inclinado ajustável deve fazer com a horizontal antes que o bloco m comece a deslizar. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície inclinada é μ_s.



Solução. O diagrama de corpo livre do bloco mostra seu peso $W = mg$, a força normal N e a força de atrito F exercida sobre o bloco, pelo plano inclinado. A força de atrito atua na direção oposta ao deslizamento, que ocorreria se não existisse atrito.



① O equilíbrio nas direções x e y requer que

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad mg \operatorname{sen}\theta - F = 0 \qquad F = mg \operatorname{sen}\theta$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad -mg\cos\theta + N = 0 \qquad N = mg\cos\theta$$

Dividindo a primeira equação pela segunda obtém-se $F/N = \tan\theta$. Como o ângulo máximo ocorre quando $F = F_{máx} = \mu_s N$ temos, para o limiar do movimento

② $$\mu_s = \tan\theta_{máx} \qquad \text{ou} \qquad \theta_{máx} = \tan^{-1}\mu_s \qquad \textit{Resp.}$$

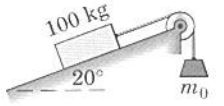
Sugestões Úteis

① Escolhemos eixos de referência ao longo e normal à direção de F, para evitar projetar tanto F quanto N em componentes.

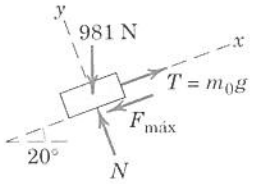
② Esse problema descreve um modo muito simples de determinar um coeficiente de atrito estático. O valor máximo de θ é conhecido como *ângulo de repouso*.

Exemplo 6/2

Determine a faixa de valores que a massa m_0 pode ter de modo que o bloco de 100 kg mostrado na figura nem começará a se mover para cima nem deslizará para baixo no plano. O coeficiente de atrito estático para as superfícies de contato vale 0,30.



Solução. O valor máximo de m_0 será dado pela condição de iminência do movimento para cima no plano. A força de atrito sobre o bloco atua, portanto, para baixo no plano, como mostrado no diagrama de corpo livre do bloco para o Caso I da figura. Com o peso $mg = 100(9{,}81) = 981$ N, as equações de equilíbrio dão



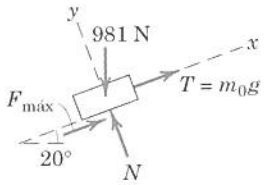
Caso I

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad N - 981\cos 20° = 0 \qquad N = 922 \text{ N}$$

$$[F_{máx} = \mu_s N] \qquad F_{máx} = 0{,}30(922) = 277 \text{ N}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad m_0(9{,}81) - 277 - 981 \operatorname{sen} 20° = 0 \qquad m_0 = 62{,}4 \text{ kg} \qquad \textit{Resp.}$$

O valor mínimo de m_0 é determinado quando o movimento para baixo no plano é imi-
① nente. A força de atrito sobre o bloco atuará para cima, no plano, para se opor à tendência de movimento, como mostrado no diagrama de corpo livre para o Caso II. O equilíbrio na direção x requer



Caso II

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad m_0(9{,}81) + 277 - 981 \operatorname{sen} 20° = 0 \qquad m_0 = 6{,}01 \text{ kg} \qquad \textit{Resp.}$$

Assim, m_0 pode ter qualquer valor desde 6,01 até 62,4 kg e o bloco permanecerá em repouso.

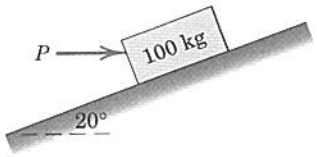
Em ambos os casos, o equilíbrio requer que a resultante de $F_{máx}$ e de N seja concorrente com o peso de 981 N e com a força trativa T.

Sugestão Útil

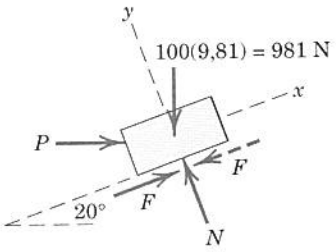
① Vemos, dos resultados do Exemplo 6/1, que o bloco deslizaria para baixo no plano inclinado sem a restrição de estar preso a m_0, pois $\tan 20° > 0{,}30$. Assim, um valor de m_0 será necessário para manter o equilíbrio.

Exemplo 6/3

Determine o módulo e a direção da força de atrito atuando no bloco de 100 kg mostrado se, primeiro, $P = 500$ N e, segundo, $P = 100$ N. O coeficiente de atrito estático vale 0,20 e o coeficiente de atrito dinâmico vale 0,17. As forças são aplicadas com o bloco inicialmente em repouso.



Solução. Não existe maneira de decidir, a partir do enunciado do problema, se o bloco permanecerá em equilíbrio ou se ele começará a se mover após a aplicação de P. É, portanto, necessário criar uma hipótese. Assim, consideraremos a força de atrito direcionada para cima no plano, como mostrado pela seta sólida. A partir do diagrama de corpo livre, um equilíbrio de forças nas direções x e y fornece



$$[\Sigma F_x = 0] \qquad P\cos 20° + F - 981 \operatorname{sen} 20° = 0$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad N - P\operatorname{sen} 20° - 981\cos 20° = 0$$

Caso I. $P = 500$ N
Substituindo-se na primeira das duas equações obtém-se

$$F = -134{,}3 \text{ N}$$

O sinal negativo nos diz que *se* o bloco está em equilíbrio, a força de atrito atuando nele está na direção oposta à considerada e, portanto, está direcionada para baixo, como representado pela seta tracejada. Entretanto, não podemos tirar uma conclusão sobre o módulo de F até que verifiquemos que as superfícies são capazes de sustentar 134,3 N de força de atrito. Isso pode ser feito substituindo $P = 500$ N na segunda equação, o que dá

$$N = 1093 \text{ N}$$

A força de atrito estático máxima que as superfícies podem suportar é, então,

$$[F_{máx} = \mu_s N] \qquad F_{máx} = 0{,}20(1093) = 219 \text{ N}$$

Como essa força é maior do que a necessária para equilíbrio, concluímos que a hipótese de equilíbrio estava correta. A resposta é, portanto,

$F = 134{,}3$ N direcionada para baixo no plano *Resp.*

Caso II. $P = 100$ N
Substituindo nas duas equações de equilíbrio tem-se

$$F = 242 \text{ N} \qquad N = 956 \text{ N}$$

Mas a força de atrito estático máxima vale

$$[F_{máx} = \mu_s N] \qquad F_{máx} = 0{,}20(956) = 191{,}2 \text{ N}$$

Conseqüentemente, 242 N de atrito não podem ser suportados. Assim sendo, não pode ① existir equilíbrio e obtemos o valor correto da força de atrito usando o coeficiente de atrito dinâmico que acompanha o movimento para baixo no plano. Portanto, a resposta é

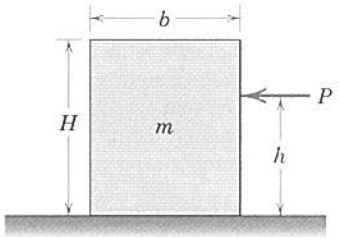
$$[F_k = \mu_k N] \qquad F = 0{,}17(956) = 162{,}5 \text{ N direcionada para cima}$$ *Resp.*

Sugestão Útil

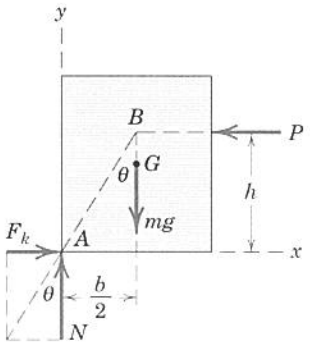
① Devemos observar que mesmo que ΣF_x não seja mais igual a zero, o equilíbrio deve existir na direção y, de modo que $\Sigma F_y = 0$. Assim, a força normal N vale 956 N esteja o bloco em equilíbrio ou não.

Exemplo 6/4

O bloco retangular homogêneo de massa m, largura b e altura H está colocado sobre a superfície horizontal e submetido a uma força horizontal P, que move o bloco ao longo da superfície com uma velocidade constante. O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e a superfície é μ_k. Determine (a) o maior valor que h pode ter de modo que o bloco se moverá sem tombar e (b) a localização de um ponto C na face inferior do bloco pelo qual age a resultante das forças de atrito e normal se $h = H/2$.



Solução. (a) Com o bloco na iminência de tombar, vemos que toda a reação entre o plano e o bloco estará, necessariamente, em A. O diagrama de corpo livre do bloco mostra essa condição. Como ocorre deslizamento, a força de atrito está em seu valor limite $\mu_k N$ e o ângulo θ será $\theta = \tan^{-1} \mu_k$. A resultante de F_k e N passa por um ponto B pelo qual P ① também deve passar, pois três forças coplanares em equilíbrio são concorrentes. Portanto, da geometria do bloco



$$\tan\theta = \mu_k = \frac{b/2}{h} \qquad h = \frac{b}{2\mu_k} \qquad \textit{Resp.}$$

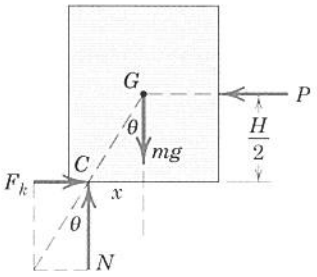
Se h fosse maior que esse valor, o equilíbrio do momento em relação a A não seria satisfeito e o bloco tombaria.

Alternativamente, podemos determinar h combinando os requisitos de equilíbrio para as direções x e y com a equação de equilíbrio do momento em relação a A. Assim,

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad N - mg = 0 \qquad N = mg$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad F_k - P = 0 \qquad P = F_k = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$[\Sigma M_A = 0] \qquad Ph - mg\frac{b}{2} = 0 \qquad h = \frac{mgb}{2P} = \frac{mgb}{2\mu_k mg} = \frac{b}{2\mu_k} \qquad \textit{Resp.}$$



(b) Com $h = H/2$ vemos, do diagrama de corpo livre para o caso (b), que a resultante de F_k e N passa por um ponto C que está a uma distância x à esquerda da linha de centro vertical que passa por G. O ângulo θ ainda será $\theta = \phi = \tan^{-1} \mu_k$ enquanto o bloco estiver se movendo. Assim, da geometria da figura, temos

② $$\frac{x}{H/2} = \tan\theta = \mu_k \qquad \text{logo} \qquad x = \mu_k H/2 \qquad \textit{Resp.}$$

Se substituíssemos μ_k pelo coeficiente estático μ_s, então nossas soluções descreveriam as condições sob as quais o bloco está (a) no limiar de tombar e (b) no limiar de deslizar, ambas a partir da posição de repouso.

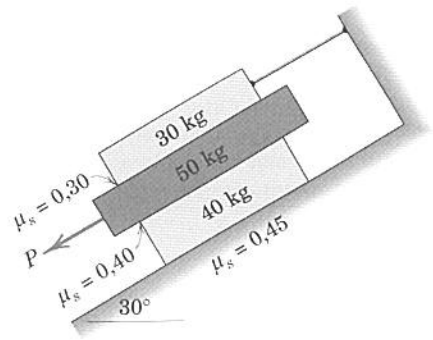
Sugestões Úteis

① Lembre que as equações de equilíbrio se aplicam a um corpo que se move com velocidade constante (aceleração nula), assim como a um corpo em repouso.

② Alternativamente, poderíamos igualar a zero os momentos em relação a G, o que teria dado $F(H/2) - Nx = 0$. Assim, com $F_k = \mu_k N$ obtemos $x = \mu_k H/2$.

Exemplo 6/5

Os três blocos planos estão posicionados no plano com 30° de inclinação, como mostrado, e uma força P paralela ao plano inclinado é aplicada ao bloco do meio. O bloco de cima é impedido de se mover por um arame que o liga ao suporte fixo. Os coeficientes de atrito estático para cada um dos três pares de superfícies de contato estão mostrados na figura. Determine o valor máximo que P pode atingir antes que qualquer deslizamento ocorra.



Solução. O diagrama de corpo livre de cada bloco está desenhado. As forças de atrito estão colocadas nas direções opostas ao movimento relativo que ocorreria se não houvesse atrito. Existem duas condições possíveis para movimento iminente. Ou o bloco de 50 kg desliza e o bloco de 40 kg permanece em seu lugar, ou os blocos de 50 e 40 kg se movem juntos, com o deslizamento ocorrendo entre o bloco de 40 kg e o plano inclinado. ①

As forças normais, que estão na direção y, podem ser determinadas sem referência às forças de atrito, que estão todas na direção x. Assim,

$$[\Sigma F_y = 0] \quad \text{(30-kg)} \quad N_1 - 30(9,81)\cos 30° = 0 \qquad N_1 = 255 \text{ N}$$

$$\text{(50-kg)} \quad N_2 - 50(9,81)\cos 30° - 255 = 0 \qquad N_2 = 680 \text{ N}$$

$$\text{(40-kg)} \quad N_3 - 40(9,81)\cos 30° - 680 = 0 \qquad N_3 = 1019 \text{ N}$$

Consideraremos arbitrariamente que apenas o bloco de 50 kg desliza, de modo que o bloco de 40 kg permanece em seu lugar. Assim, na condição de deslizamento iminente em ambas as superfícies do bloco de 50 kg, temos

$$[F_{máx} = \mu_s N] \quad F_1 = 0,30(255) = 76,5 \text{ N} \qquad F_2 = 0,40(680) = 272 \text{ N}$$

O equilíbrio de forças considerado no limiar do movimento para o bloco de 50 kg dá

$$[\Sigma F_x = 0] \quad P - 76,5 - 272 + 50(9,81)\text{ sen } 30° = 0 \qquad P = 103,1 \text{ N}$$

Verificamos, agora, a validade de nossa hipótese inicial. Para o bloco de 40 kg com $F_2 = 272$ N, a força de atrito F_3 seria dada por

$$[\Sigma F_x = 0] \quad 272 + 40(9,81)\text{ sen } 30° - F_3 = 0 \qquad F_3 = 468 \text{ N}$$

Mas o máximo valor possível de F_3 é $F_3 = \mu_s N_3 = 0,45(1019) = 459$ N. Assim, 468 N não podem ser sustentados e nossa hipótese inicial estava errada. Concluímos, portanto, que o deslizamento ocorre primeiro entre o bloco de 40 kg e o plano inclinado. Com o valor correto de $F_3 = 459$ N, o equilíbrio do bloco de 40 kg na iminência de seu movimento requer

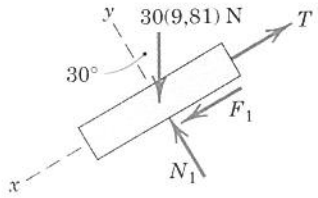
$$[\Sigma F_x = 0] \quad F_2 + 40(9,81)\text{ sen } 30° - 459 = 0 \qquad F_2 = 263 \text{ N} \quad ②$$

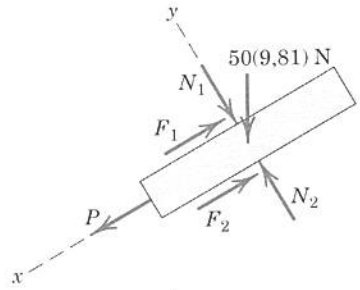
O equilíbrio do bloco de 50 kg dá, finalmente,

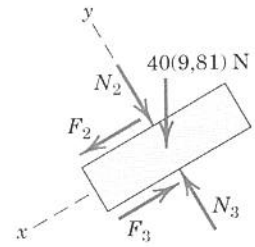
$$[\Sigma F_x = 0] \quad P + 50(9,81)\text{ sen } 30° - 263 - 76,5 = 0$$

$$P = 93,8 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Assim, com $P = 93,8$ N, o movimento se inicia para os blocos de 50 kg e de 40 kg agindo como um bloco único.







Sugestões Úteis

① Na ausência de atrito, o bloco do meio, sob a influência de P, teria um movimento maior do que o bloco de 40 kg e a força de atrito F_2 estaria na direção oposta ao movimento mostrado.

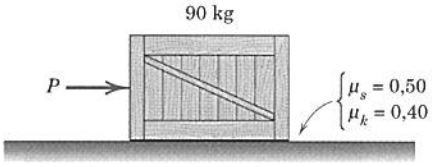
② Vemos agora que F_2 é menor do que $\mu_s N_2 = 272$ N.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

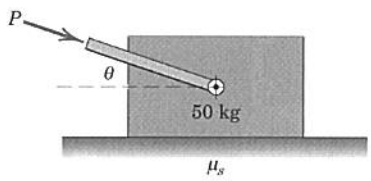
6/1 A força P é aplicada ao caixote de 90 kg, que está em repouso antes que ela seja aplicada. Determine o módulo e a direção da força de atrito F exercida pela superfície horizontal sobre o caixote se (*a*) $P = 300$ N, (*b*) $P = 400$ N e (*c*) $P = 500$ N.

Resp. (*a*) $F = 300$ N, (*b*) $F = 400$ N, (*c*) $F = 353$ N (todas para a esquerda)



Problema 6/1

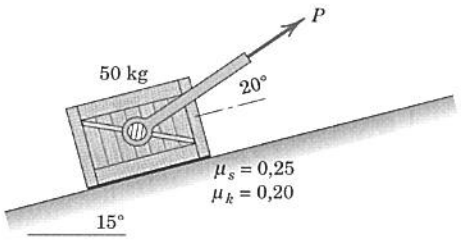
6/2 O bloco de 50 kg está em repouso sobre a superfície horizontal e uma força $P = 200$ N, cuja direção pode ser variada, é aplicada ao bloco. (*a*) Calcule o coeficiente de atrito estático μ_s entre o bloco e a superfície, se o bloco começa a deslizar quando θ é reduzido para 30°. (*b*) Se P é aplicado com $\theta = 45°$, calcule a força de atrito F.



Problema 6/2

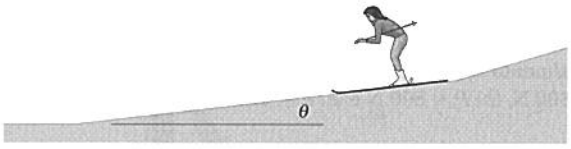
6/3 A força P é aplicada ao caixote de 50 kg quando ele está em repouso. Determine o módulo e a direção da força de atrito F exercida pela superfície sobre o caixote se (*a*) $P = 0$, (*b*) $P = 200$ N e (*c*) $P = 250$ N. (*d*) Que valor de P é necessário para iniciar o movimento para cima no plano inclinado? Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o caixote e o plano são $\mu_s = 0{,}25$ e $\mu_k = 0{,}20$, respectivamente.

Resp. (*a*) $F = 94{,}8$ N (para cima)
(*b*) $F = 61{,}0$ N (para baixo)
(*c*) $F = 77{,}7$ N (para baixo)
(*d*) $P = 239$ N



Problema 6/3

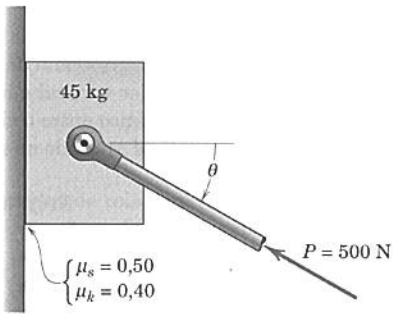
6/4 O projetista de um centro de esqui deseja ter uma parte da pista para iniciantes na qual a velocidade do esquiador permaneça aproximadamente constante. Testes indicam que os coeficientes médios de atrito entre os esquis e a neve valem $\mu_s = 0{,}10$ e $\mu_k = 0{,}08$. Qual deve ser o ângulo θ de inclinação da seção de velocidade constante?



Problema 6/4

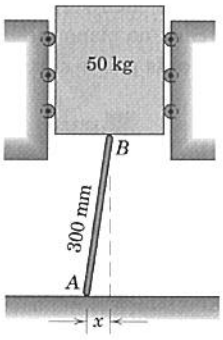
6/5 Determine o módulo e a direção da força de atrito que a parede vertical exerce sobre o bloco de 45 kg se (*a*) $\theta = 15°$ e (*b*) $\theta = 30°$.

Resp. (*a*) $F = 193{,}2$ N para cima, (*b*) $F = 191{,}4$ N para cima



Problema 6/5

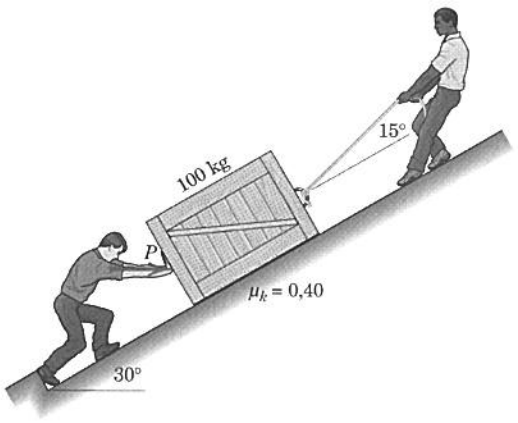
6/6 A barra fina é usada para sustentar o bloco de 50 kg em suas guias verticais. Se o coeficiente de atrito estático vale 0,30 na extremidade superior da barra e 0,40 na extremidade inferior, determine a força de atrito atuando em cada extremidade para $x = 75$ mm. Determine também o valor máximo de x para o qual a barra não deslizará.



Problema 6/6

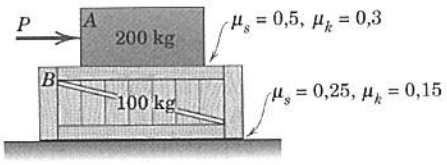
6/7 Dois homens estão deslizando um caixote de 100 kg para cima no plano inclinado. Se o homem de baixo empurra horizontalmente com uma força de 500 N e se o coeficiente de atrito dinâmico vale 0,40, determine a força trativa T que o homem de cima deve exercer na corda para manter o movimento do caixote.

Resp. $T = 465$ N



Problema 6/7

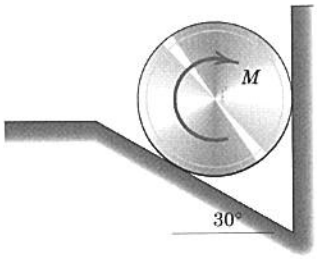
6/8 A força P é aplicada ao bloco A de 200 kg, que está apoiado em cima do caixote de 100 kg. O sistema está em repouso quando P é inicialmente aplicada. Determine o que acontece a cada corpo se (*a*) $P = 600$ N, (*b*) $P = 800$ N e (*c*) $P = 1200$ N.



Problema 6/8

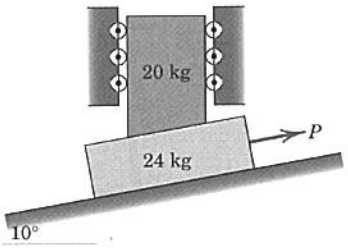
6/9 O cilindro homogêneo de 30 kg, com 400 mm de diâmetro, está em repouso apoiado contra as superfícies vertical e inclinada, como mostrado. Se o coeficiente de atrito estático entre o cilindro e as superfícies vale 0,30, calcule o momento M aplicado no sentido horário que faria o cilindro deslizar.

Resp. $M = 32{,}9$ N · m



Problema 6/9

6/10 Calcule a força P necessária para iniciar o movimento do bloco de 24 kg para cima no plano inclinado de 10°. O coeficiente de atrito estático para cada par de superfícies vale 0,30.

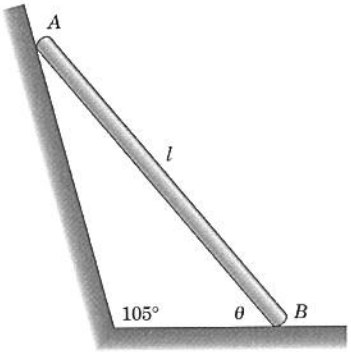


Problema 6/10

Problemas Representativos

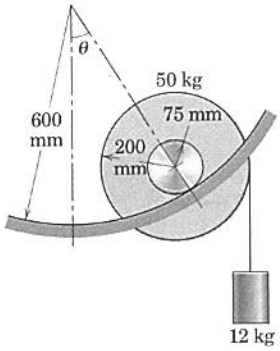
6/11 O poste uniforme de comprimento l e massa m está apoiado contra as superfícies mostradas. Se o coeficiente de atrito estático é $\mu_s = 0{,}25$ tanto em A quanto em B, determine o ângulo θ mínimo no qual o poste pode ser colocado antes que ele comece a deslizar.

Resp. $\theta = 59{,}9°$



Problema 6/11

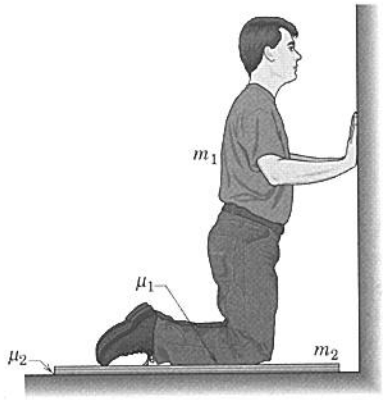
6/12 A roda de 50 kg rola sobre seu eixo subindo a rampa circular sob a ação do cilindro de 12 kg preso a um cabo enrolado a sua volta. Determine o ângulo θ para o qual a roda chega ao repouso, assumindo que o atrito é suficiente para impedir o deslizamento. Qual é o coeficiente de atrito mínimo que permitirá que essa posição seja atingida sem nenhum deslizamento?



Problema 6/12

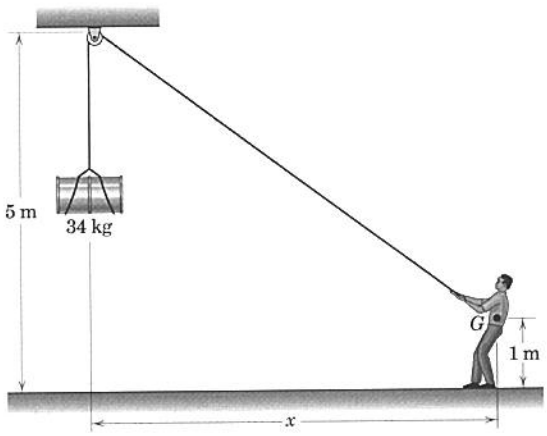
6/13 Uma pessoa (massa m_1) ajoelhada em um painel de compensado (massa m_2) deseja se empurrar e ao painel para longe da parede à direita. Determine a condição sobre μ_2 que lhe permitiria fazer isto, em vez dele deslizar em relação ao painel estacionário. Os dois coeficientes de atrito estático aplicáveis são μ_1 e μ_2. Avalie μ_2 para $m_1 = 80$ kg, $m_2 = 10$ kg e $\mu_1 = 0{,}60$.

Resp. $\mu_2 = 0{,}533$



Problema 6/13

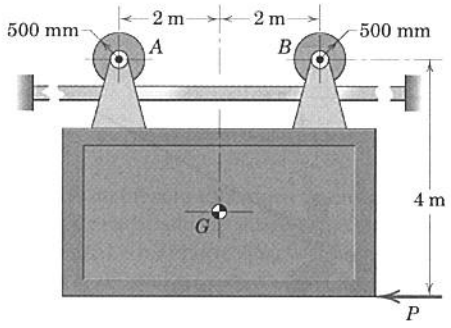
6/14 O homem pesando 80 kg, com centro de gravidade G, suporta o tambor de 34 kg, como mostrado. Ache a maior distância x na qual o homem pode se posicionar sem escorregar, se o coeficiente de atrito estático entre seus sapatos e o chão for de 0,40.



Problema 6/14

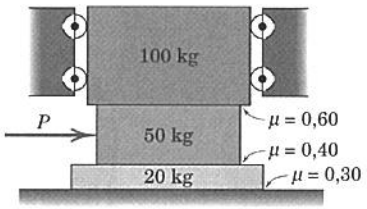
6/15 O painel vertical de 800 kg tem centro de massa em G. O painel é montado sobre rodas que permitem facilidade de movimento horizontal ao longo do trilho fixo. Se o mancal da roda em A trava, de forma que a roda não possa girar, calcule a força P necessária para deslizar o painel. O coeficiente de atrito dinâmico entre a roda e o trilho vale 0,30.

Resp. $P = 932$ N



Problema 6/15

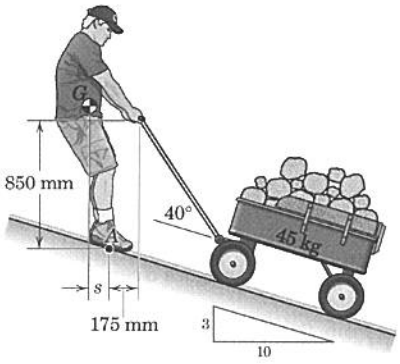
6/16 Determine a força horizontal P necessária para causar deslizamento. Os coeficientes de atrito para os três pares de superfícies em contato estão indicados. O bloco superior é livre para se mover verticalmente.



Problema 6/16

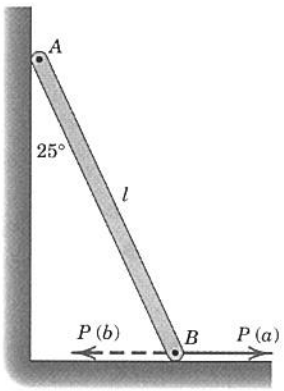
6/17 Uma homem de 82 kg puxa um carrinho de 45 kg para cima na rampa a velocidade constante. Determine o coeficiente de atrito estático mínimo μ_s para o qual os sapatos do homem não escorregarão. Determine também a distância s necessária para o equilíbrio do corpo do homem.

Resp. $\mu_s = 0{,}408$, $s = 126{,}2$ mm



Problema 6/17

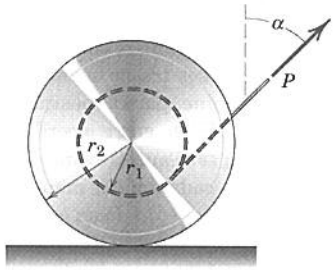
6/18 A barra uniforme AB de massa m e comprimento l está apoiada contra a parede vertical como mostrado. O coeficiente de atrito estático entre as superfícies de apoio e as extremidades da barra é $\mu_s = 0{,}30$. Determine a força P que causa deslizamento iminente se $P\,(a)$ atua para a direita e (b) atua para a esquerda.



Problema 6/18

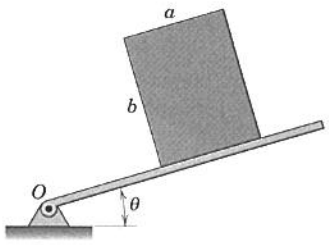
6/19 A roda mostrada rolará para a esquerda quando o ângulo α do cabo for pequeno. Quando α for grande, a roda rolará para a direita. Determine, por inspeção da geometria do diagrama de corpo livre, o ângulo α para o qual a roda não rolará. Se o coeficiente de atrito estático é μ_s e a massa da roda é m, determine o valor de P para o qual a roda girará para o valor crítico de α.

Resp. $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{r_1}{r_2}$, $P = \dfrac{\mu_s m g r_2}{r_1 + \mu_s\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}$



Problema 6/19

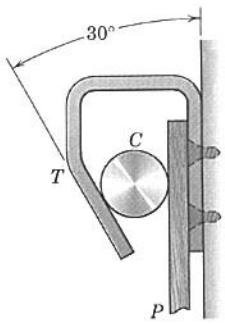
6/20 O bloco retangular homogêneo de massa m está em repouso no plano inclinado, o qual é articulado em relação a um eixo horizontal passando por O. Se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é μ, especifique as condições que determinam se o bloco tomba antes de deslizar ou desliza antes de tombar, a medida que o ângulo θ é gradualmente aumentado.



Problema 6/20

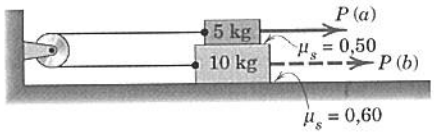
6/21 O trilho invertido T com o cilindro móvel livre C formam um sistema que é projetado para segurar papel ou outros materiais finos. O coeficiente de atrito estático é μ para todas as interfaces. Qual é o valor mínimo de μ que garante que o dispositivo funcionará independente do peso P do material preso?

Resp. $\mu = 0{,}268$



Problema 6/21

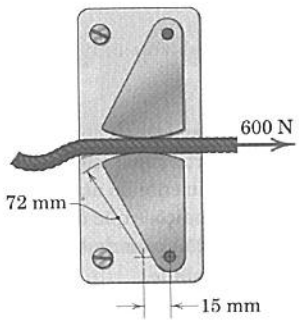
6/22 O sistema de dois blocos, cabo e polia fixa está inicialmente em repouso. Determine a força horizontal P necessária para causar movimento quando (a) P é aplicada ao bloco de 5 kg e (b) P é aplicada ao bloco de 10 kg. Determine para cada caso a força trativa correspondente, T, no cabo.



Problema 6/22

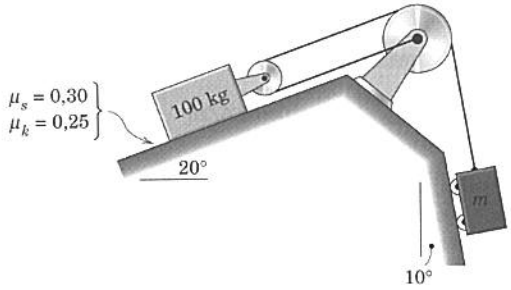
6/23 A figura mostra um dispositivo, chamado presilha de travamento, que prende uma corda sob tração devida às grandes forças de atrito desenvolvidas. Determine, para a posição mostrada, o coeficiente mínimo de atrito estático μ_s entre a corda e as superfícies do came, para o qual a presilha será autotravante. Encontre também o módulo da reação total R em cada um dos mancais do came.

Resp. $\mu_s = 0{,}208$, $R = 1471$ N



Problema 6/23

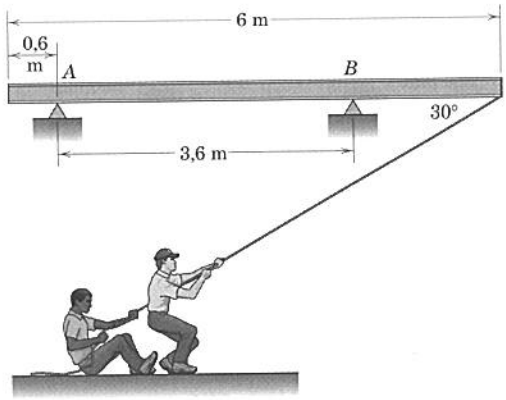
6/24 Determine a faixa das massas m para a qual o bloco de 100 kg está em equilíbrio. Todas as polias e roldanas têm atrito desprezível.



Problema 6/24

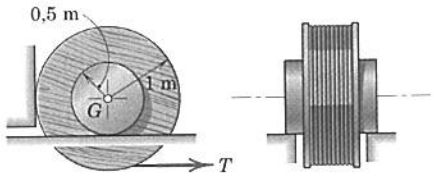
6/25 Que força P os dois homens devem exercer na corda para deslizar a prancha uniforme de 6 m sobre os suportes suspensos? A prancha tem massa de 100 kg e o coeficiente de atrito dinâmico entre a prancha e cada suporte é 0,50.

Resp. $P = 796$ N



Problema 6/25

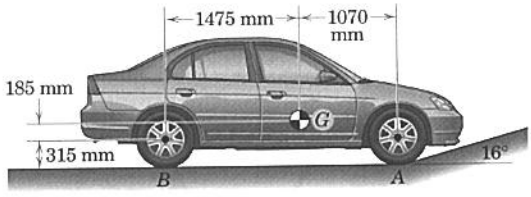
6/26 Calcule a força T necessária para girar o carretel de cabo telefônico de 200 kg, que se apóia em seu eixo e está encostado contra uma parede vertical. O coeficiente de atrito dinâmico para cada par de superfícies em contato é 0,60.



Problema 6/26

6/27 O carro de 1600 kg está começando a subir a rampa de 16°. Se o carro tem tração traseira, determine o coeficiente de atrito estático mínimo requerido em B.

Resp. $\mu_s = 0{,}365$



Problema 6/27

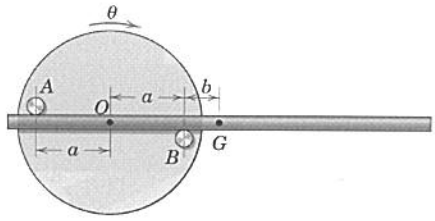
6/28 Repita o Prob. 6/27, mas agora o carro tem tração dianteira.

6/29 Repita o Prob. 6/27, mas agora o carro tem tração nas quatro rodas. Assuma que o deslizamento ocorre simultaneamente em A e B.

Resp. $\mu_s = 0{,}1575$

6/30 A barra uniforme com centro de massa em G é suportada pelas cavilhas A e B que estão presas à roda. Se o coeficiente de atrito entre a barra e as cavilhas é μ, determine o ângulo θ que a roda pode ser lentamente girada em torno de seu eixo horizontal passando por O, começando a partir da posição mostrada, antes que a barra come-

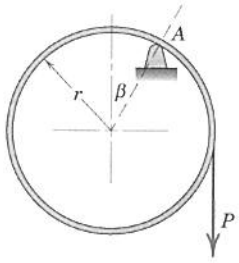
ce a deslizar. Despreze o diâmetro da barra comparado com as outras dimensões.



Problema 6/30

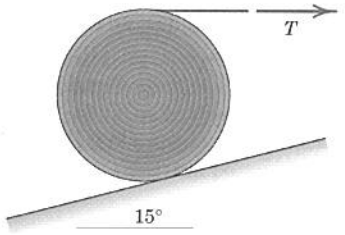
6/31 Um anel de metal com espessura desprezível tem massa m e raio médio r e está pendurado em um suporte em A. Se o coeficiente de atrito entre o anel e o suporte é μ, determine a força vertical P aplicada à periferia do anel necessária para fazer o anel deslizar no suporte. Determine também o ângulo β no qual ocorre deslizamento.

Resp. $P = mg\dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}-\mu}$, $\beta = \tan^{-1}\mu$



Problema 6/31

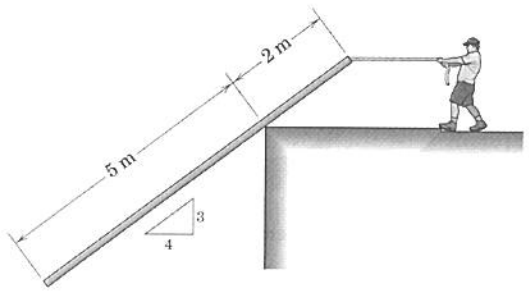
6/32 O rolo de papel deve ser girado lentamente para cima da rampa por uma força trativa T aplicada ao papel, à medida que ele é desenrolado horizontalmente. O coeficiente de atrito entre o rolo e a rampa é 0,20. Determine se o papel gira sem deslizar ou se ele desliza.



Problema 6/32

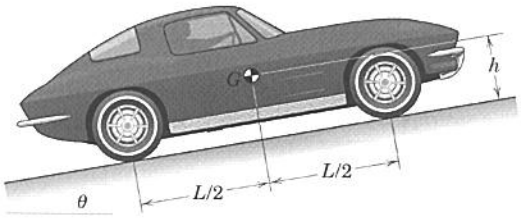
6/33 Assumindo que o trabalhador seja forte o suficiente, será possível manter o equilíbrio da prancha uniforme de 7 m na posição mostrada, exercendo uma força horizontal na corda? O coeficiente de atrito estático entre a prancha de 60 kg e o topo do edifício é 0,30. Se a resposta for sim, então calcule a força de atrito que existe no estado de equilíbrio.

Resp. $F = 117{,}7$ N



Problema 6/33

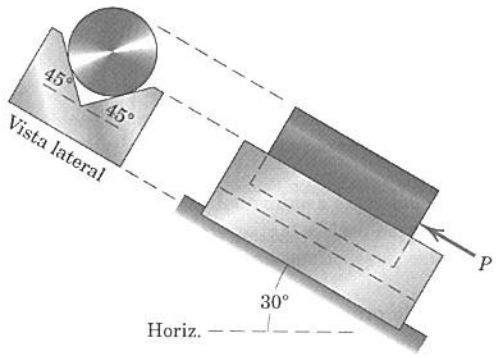
6/34 Dois automóveis, ambos tendo o centro de massa localizado como mostrado, a meia distância entre os eixos traseiro e dianteiro, são idênticos exceto que um tem tração dianteira e o outro tem tração traseira. Os carros são dirigidos à velocidade constante subindo rampas de várias inclinações. De um ponto de vista teórico de projeto, que carro subiria a rampa de maior ângulo de inclinação θ? Justifique sua resposta.



Problema 6/34

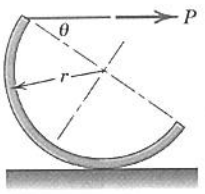
6/35 O cilindro sólido de 10 kg está em repouso no bloco em V inclinado. Se o coeficiente de atrito estático entre o cilindro e o bloco vale 0,50, determine (*a*) a força de atrito F atuando sobre cada lado do cilindro antes que a força P seja aplicada e (*b*) o valor de P necessário para iniciar o movimento do cilindro para cima no plano inclinado.

Resp. (*a*) $F = 24{,}5$ N, (*b*) $P = 109{,}1$ N



Problema 6/35

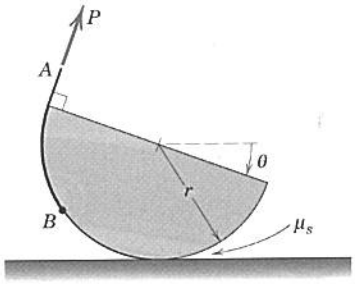
6/36 A casca semicilíndrica de massa m e raio r é girada de um ângulo θ pela força horizontal P aplicada a sua borda. Se o coeficiente de atrito é μ_s, determine o ângulo θ no qual a casca escorrega sobre a superfície horizontal à medida que P aumenta gradualmente. Que valor de μ_s permitirá que θ atinja 90°?



Problema 6/36

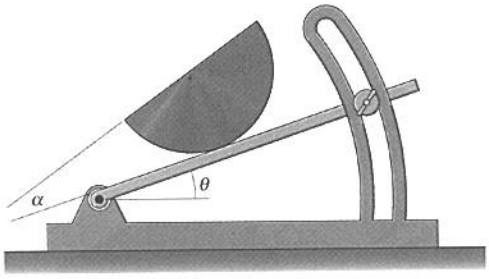
6/37 O semicilindro homogêneo repousa sobre uma superfície horizontal e está submetido a uma força P aplicada a um cabo firmemente preso a sua periferia. A força P é lentamente aumentada e mantida normal à superfície plana do semicilindro. Se é observado deslizamento no instante que θ atinge 40°, determine o coeficiente de atrito estático μ_s e o valor de P quando ocorre o deslizamento.

Resp. $\mu_s = 0{,}1223, P = 0{,}1661\ mg$



Problema 6/37

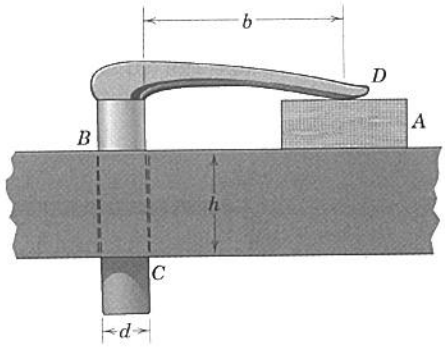
6/38 Se o coeficiente de atrito entre o cilindro semicircular sólido e o plano inclinado é 0,30, determine o valor máximo do ângulo θ com a horizontal até o qual o plano pode ser inclinado antes que o cilindro escorregue. Para essa condição, qual é o ângulo correspondente α pelo qual o cilindro terá girado em relação ao plano inclinado?



Problema 6/38

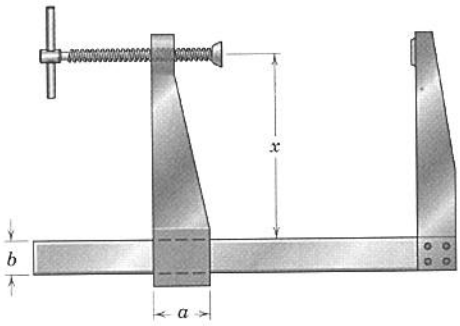
6/39 A cabeça do grampo de marceneiro é soldada a seu eixo de diâmetro d e é projetada para prender a peça de trabalho A em seu lugar. O grampo é ajustado batendo inicialmente em sua cabeça com uma marreta. As forças de atrito nos pontos de contato B e C impedem que o eixo deslize para cima, dentro do buraco levemente superdimensionado da bancada. Se o coeficiente de atrito estático entre o eixo e a bancada é μ_s, determine a distância mínima do vão b para a qual o grampo não escorregará. A força de aperto entre a cabeça e a peça em D pode ser considerada vertical, e a pequena inclinação do eixo em relação à vertical pode ser desprezada.

$$\textit{Resp. } b = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\mu_s} - d\right)$$



Problema 6/39

6/40 A garra esquerda móvel de um sargento pode ser deslocada ao longo do conjunto para aumentar a capacidade de pegada do grampo. Para prevenir deslizamento da garra no trilho quando o grampo está sob carga, a dimensão x deve exceder certo valor mínimo. Para valores dados de a e b e um coeficiente de atrito estático μ_s, especifique esse valor mínimo de projeto x para evitar deslizamento da garra.

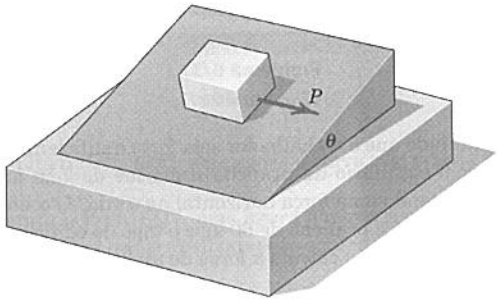


Problema 6/40

6/41 Um bloco uniforme de massa m está em repouso para uma inclinação θ. Determine a força máxima P que pode ser aplicada no bloco no sentido mostrado, antes que ocorra deslizamento. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano inclinado é μ_s. Determine também o ângulo β entre a direção horizontal de P e a direção do movimento inicial do bloco.

$$\textit{Resp. } P = mg\sqrt{\mu_s{}^2 \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$$

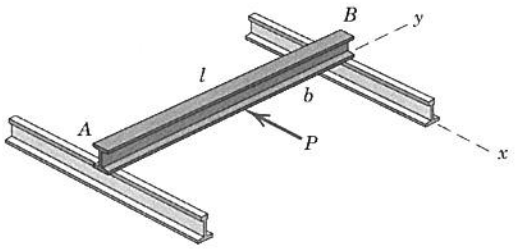
$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{mg \operatorname{sen}\theta}{P}\right)$$



Problema 6/41

6/42 A viga em I uniforme, de massa m é apoiada em suas extremidades sobre dois trilhos horizontais fixos como mostrado. Determine a força horizontal máxima P que pode ser aplicada sem fazer

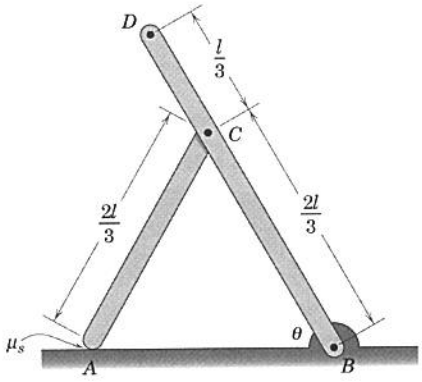
com que a viga deslize, e encontre o valor da força de atrito correspondente em A. O coeficiente de atrito estático entre a viga e os trilhos é μ_s. Considere, também, $b < l/2$



Problema 6/42

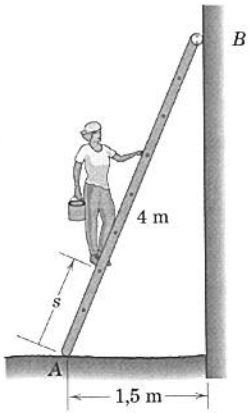
6/43 As duas barras AC e BD são feitas do mesmo material. Determine o ângulo θ no qual a barra AC deslizará e faça um gráfico de θ em função do coeficiente de atrito estático μ_s na faixa $0 \le \mu_s \le 1$. O atrito nos dois pinos é desprezível. Especifique os valores de θ para $\mu_s = 0$; 0,5 e 1.

Resp. $\theta \to 90°$ à medida que $\mu_s \to 0°$, $\theta = 51{,}1°$ para $\mu_s = 0{,}50$
$\theta = 31{,}8°$ para $\mu_s = 1$



Problema 6/43

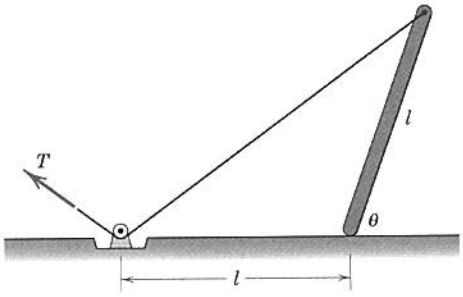
6/44 Determine a distância s que a pintora de 90 kg pode subir sem fazer com que a escada de 4 m escorregue em sua extremidade inferior A. O topo da escada de 15 kg tem uma pequena roldana e, no chão, o coeficiente de atrito estático vale 0,25. O centro de massa da pintora está diretamente sobre seu pé.



Problema 6/44

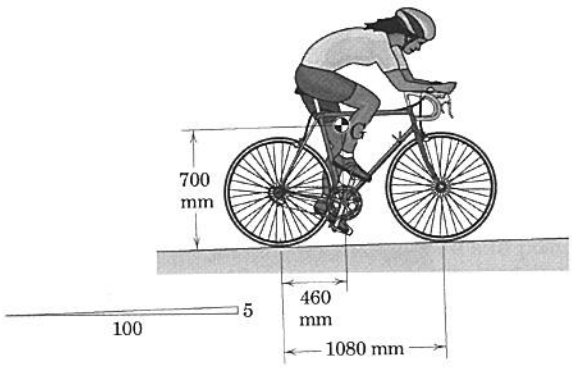
6/45 A barra esbelta uniforme é abaixada lentamente desde sua posição ereta ($\theta = 90°$) por meio do cabo preso a sua extremidade superior e que passa sob a pequena polia fixa. Se a barra escorrega em sua extremidade inferior quando $\theta = 40°$, determine o coeficiente de atrito estático da superfície horizontal.

Resp. $\mu_s = 0{,}761$



Problema 6/45

6/46 Uma mulher pedala sua bicicleta à velocidade constante em uma estrada escorregadia com inclinação de 5%. A mulher e a bicicleta têm uma massa combinada de 82 kg, com centro de massa em G. Se a roda traseira está na iminência de escorregar, determine o coeficiente de atrito μ_s entre o pneu traseiro e a estrada. Se o coeficiente de atrito fosse duplicado, qual seria a força de atrito F atuando sobre a roda traseira? (Por que podemos desprezar o atrito sob a roda dianteira?)



Problema 6/46

6/47 Um bloco de massa m_0 é colocado entre a parede vertical e a extremidade superior, A, da barra esbelta uniforme de massa m. Se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede e também entre o bloco e a barra vale μ_s, determine a expressão geral para o valor mínimo, $\theta_{mín}$, do ângulo θ para o qual o bloco permanecerá em equilíbrio. Avalie sua expressão para as condições $\mu_s = 0{,}5$ e

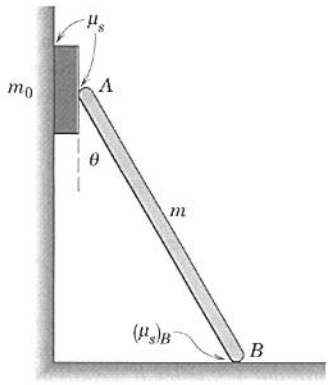
(*a*) $\frac{m}{m_0} = 0{,}1$,

(*b*) $\frac{m}{m_0} = 1$, e

(*c*) $\frac{m}{m_0} = 10$.

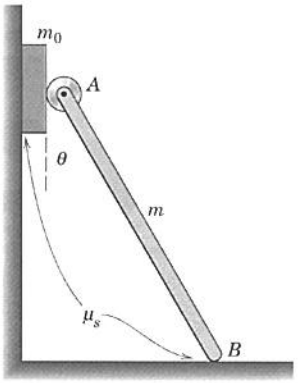
Para cada caso, especifique o coeficiente de atrito estático mínimo $(\mu_s)_B$ necessário para evitar escorregamento em B.

Resp. (*a*) $\theta_{mín} = 61{,}2°$, $(\mu_s)_B = 1{,}667$ (unusual!)
(*b*) $\theta_{mín} = 45°$, $(\mu_s)_B = 0{,}667$
(*c*) $\theta_{mín} = 10{,}30°$, $(\mu_s)_B = 0{,}0952$



Problema 6/47

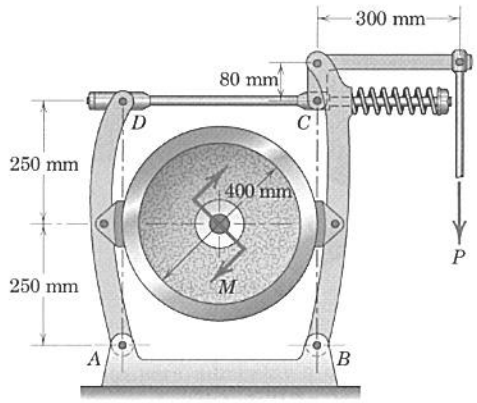
6/48 Um bloco de massa m_0 é colocado entre a parede vertical e o pequeno rolete ideal na extremidade superior, A, da barra esbelta uniforme de massa m. A extremidade inferior, B, da barra repousa sobre a superfície horizontal. Se o coeficiente de atrito estático em B e também entre o bloco e a parede vale μ_s, determine a expressão geral para o valor mínimo, $\theta_{mín}$, de θ para o qual o bloco permanecerá em equilíbrio. Avalie sua expressão para $\mu_s = 0{,}50$ e $m/m_0 = 10$. Para essas condições, verifique a possibilidade de haver deslizamento em B.



Problema 6/48

6/49 O freio de bloco duplo mostrado é aplicado ao rotor por meio da ação da mola. Para soltar o freio, uma força P é aplicada na barra de controle. Na posição de operação com $P = 0$, a mola está comprimida em 30 mm. Selecione uma mola com constante k (rigidez) apropriada, que fornecerá força suficiente para frear o rotor sob o torque $M = 100$ N · m, se o coeficiente de atrito aplicável para ambas as sapatas do freio vale 0,20. Despreze a dimensão das sapatas.

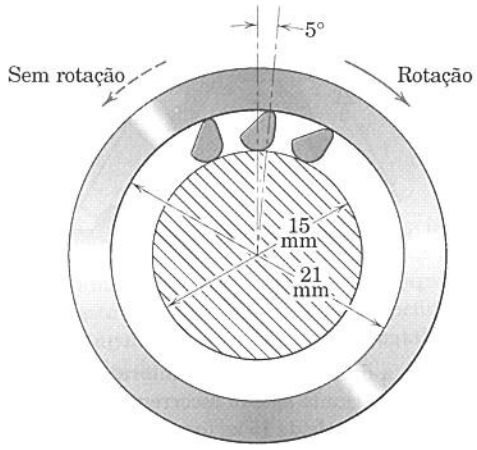
Resp. $k = 20{,}8(10^3)$ N/m



Problema 6/49

▶6/50 A embreagem de rotação em miniatura é projetada para permitir que o anel externo gire no sentido horário em relação ao eixo (hachurado), mas impede rotação no sentido anti-horário. Isso é obtido pelo engate por atrito das engrenagens (apenas três são mostradas). Calcule o coeficiente de atrito mínimo, $\mu_{mín}$, para as superfícies em contato, de forma a impedir rotação do anel externo no sentido anti-horário.

Resp. $\mu_{mín} = 0{,}309$



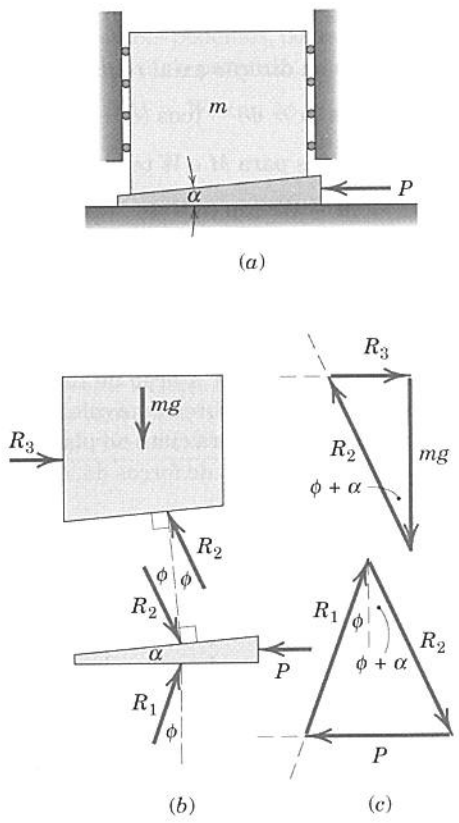
Problema 6/50

SEÇÃO B APLICAÇÕES DE ATRITO EM MÁQUINAS

Na seção B investigamos a ação do atrito em várias aplicações de máquinas. Como as condições nessas aplicações são normalmente limites do atrito estático ou dinâmico, geralmente usaremos a variável μ (em vez de μ_s ou μ_k). Dependendo se o movimento é iminente ou se está realmente ocorrendo, μ pode ser interpretado como sendo ou o coeficiente de atrito estático ou o dinâmico.

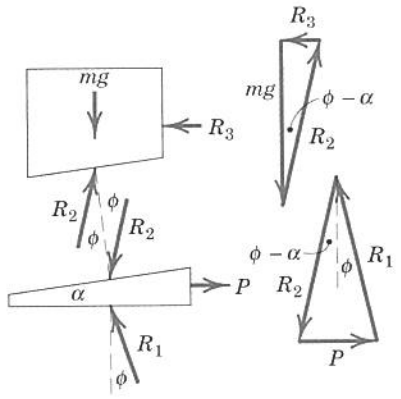
6/4 Cunhas

Uma cunha é uma das máquinas mais simples e mais úteis. Uma cunha é usada para produzir pequenos ajustes na posição de um corpo ou aplicar grandes forças. Cunhas dependem extensamente do atrito para funcionarem. Quando o escorregamento de uma cunha é iminente, a força resul-



Forças para levantar uma carga

Figura 6/3



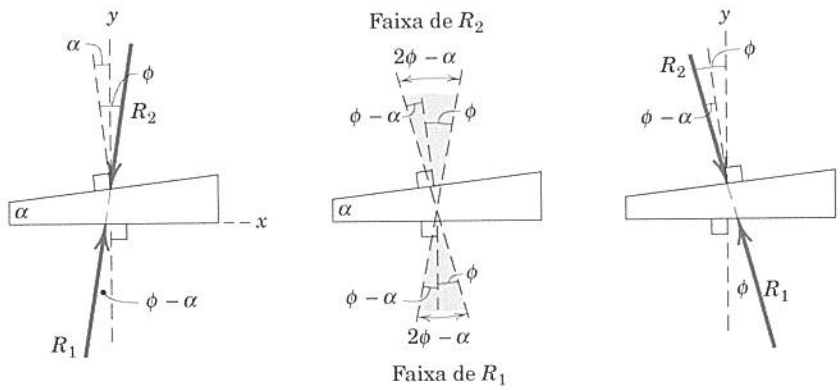
Forças para abaixar uma carga

Figura 6/5

tante em cada superfície deslizante da cunha estará inclinada em relação à normal à superfície por uma quantidade igual ao ângulo de atrito. A componente da resultante ao longo da superfície é a força de atrito, que está sempre na direção oposta ao movimento da cunha relativamente às superfícies em contato.

A Fig. 6/3*a* mostra uma cunha usada para posicionar ou levantar uma grande massa m, para a qual o carregamento vertical é mg. O coeficiente de atrito para cada par de superfícies é $\mu = \tan \phi$. A força P necessária para movimentar a cunha é determinada a partir do equilíbrio dos triângulos de forças na carga e na cunha. Os diagramas de corpo livre estão mostrados na Fig. 6/3*b*, onde as reações estão inclinadas de um ângulo ϕ a partir de suas respectivas normais e estão no sentido de se opor ao movimento. Desprezamos a massa da cunha. Dos diagramas de corpo livre escrevemos as condições de equilíbrio de forças igualando a zero o somatório dos vetores de força agindo em cada corpo. As soluções dessas equações estão mostradas na parte *c* da figura, onde R_2 foi determinado primeiramente no diagrama de cima usando o valor conhecido de mg. A força P é então determinada a partir do triângulo de baixo, uma vez que R_2 tenha sido determinado.

Se P for removida e a cunha permanecer no lugar, o equilíbrio da cunha requer que as reações iguais R_1 e R_2 sejam colineares, como mostrado na Fig. 6/4, onde o ângulo de cunha, α, é considerado menor do que ϕ. A parte *a* da figura representa o limiar do movimento na superfície superior e a parte *c* da figura representa o limiar do movimento na superfície inferior. Para que a cunha escorregue de sua posição, o movimento deve ocorrer simultaneamente em *ambas* as superfícies; de outro modo a cunha é *autotravante* e existe uma faixa finita de possíveis posições angulares intermediárias de R_1 e R_2 para as quais a cunha permanecerá no lugar. A Fig. 6/4*b* ilustra essa faixa e mostra que o movimento simultâneo não é possível se $\alpha < 2\phi$. O leitor é encorajado a cons-



(*a*) Limiar do deslizamento na superfície superior

(*b*) Faixa de $R_1 = R_2$ para que não haja deslizamento

(*c*) Limiar do deslizamento na superfície inferior

Figura 6/4

truir diagramas adicionais para o caso em que $\alpha > \phi$ e verificar que a cunha é autotravante enquanto $\alpha < 2\phi$.

Se a cunha é autotravante e precisa ser retirada, um puxão P na cunha será necessário. Para se opor ao início do novo movimento, as reações R_1 e R_2 devem atuar nos lados opostos de suas normais, em relação àqueles quando a cunha foi colocada. A solução pode ser obtida como no caso do levantamento da carga. Os diagramas de corpo livre e os polígonos de vetores para essa condição estão mostrados na Fig. 6/5.

Problemas com cunhas se prestam a soluções gráficas como indicado nas três figuras. A precisão de uma solução gráfica é facilmente mantida dentro de tolerâncias consistentes com a incerteza dos coeficientes de atrito. Soluções algébricas podem também ser obtidas da trigonometria dos polígonos de equilíbrio.

6/5 Parafusos

Parafusos são empregados para prender e para transmitir potência ou movimento. Em cada caso, o atrito desenvolvido nas roscas determina fundamentalmente a ação do parafuso. Para transmitir potência ou movimento a rosca quadrada é mais eficiente do que a rosca em V e a análise aqui será restrita à rosca quadrada.

Análise de Força

Considere o torno de bancada de rosca quadrada, Fig. 6/6, sob a ação da carga axial W e de um momento M aplicado em relação ao eixo do parafuso. O parafuso tem um passo L (avanço por revolução) e um raio médio r. A força R exercida pela rosca da estrutura do torno em uma pequena porção representativa da rosca do parafuso está mostrada no diagrama de corpo livre do parafuso. Reações similares existem em todos os segmentos da rosca do parafuso onde ocorre contato com a rosca da base.

Se M for apenas o suficiente para girar o parafuso, a rosca do parafuso deslizará em torno e para cima da rosca fixa da estrutura. O ângulo ϕ feito por R com a normal à rosca é o ângulo de atrito, de modo que $\tan \phi = \mu$. O momento de R em relação ao eixo vertical do parafuso vale $Rr \operatorname{sen} (\alpha + \phi)$ e o momento total devido a todas as reações nas roscas é $\Sigma Rr \operatorname{sen} (\alpha + \phi)$. Como $r \operatorname{sen}(\alpha + \phi)$ aparece em cada termo, podemos eliminá-lo. A equação de equilíbrio de momentos para o parafuso será

$$M = [r \operatorname{sen} (\alpha + \phi)] \Sigma R$$

O equilíbrio de forças na direção axial requer, ainda, que

$$W = \Sigma R \cos (\alpha + \phi) = [\cos (\alpha + \phi)] \Sigma R$$

Combinando as equações para M e W tem-se

$$M = Wr \tan (\alpha + \phi) \qquad \textbf{(6/3)}$$

Para determinar o ângulo de hélice, α, desenrole uma volta completa da rosca do parafuso e observe que $\alpha = \tan^{-1} (L/2\pi r)$.

Podemos usar a rosca desenrolada do parafuso como um modelo alternativo para simular a ação de todo o parafuso, como mostrado na Fig. 6/7*a*. A força equivalente necessária para empurrar a rosca móvel para cima no plano inclinado é $P = M/r$, e o triângulo de vetores de forças dá, diretamente, a Eq. 6/3.

Condições para Desaparafusar

Se o momento M for retirado, a força de atrito muda de sentido, de modo que ϕ é medido para o outro lado da normal à rosca. O parafuso permanecerá em seu lugar e será autotravante desde que $\alpha < \phi$ e estará no limiar do desaparafusamento se $\alpha = \phi$.

Para abaixar a carga desaparafusando o parafuso, devemos reverter a direção de M, enquanto $\alpha < \phi$. Essa condição está ilustrada na Fig. 6/7*b* para a rosca simulada sobre o plano com inclinação constante. Uma força equivalente $P = M/r$

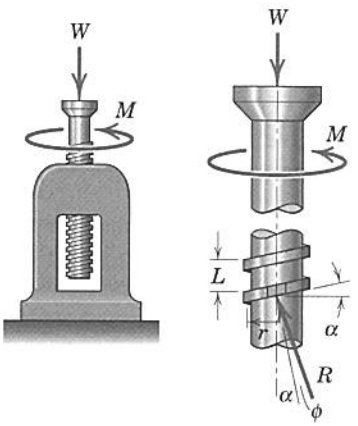
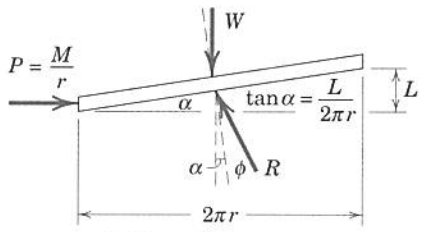
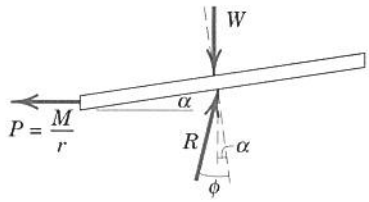


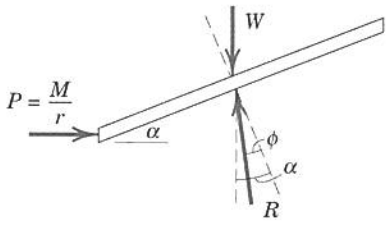
Figura 6/6



(*a*) Para elevar a carga



(*b*) Para abaixar a carga ($\alpha < \phi$)



(*c*) Para abaixar a carga ($\alpha > \phi$)

Figura 6/7

deve ser aplicada à rosca para puxá-la para baixo no plano. Do triângulo de vetores podemos, portanto, obter o momento necessário para abaixar o parafuso, que é

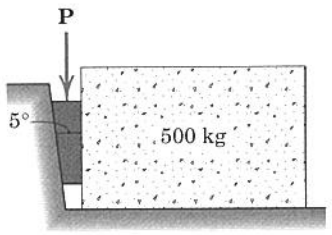
$$M = Wr \tan(\phi - \alpha) \qquad \textbf{(6/3a)}$$

Se $\alpha > \phi$, o parafuso irá se desaparafusar por si mesmo e a Fig. 6/7c mostra que o momento necessário para prevenir o desaparafusamento é

$$M = Wr \tan(\alpha - \phi) \qquad \textbf{(6/3b)}$$

Exemplo 6/6

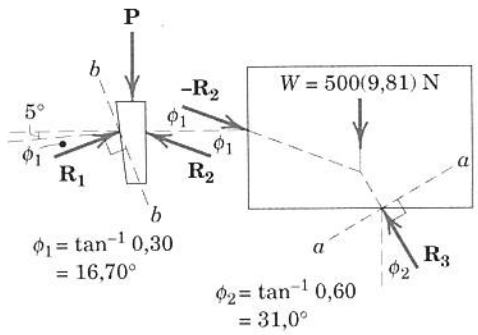
A posição horizontal do bloco retangular de concreto de 500 kg é ajustada por uma cunha de 5° sob a ação da força **P**. Se o coeficiente de atrito estático para ambos os pares das superfícies da cunha vale 0,30 e se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície horizontal vale 0,60, determine a menor força P necessária para mover o bloco.



Solução. Os diagramas de corpo rígido da cunha e do bloco estão desenhados com as reações $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ e $\mathbf{R}_3$ inclinadas em relação a suas normais pelo valor dos ângulos de atrito para o limiar do movimento. O ângulo de atrito para o limite do atrito estático é dado por $\phi = \tan^{-1}\mu$. Cada um dos dois ângulos de atrito é calculado e mostrado no diagrama. ①

Iniciamos nosso diagrama vetorial fazendo o equilíbrio do bloco em um ponto conveniente A e desenhamos o único vetor conhecido, o peso **W** do bloco. A seguir, adicionamos $\mathbf{R}_3$, cuja inclinação de 31,0° a partir da vertical é agora conhecida. O vetor $-\mathbf{R}_2$, cuja inclinação de 16,70° a partir da horizontal é também conhecida, deve fechar o polígono para haver equilíbrio. Assim, o ponto B no polígono de baixo é determinado pela interseção das direções conhecidas de $\mathbf{R}_3$ e $-\mathbf{R}_2$, e seus módulos tornam-se conhecidos.

Para a cunha, desenhamos $\mathbf{R}_2$, que é agora conhecida, e somamos $\mathbf{R}_1$, cuja direção é conhecida. As direções de $\mathbf{R}_1$ e **P** se interceptam em C, dando, assim, a solução para o módulo de **P**.



Solução algébrica. A escolha mais simples dos eixos de referência para propósito de cálculo é, para o bloco, na direção a-a normal a $\mathbf{R}_3$ e, para a cunha, na direção b-b normal a $\mathbf{R}_1$. O ângulo entre $\mathbf{R}_2$ e a direção a vale 16,70° + 31,0° = 47,7°. Assim, para o bloco ②

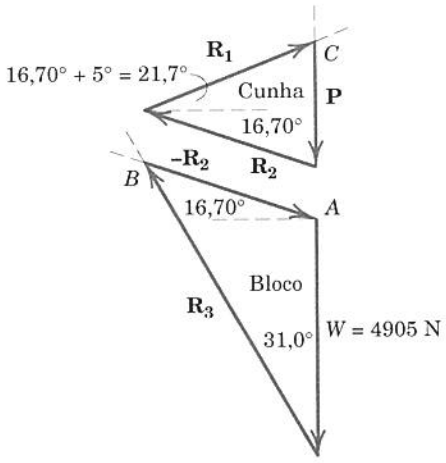
$$[\Sigma F_a = 0] \qquad 500(9{,}81) \operatorname{sen} 31{,}0° - R_2 \cos 47{,}7° = 0$$

$$R_2 = 3750 \text{ N}$$

Para a cunha, o ângulo entre $\mathbf{R}_2$ e a direção b vale $90° - (2\phi_1 + 5°) = 51{,}6°$, e o ângulo entre **P** e a direção b vale $\phi_1 + 5° = 21{,}7°$. Assim,

$$[\Sigma F_b = 0] \qquad 3750 \cos 51{,}6° - P \cos 21{,}7° = 0$$

$$P = 2500 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$



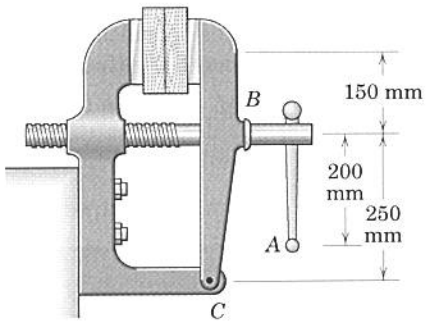
Solução gráfica. A precisão da solução gráfica está bem dentro da incerteza dos coeficientes de atrito e dá um resultado simples e direto. Colocando-se os vetores em uma escala razoável na seqüência descrita, obtemos facilmente os módulos de **P** e dos **R**s, medindo-os diretamente nos diagramas.

Sugestões Úteis

① Certifique-se de observar que as reações estão inclinadas em relação a suas normais no sentido de se opor ao movimento. Da mesma forma, observamos as reações $\mathbf{R}_2$ e $-\mathbf{R}_2$ iguais e opostas.

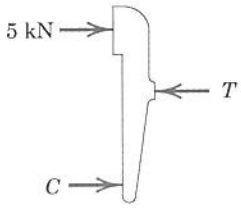
② Deve ficar evidente que evitamos equações simultâneas eliminando $\mathbf{R}_3$ para o bloco e $\mathbf{R}_1$ para a cunha.

Exemplo 6/7



O parafuso de rosca simples do torno de bancada tem um diâmetro médio de 25 mm e um passo (avanço por volta) de 5 mm. O coeficiente de atrito estático nas roscas vale 0,20. Uma força de 300 N, aplicada normal à manopla em A, produz uma força de aperto de 5 kN entre as garras do torno. (a) Determine o momento de atrito M_B, desenvolvido em B, devido ao movimento do parafuso contra o corpo da garra. (b) Determine a força Q aplicada normal à manopla em A necessária para afrouxar o torno.

Solução. Do diagrama de corpo livre da garra obtemos primeiro a força trativa T no parafuso.



$$[\Sigma M_C = 0] \qquad 5(400) - 250T = 0 \qquad T = 8 \text{ kN}$$

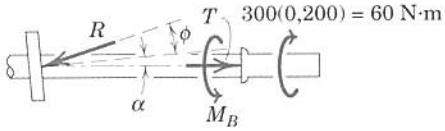
O ângulo de hélice α e o ângulo de atrito ϕ para a rosca são dados por

① $$\alpha = \tan^{-1}\frac{L}{2\pi r} = \tan^{-1}\frac{5}{2\pi(12{,}5)} = 3{,}64°$$

$$\phi = \tan^{-1}\mu = \tan^{-1}0{,}20 = 11{,}31°$$

onde o raio médio da rosca é $r = 12{,}5$ mm.

(a) Para apertar. O parafuso isolado está simulado pelo diagrama de corpo livre mostrado, onde todas as forças atuando nas roscas do parafuso são representadas por uma única força R inclinada pelo ângulo de atrito ϕ a partir da normal à rosca. O momento aplicado em torno do eixo do parafuso vale 300(0,200) = 60 N · m no sentido horário, como visto a partir da frente do torno. O momento de atrito M_B devido às forças de atrito atuando no anel em B está na direção anti-horária, para se opor ao movimento iminente. Da Eq. 6/3 com T no lugar de W, o momento resultante agindo no parafuso vale



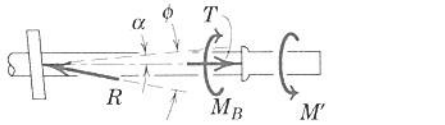
(a) Para apertar

$$M = Tr\tan(\alpha + \phi)$$

$$60 - M_B = 8000(0{,}0125)\tan(3{,}64° + 11{,}31°)$$

$$M_B = 33{,}3 \text{ N·m}$$

(b) Para afrouxar. O diagrama de corpo livre do parafuso no limiar de ser afrouxado está mostrado com R atuando no ângulo de atrito a partir da normal e na direção para ② se opor ao movimento iminente. Também está mostrado o momento de atrito $M_B = 33{,}3$ N · m atuando no sentido horário, para se opor ao movimento. O ângulo entre R e o eixo do parafuso é, agora, $\phi - \alpha$, e usamos a Eq. 6/3a com o momento resultante igual ao momento aplicado M' menos M_B. Assim



(b) Para afrouxar

$$M = Tr\tan(\phi - \alpha)$$

$$M' - 33{,}3 = 8000(0{,}0125)\tan(11{,}31° - 3{,}64°)$$

$$M' = 46{,}8 \text{ N·m}$$

Assim, a força na manopla necessária para afrouxar o torno é

$$Q = M'/d = 46{,}8/0{,}2 = 234 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestões Úteis

① Tenha cuidado para calcular o ângulo de hélice corretamente. Sua tangente é o passo L (avanço por revolução) dividido pela circunferência média $2\pi r$ e não pelo diâmetro $2r$.

② Observe que R muda para o lado oposto da normal quando o movimento iminente muda de direção.

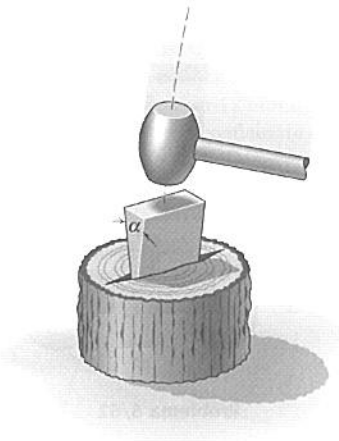
PROBLEMAS

(A menos que outra instrução seja dada, despreze os pesos das cunhas e parafusos nos problemas a seguir.)

Problemas Introdutórios

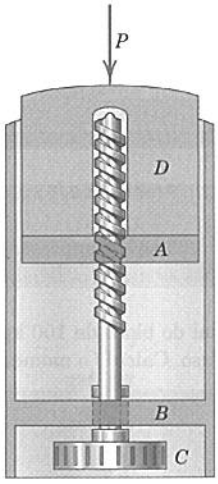
6/51 Se o coeficiente de atrito entre a cunha de aço e as fibras úmidas de um tronco recentemente cortado vale 0,20, determine o ângulo máximo α que a cunha pode ter para não pular fora da madeira após ter sido atingida pela marreta.

Resp. $\alpha = 22{,}6°$



Problema 6/51

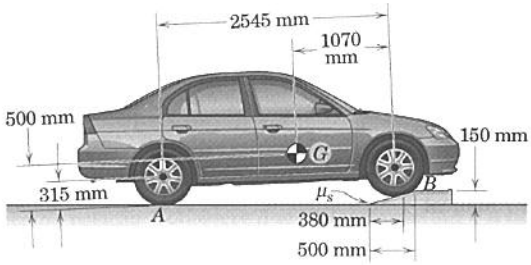
6/52 Os elementos de um tubo de desodorante em barra são mostrados na figura. Para subir a barra de desodorante D, o disco C é girado. O eixo rosqueado se conecta as roscas da base móvel A; o eixo não tem roscas no suporte fixo B. A rosca quadrada dupla de 6 mm de diâmetro tem um passo de 5 mm. Determine o coeficiente de atrito estático μ_s para o qual o desodorante não descerá sob a ação da força P. Despreze o atrito em B.



Problema 6/52

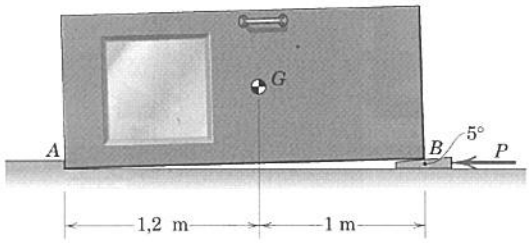
6/53 Um carro de tração traseira com 1600 kg está sendo movido para cima da rampa a uma velocidade constante baixa. Determine o mínimo coeficiente de atrito estático μ_s para o qual a rampa portátil não deslizará para frente. Determine também a força de atrito F_A necessária em cada roda traseira de tração.

Resp. $\mu_s = 0{,}3$, $F_A = 1294$ N



Problema 6/53

6/54 A porta industrial de 100 kg e centro de massa em G está sendo posicionada para reparo por meio da inserção da cunha de 5° sob o canto B. O movimento horizontal é impedido pelo pequeno degrau no canto A. Se os coeficientes de atrito estático nas superfícies superior e inferior da cunha valem 0,60, determine a força P necessária para levantar a porta em B.

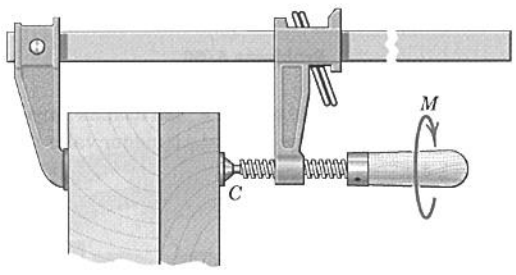


Problema 6/54

6/55 Calcule a força para a direita P' que removeria a cunha de sob a porta do Prob. 6/54. Assuma que o canto A não desliza em seu cálculo de P', mas depois verifique essa suposição; o coeficiente de atrito estático em A vale 0,6.

Resp. $P' = 582$ N

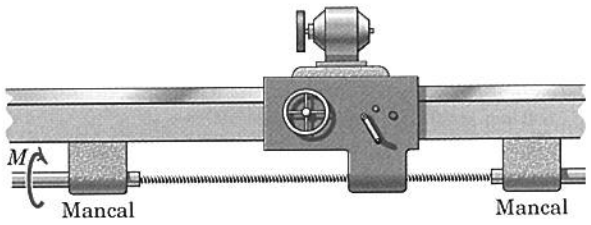
6/56 O grampo está sendo usado para prender dois painéis enquanto a cola entre eles cura. Que torque M deve ser aplicado à manopla do parafuso para produzir uma compressão de 400 N entre os painéis? O parafuso de rosca simples tem rosca quadrada com 10 mm de diâmetro e passo (avanço por revolução) de 1,5 mm. O coeficiente de atrito efetivo vale 0,2. Despreze qualquer atrito no pivô de contato em C. Que torque M' é necessário para afrouxar o grampo?



Problema 6/56

6/57 Especifique o torque M necessário no parafuso motorizado para vencer a resistência de 450 N ao movimento do carro ao longo do seu trilho horizontal. O parafuso tem diâmetro médio de 25 mm e tem duas roscas quadradas separadas que movem o carro 20 mm por revolução do parafuso. O coeficiente de atrito vale 0,20.

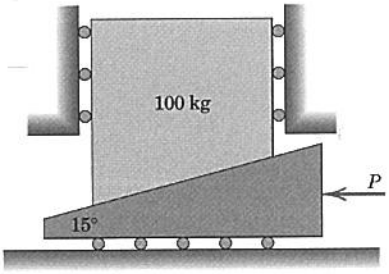
Resp. $M = 2{,}69$ N · m



Problema 6/57

Problemas Representativos

6/58 O coeficiente de atrito estático μ_s entre o corpo de 100 kg e a cunha com ângulo de 15° vale 0,20. Determine o módulo da força P necessária para levantar o corpo de 100 kg se (*a*) rolamentos com atrito desprezível estejam colocados sob a cunha como mostrado e (*b*) os rolamentos sejam removidos e o coeficiente de atrito estático $\mu_s = 0{,}20$ seja válido para essa superfície também.



Problema 6/58

6/59 Para ambas as condições (*a*) e (*b*) no Prob. 6/58 determine o módulo e a direção da força P' necessária para abaixo o corpo de 100 kg.

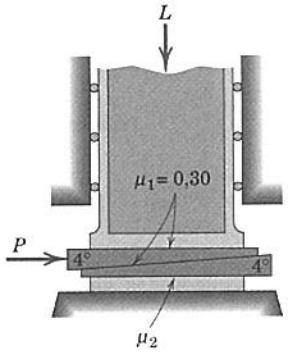
Resp. (*a*) $P' = 63{,}3$ N para a esquerda, (*b*) $P' = 132{,}9$ N para a direita

6/60 O tensionador sustenta uma força trativa de 40 kN no cabo. Os parafusos têm um diâmetro médio de 30 mm e roscas quadradas com passo de 3,5 mm. O coeficiente de atrito para as roscas lubrificadas não ultrapassa 0,25. Determine o momento M aplicado ao corpo do tensionador (*a*) para apertá-lo e (*b*) para afrouxá-lo. Ambos os parafusos têm roscas simples e são impedidos de girar.

Problema 6/60

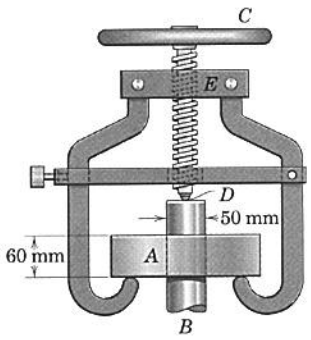
6/61 As duas cunhas com ângulo de 4° são usadas para posicionar a coluna vertical sob uma carga L. Qual é o menor valor do coeficiente de atrito μ_2 para o par de superfícies inferiores, para o qual a coluna pode ser elevada aplicando-se uma única força horizontal P na cunha superior?

Resp. $(\mu_2)_{\text{mín}} = 0{,}378$



Problema 6/61

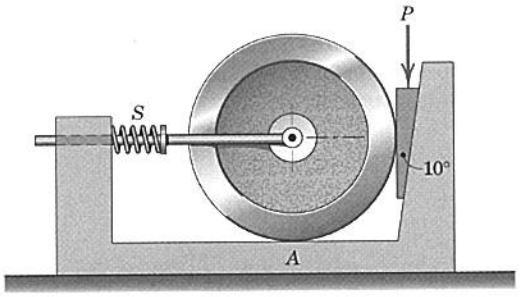
6/62 A anel A está firmemente ajustado ao eixo B e deve ser removido do eixo pelo dispositivo de remoção mostrado. O parafuso tem uma rosca quadrada simples com um diâmetro médio de 20 mm e um passo L de 6 mm. Se um torque de 24 N · m é necessário para girar a roda C de forma a retirar o anel do eixo, determine a pressão média p (tensão compressiva) entre o anel e o eixo. O coeficiente de atrito para o parafuso em E vale 0,25 e o do eixo e do anel vale 0,30. O atrito na extremidade esférica D do eixo pode ser desprezado.



Problema 6/62

6/63 Calcule a força P necessária para mover a roda de 20 kg. O coeficiente de atrito em A vale 0,25 e o de ambos os pares das superfícies das cunhas vale 0,30. Além disso, a mola S está sob compressão de 100 N e a barra fornece um apoio desprezível para a roda.

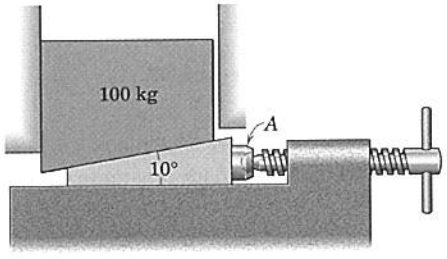
Resp. $P = 114{,}7$ N



Problema 6/63

6/64 Resolva o Prob. 6/63 se a compressão na mola for de 200 N. Todas as outras condições se mantêm iguais.

6/65 A posição vertical do bloco de 100 kg é ajustada pela cunha acionada por um parafuso. Calcule o momento M que deve ser apli-



Problema 6/65

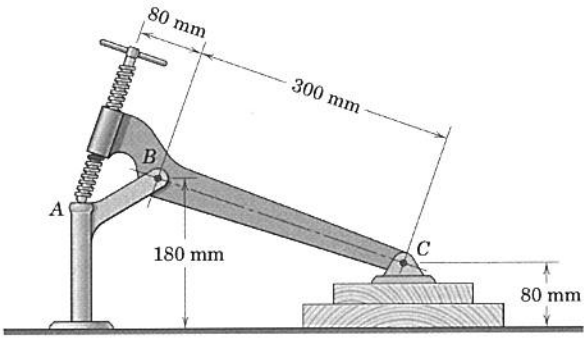
cado à manopla do parafuso para levantar o bloco. O parafuso de rosca simples tem roscas quadradas, com um diâmetro médio de 30 mm e avança 10 mm para cada volta completa. O coeficiente de atrito para as roscas do parafuso vale 0,25 e o coeficiente de atrito para todas as superfícies em contato do bloco e da cunha vale 0,40. Despreze o atrito na rótula A.

Resp. $M = 7{,}30$ N · m

6/66 Calcule o momento M' que deve ser aplicado à manopla do parafuso do Prob. 6/65 para retirar a cunha e abaixar a carga de 100 kg.

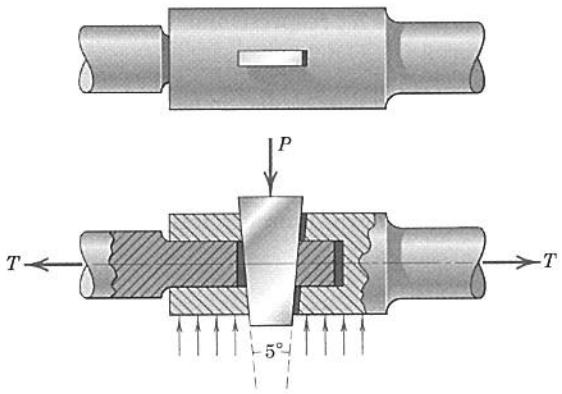
6/67 O grampo de pressão está sendo usado para prender dois painéis enquanto estão sendo colados. Que torque M deve ser aplicado ao parafuso para produzir uma compressão de 900 N entre os painéis? O parafuso de rosca simples com 12 mm de diâmetro tem duas roscas quadradas por centímetro e o coeficiente de atrito nas roscas pode ser considerado como sendo 0,20. Despreze qualquer atrito no pequeno contato de esfera em A e considere que a força de contato em A está direcionada ao longo do eixo do parafuso. Que torque M' é necessário para afrouxar o grampo?

Resp. $M = 6{,}52$ N · m, $M' = 1{,}253$ N · m



Problema 6/67

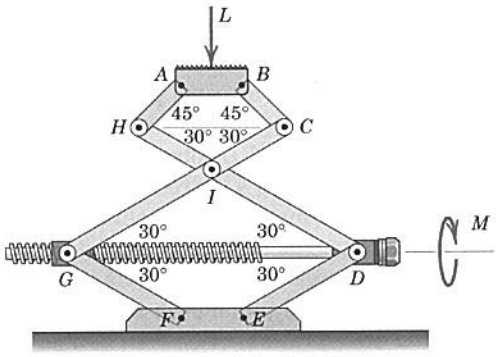
6/68 O projeto de uma junta para conectar dois eixos por um contrapino plano com ângulo de 5° está mostrado pelas duas vistas da figura. Se os eixos estão sob força trativa constante T de 900 N, encontre a força P necessária para mover o contrapino e eliminar qualquer folga na junta. O coeficiente de atrito entre o contrapino e os lados das ranhuras é 0,20. Despreze qualquer atrito horizontal entre os eixos.



Problema 6/68

▶6/69 Um macaco sanfona com uma rosca quadrada única, que rosqueia na bucha G e gira em um mancal de rolamentos em D, está sendo projetado. A rosca deve ter um diâmetro médio de 10 mm e um passo (avanço por revolução) de 3 mm. Com um coeficiente de atrito 0,20 para as roscas engraxadas, (*a*) calcule o torque M no parafuso necessário para levantar uma carga de 1000 kg desde a posição mostrada e (*b*) calcule o torque M necessário para abaixar a carga a partir da mesma posição. Considere que a plataforma AB e a linha DG permanecerão horizontais sob carga. Despreze o atrito no mancal em D.

Resp. (*a*) $M = 35{,}7$ N · m, (*b*) $M = 12{,}15$ N · m



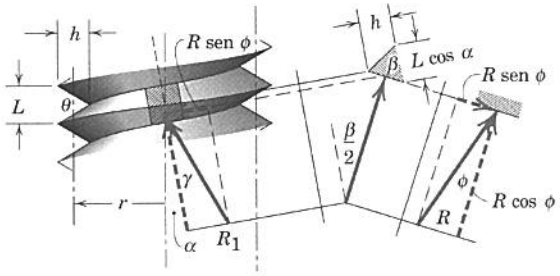
$\overline{GI} = \overline{DI} = 160$ mm, $\overline{HI} = \overline{CI} = 80$ mm

Problema 6/69

▶6/70 Substitua a rosca quadrada do macaco da Fig. 6/6 pela rosca em V como indicado na figura que acompanha esse problema e determine o momento M no parafuso necessário para levantar a carga W. A força R atuando em uma pequena seção representativa da rosca está mostrada, com suas projeções relevantes. O vetor R_1 é a projeção de R no plano da figura que contém o eixo do parafuso. A análise é iniciada com um somatório da força axial e dos momentos e inclui substituições para os ângulos γ e β em termos de θ, α e do ângulo de atrito $\phi = \tan^{-1}\mu$. O ângulo de hélice da rosca simples está exagerado para melhor visualização.

$$\text{Resp. } M = Wr\,\frac{\tan\alpha + \mu\sqrt{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\cos^2\alpha}}{1 - \mu\tan\alpha\sqrt{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\cos^2\alpha}}$$

$$\text{onde } \alpha = \tan^{-1}\frac{L}{2\pi r}$$



Problema 6/70

6/6 Mancais Radiais

Um *mancal radial* é aquele que fornece apoio lateral a um eixo, em contraste ao mancal axial ou de escora. Para mancais sem lubrificação e para muitos mancais parcialmente lubrificados podemos aplicar os princípios do atrito a seco. Estes princípios fornecem uma aproximação satisfatória para as necessidades de projeto.

Um mancal radial sem lubrificação, ou parcialmente lubrificado, com contato ou quase contato entre o eixo e o mancal está mostrado na Fig. 6/8, onde a folga entre o eixo e o mancal está bastante exagerada para deixar clara a ação. Conforme o eixo começa a girar na direção mostrada, ele rolará para cima na superfície interna do mancal até escorregar. Ele permanecerá, então, em uma posição mais ou menos fixa durante sua rotação. O torque M necessário para manter a rotação e a carga radial L sobre o eixo causarão uma reação R no ponto de contato A. Para haver equilíbrio vertical, R deve ser igual a L, mas não será colinear com L. Assim, R será tangente a um pequeno círculo de raio r_f, chamado de *círculo de atrito*. O ângulo entre R e sua componente normal N é o ângulo de atrito ϕ. Igualando a zero a soma dos momentos em torno de A dá

$$M = Lr_f = Lr \operatorname{sen} \phi \tag{6/4}$$

Para um coeficiente de atrito pequeno, o ângulo ϕ é pequeno e o seno e a tangente podem ser intercambiados com apenas um erro pequeno. Como $\mu = \tan \phi$, uma boa aproximação para o torque é

$$M = \mu Lr \tag{6/4a}$$

Essa relação dá a quantidade de torque ou momento que deve ser aplicada ao eixo para vencer o atrito para um mancal radial sem lubrificação ou parcialmente lubrificado.

6/7 Mancais de Escora; Atrito em Discos

O atrito entre superfícies circulares sob pressão normal distribuída ocorre em mancais de pivô, placas de embreagem e discos de freio. Para examinar essas aplicações, consideremos os dois discos circulares planos mostrados na Fig. 6/9.

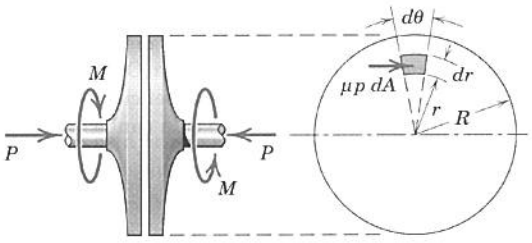


Figura 6/9

Seus eixos estão montados em mancais (não mostrados) de modo que eles podem ser colocados em contato sob a força axial P. O torque máximo que essa embreagem pode transmitir é igual ao torque M necessário para deslizar um disco contra o outro. Se p é a pressão normal em qualquer posição entre as placas, a força de atrito atuando em uma área elementar vale $\mu p\, dA$, onde μ é o coeficiente de atrito e dA é a área $r\, dr\, d\theta$ do elemento. O momento dessa força de atrito elementar em torno do eixo vale $\mu pr\, dA$ e o momento total será

$$M = \int \mu pr\, dA$$

onde avaliamos a integral sobre a área do disco. Para fazer essa integração, devemos conhecer a variação de μ e p com r.

Nos exemplos a seguir consideraremos que μ é constante. Além disso, se as superfícies são novas, planas e bem apoiadas, é razoável considerar que a pressão p seja uniforme sobre toda a superfície, de modo que $\pi R^2 p = P$. Substituindo o valor constante de p na expressão para M obtém-se

$$M = \frac{\mu P}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2\, dr\, d\theta = \frac{2}{3} \mu PR \tag{6/5}$$

Podemos interpretar esse resultado como equivalente ao momento devido a uma força de atrito μP atuando a uma distância $\frac{2}{3}R$ a partir do centro do eixo.

Se os discos de atrito são anéis, como no mancal com colar mostrado na Fig. 6/10, os limites de integração são os raios interno e externo R_i e R_o, respectivamente, e o torque devido ao atrito se torna

$$M = \frac{2}{3} \mu P \frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \tag{6/5a}$$

Após o período inicial de desgaste ter terminado, as superfícies retêm suas novas formas relativas e o desgaste pos-

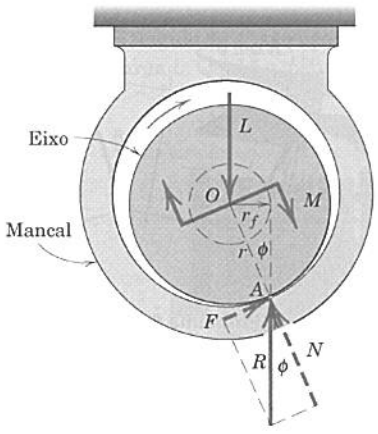


Figura 6/8

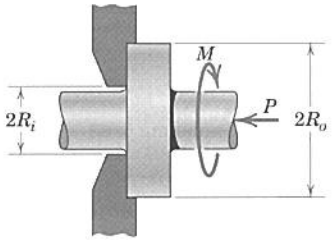


Figura 6/10

terior é, assim, constante em toda a superfície. Esse desgaste depende tanto da distância circunferencial percorrida quanto da pressão p. Como a distância percorrida é proporcional a r, a expressão $rp = K$ pode ser escrita, onde K é uma constante. O valor de K é determinado a partir das condições de equilíbrio para as forças axiais, o que dá

$$P = \int p\,dA = K\int_0^{2\pi}\int_0^R dr\,d\theta = 2\pi KR$$

Com $pr = K = P/(2\pi R)$ podemos escrever a expressão para M como

$$M = \int \mu pr\,dA = \frac{\mu P}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta$$

que se torna

$$M = \tfrac{1}{2}\mu PR \qquad \textbf{(6/6)}$$

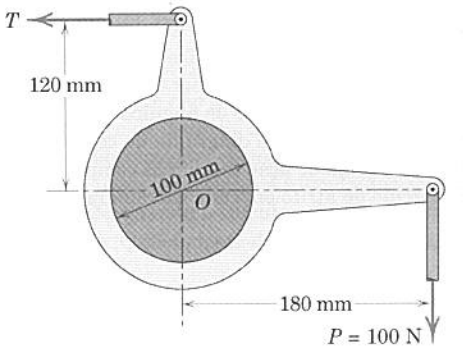
O momento devido ao atrito para as placas desgastadas é, portanto, apenas $\left(\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{2}{3}\right)$, ou $\frac{3}{4}$ daquele relativo às superfícies novas. Se os discos de atrito são anéis de raio interno R_i e raio externo R_o, a substituição desses limites dá, para o torque devido ao atrito em superfícies desgastadas,

$$M = \tfrac{1}{2}\mu P(R_o + R_i) \qquad \textbf{(6/6}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

Você deve estar preparado para lidar com outros problemas de atrito de discos, onde a pressão p é alguma outra função de r.

Exemplo 6/8

A alavanca em cotovelo se ajusta sobre um eixo de 100 mm de diâmetro que é fixo e não pode girar. A força horizontal T é aplicada para manter o equilíbrio da alavanca sob a ação da força vertical $P = 100$ N. Determine os valores máximo e mínimo que T pode ter sem fazer com que a alavanca gire em qualquer direção. O coeficiente de atrito estático μ entre o eixo e a superfície do mancal da alavanca vale 0,20.



Solução. O limiar da rotação ocorre quando a reação R do eixo fixo na alavanca em cotovelo faz um ângulo $\phi = \tan^{-1}\mu$ com a normal à superfície do mancal e, assim sendo, é tangente ao círculo de atrito. Da mesma forma, o equilíbrio requer que as três forças atuando na alavanca sejam concorrentes no ponto C. Esses fatos estão mostrados nos diagramas de corpo livre para os dois casos do limiar do movimento.

Os seguintes cálculos são necessários:

Ângulo de atrito $\phi = \tan^{-1}\mu = \tan^{-1}0{,}20 = 11{,}31°$

Raio do círculo de atrito $r_f = r\,\text{sen}\,\phi = 50\,\text{sen}\,11{,}31° = 9{,}81$ mm

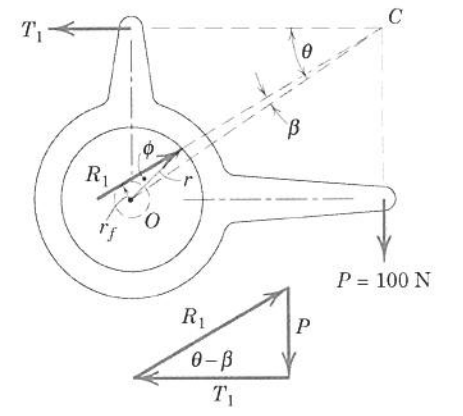
Ângulo $\theta = \tan^{-1}\dfrac{120}{180} = 33{,}7°$

Ângulo $\beta = \text{sen}^{-1}\dfrac{r_f}{\overline{OC}} = \text{sen}^{-1}\dfrac{9{,}81}{\sqrt{(120)^2 + (180)^2}} = 2{,}60°$

(a) Limiar do movimento no sentido anti-horário. O triângulo do equilíbrio de forças está desenhado e fornece

$$T_1 = P\cot(\theta - \beta) = 100\cot(33{,}7° - 2{,}60°)$$

$$T_1 = T_{\text{máx}} = 165{,}8\text{ N}$$

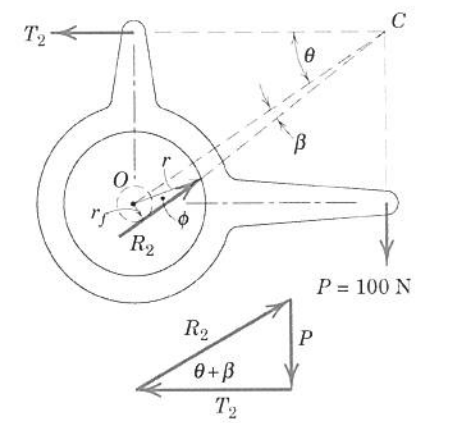


(*a*) Limiar do movimento no sentido anti-horário.

(b) Limiar do movimento no sentido horário. O triângulo do equilíbrio de forças para esse caso dá

$$T_2 = P\cot(\theta + \beta) = 100\cot(33{,}7° + 2{,}60°)$$

$$T_2 = T_{\text{mín}} = 136{,}2\text{ N}$$



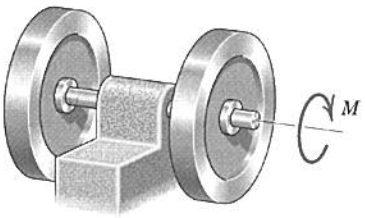
(*b*) Limiar do movimento no sentido horário.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

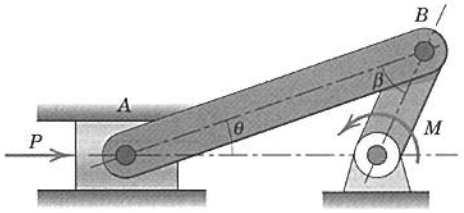
6/71 Os dois rotores estão montados em um mesmo eixo, que está apoiado por um mancal radial entre eles. Cada rotor tem uma massa de 40 kg e o diâmetro do eixo vale 40 mm. Se um momento M de 3 N · m no eixo é necessário para manter a rotação dos rotores e do eixo em uma velocidade constante baixa, calcule (*a*) o coeficiente de atrito no mancal e (*b*) o raio r_f do círculo de atrito.

Resp. (*a*) $\mu = 0{,}1947$, (*b*) $r_f = 3{,}82$ mm



Problema 6/71

6/72 A figura mostra um mecanismo de manivela deslizante em equilíbrio com a força P aplicada ao deslizador e o momento M aplicado à manivela. Se P aumenta, o deslizador começará a se mover para a direita, e ambos os ângulos θ e β diminuirão para a posição mostrada. Desenhe o diagrama de corpo livre da conexão AB, mostrando a linha de ação das forças compressivas sobre AB em relação ao círculo de atrito em cada extremidade.

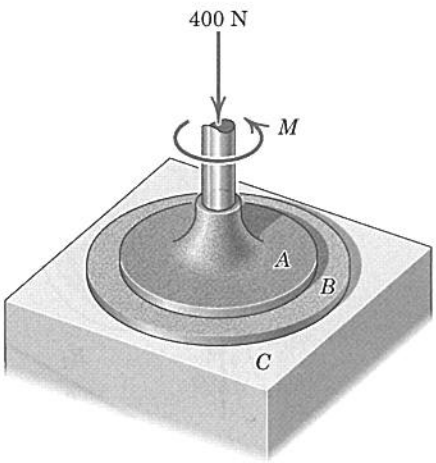


Problema 6/72

6/73 O disco circular A é colocado sobre o topo do disco B e submetido a uma força compressiva de 400 N. Os diâmetros de A e B valem 225 mm e 300 mm, respectivamente, e a pressão sob cada disco é constante em toda sua superfície. Se o coeficiente de atrito entre A e B vale 0,40, determine o momento M que fará com que A deslize sobre B. Além disso, qual é o coeficiente de atrito μ mínimo entre B e a superfície de apoio C que impedirá que B gire?

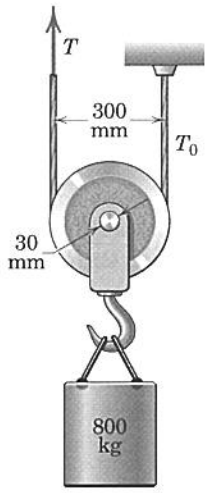
Resp. $M = 12$ N · m

$\mu = 0{,}3$



Problema 6/73

6/74 Determine a força trativa T no cabo para suspender a carga de 800 kg se o coeficiente de atrito para o mancal de 30 mm vale 0,25. Determine, também, a força trativa T_0 na seção estacionária do cabo. As massas do cabo e da polia são pequenas e podem ser desprezadas.

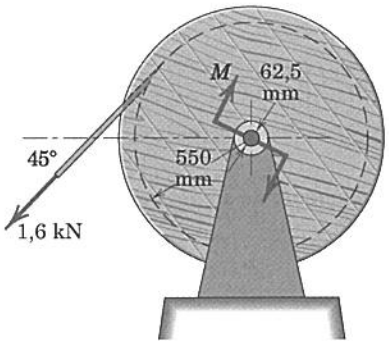


Problema 6/74

6/75 Calcule a força trativa T necessária para abaixar a carga de 800 kg descrita no Prob. 6/74. Determine também T_0.

Resp. $T = 3830$ N, $T_0 = 4020$ N

6/76 Calcule o torque M necessário para girar o carretel de cabo telefônico de 280 kg no sentido horário contra a força trativa de 1,6 kN no cabo. O diâmetro do mancal vale 62,5 mm e o coeficiente de atrito para o mancal é 0,30.

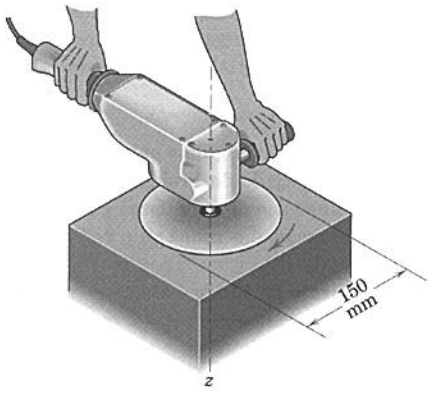


Problema 6/76

6/77 Calcule o torque M' sobre o carretel de 280 kg do cabo telefônico do Prob. 6/76 que permitirá que o carretel gire lentamente no sentido anti-horário sob a ação da força trativa de 1,6 kN.

Resp. $M' = 844$ N · m

6/78 O operador da lixadeira de 3 kg aplica um torque M_z e uma força adicional direcionada para baixo de 40 N sobre a lixadeira. Depois que o disco de lixamento é usado por algum tempo, o coeficiente de atrito entre o disco e a superfície lixada decai linearmente com a distância radial — de 0,80 no centro até 0,50 na periferia do disco de 150 mm de diâmetro. Assuma que a pressão p sob o disco é constante e determine M_z.

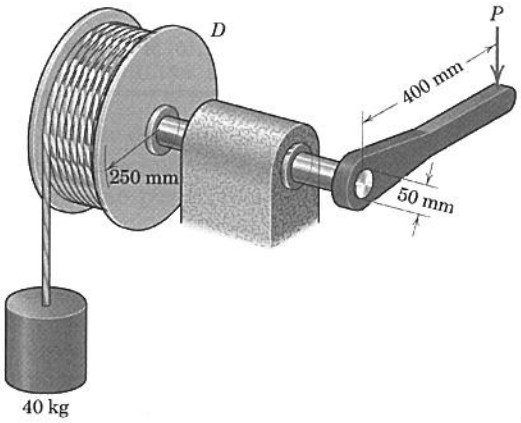


Problema 6/78

Problemas Representativos

6/79 O peso do tambor D e de seu cabo é de 45 kg e o coeficiente de atrito μ para o mancal vale 0,20. Determine a força P necessária para suspender o cilindro de 40kg se o atrito no mancal é (*a*) desprezível e (*b*) incluído na análise. O peso do eixo é desprezível.

Resp. (*a*) $P = 245$ N, (*b*) $P = 259$ N

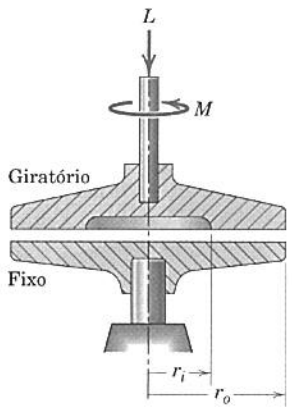


Problema 6/79

6/80 Determine a força P necessária para abaixar o cilindro de 40 kg do Prob. 6/79. Compare sua resposta com os resultados dados para aquele problema. O valor de P para o caso em que não há atrito é igual à média das forças necessárias para suspender e abaixar o cilindro?

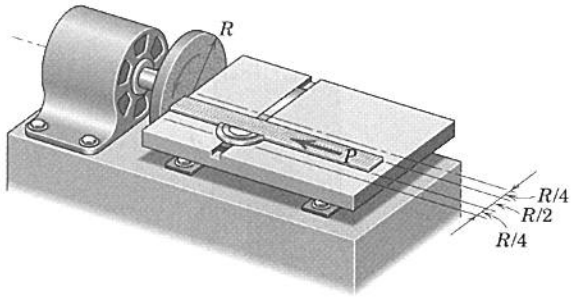
6/81 A seção axial de dois discos circulares que se encaixam está mostrada. Obtenha uma expressão para o torque M necessário para girar o disco superior sobre o disco inferior que está fixo, se a pressão p entre os discos segue a relação $p = k/r^2$, onde k é uma constante a ser determinada. O coeficiente de atrito μ é constante sobre toda a superfície.

$$\textit{Resp. } M = \mu L \frac{r_o - r_i}{\ln(r_o/r_i)}$$



Problema 6/81

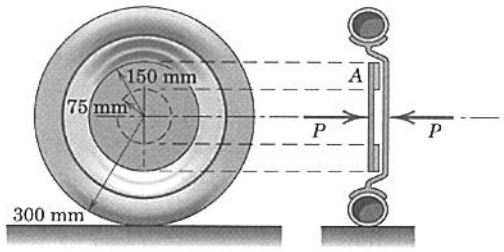
6/82 Uma das extremidades da placa fina está sendo lixada pela lixa rotativa sob a aplicação da força P. Se o coeficiente efetivo de atrito dinâmico é μ e se a pressão é essencialmente constante sobre a extremidade da placa, determine o momento M que deve ser aplicado pelo motor de forma a girar o disco a uma velocidade angular constante. A extremidade da placa está centrada ao longo do raio do disco.



Problema 6/82

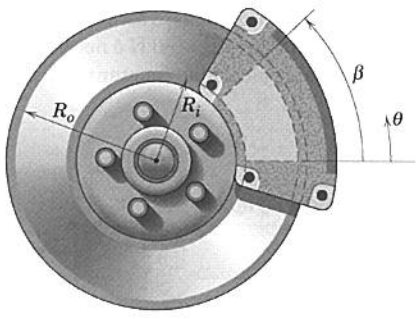
6/83 As rodas dianteiras de um veículo experimental de tração traseira têm um raio de 300 mm e são projetadas com freios a disco, consistindo de um anel A com raios externo e interno de 150 mm e 75 mm, respectivamente. O anel, que não gira com as rodas, é forçado por uma força P contra o disco da roda. Se a pressão entre o anel e o disco da roda é uniforme sobre as superfícies de contato, calcule a força de atrito F entre cada pneu dianteiro e a estrada horizontal para uma força axial $P = 1$ kN, quando o veículo está a velocidade constante com as rodas girando. O coeficiente de atrito entre o disco e o anel vale 0,35.

Resp. $F = 136{,}1$ N



Problema 6/83

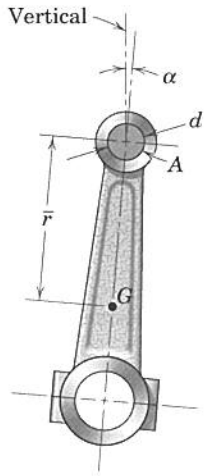
6/84 Um disco de freio de automóvel consiste em um rotor de faces planas e uma pinça que tem uma sapata em cada lado do rotor. Para forças P idênticas atuando atrás de cada sapata, com a pressão uniforme p sobre a sapata, mostre que o momento aplicado ao cubo da roda é independente da faixa angular β das sapatas. A variação da pressão com θ mudaria o momento?



Problema 6/84

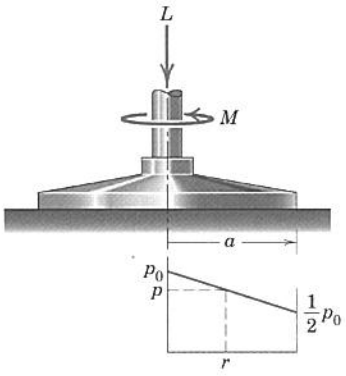
6/85 No projeto de um teste de atrito, o eixo A é frouxamente preso ao mancal da biela, que tem centro de gravidade em G, como mostrado. Com a biela inicialmente na posição vertical, o eixo é girado lentamente até que a biela escorregue em um ângulo α. Escreva uma expressão exata para o coeficiente de atrito μ.

$$Resp.\ \mu = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d/2}{\bar{r}\ \text{sen}\ \alpha}\right)^2 - 1}}$$



Problema 6/85

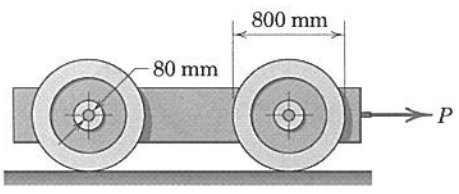
6/86 Para o disco de lixamento plano de raio a, a pressão p desenvolvida entre o disco e a superfície lixada decresce linearmente com r, desde um valor p_0 no centro até $p_0/2$ em $r = a$. Se o coeficiente de atrito é μ, obtenha a expressão para o torque M necessário para girar o eixo sob uma força axial L.



Problema 6/86

6/87 Cada uma das quatro rodas do veículo tem uma massa de 20 kg e está montada em um eixo de 80 mm de diâmetro. A massa total do veículo é 480 kg, incluindo as rodas, e está distribuída igualmente pelas quatro rodas. Se uma força $P = 80$ N é necessária para manter o veículo rodando sob uma velocidade constante baixa sobre uma superfície horizontal, calcule o coeficiente de atrito que existe nos mancais das rodas. (*Sugestão*: Desenhe um diagrama de corpo livre completo para uma roda.)

$$Resp.\ \mu = 0{,}208$$

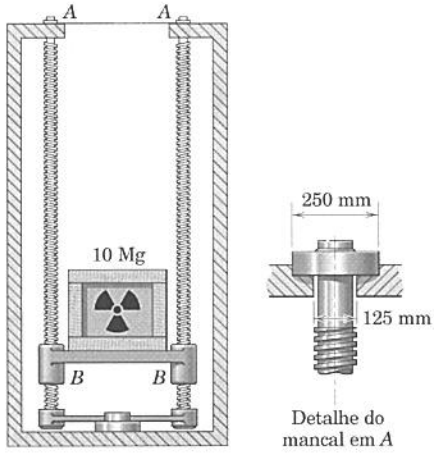


Problema 6/87

6/88 Determine o ângulo θ entre a horizontal e a rampa mais inclinada que o veículo do Prob. 6/87 pode suportar sem rolar por si próprio na ausência de uma força P. Considere que o coeficiente de atrito nos mancais das rodas vale 0,20.

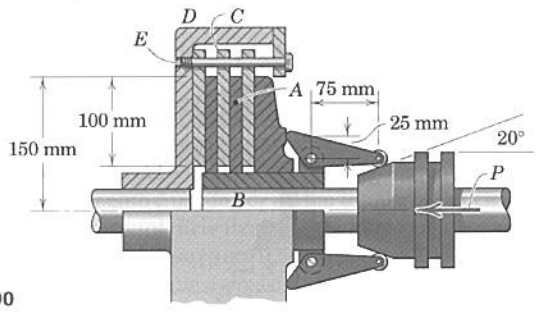
6/89 O caixote de 10 Mg é abaixado para uma câmara de armazenamento subterrânea em um elevador de dois parafusos projetado como mostrado. Cada parafuso tem uma massa de 0,9 Mg, um diâmetro médio de 120 mm e uma rosca quadrada simples com um passo de 11 mm. Os parafusos são girados em sincronismo por uma unidade motorizada na base do dispositivo. Toda a massa do caixote, dos parafusos e da plataforma de 3 Mg do elevador é sustentada uniformemente por mancais radiais planos em A, cada um tendo um diâmetro externo de 250 mm e um diâmetro interno de 125 mm. A pressão nos mancais é considerada uniforme sobre toda a superfície dos mancais. Se o coeficiente de atrito para os mancais radiais e os parafusos em B vale 0,15, calcule o torque M que deve ser aplicado a cada parafuso (*a*) para suspender o elevador e (*b*) para abaixar o elevador.

$$Resp.\ (a)\ M = 1747\ \text{N} \cdot \text{m},\ (b)\ M = 1519\ \text{N} \cdot \text{m}$$



Problema 6/89

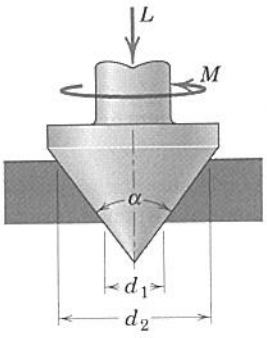
6/90 A figura mostra uma transmissão de vários discos projetada para uso marítimo. Os discos de potência A são encaixados em uma canaleta no eixo de potência B, de forma que fiquem livres para deslizar ao longo do eixo, mas têm que girar com ele. Os discos C atuam sobre a estrutura D através dos parafusos E, ao longo dos quais estão livres para deslizar. Na transmissão mostrada existem cinco pares de superfícies de atrito. Assuma que a pressão está uniformemente distribuída sobre a área dos discos e termine o torque máximo M que pode ser transmitido se o coeficiente de atrito vale 0,15 e $P = 500$ N.



Problema 6/90

▶6/91 Determine a expressão para o torque M necessário para girar o eixo cuja pressão axial L é sustentada por um mancal cônico. O coeficiente de atrito é μ, e a pressão no mancal é constante.

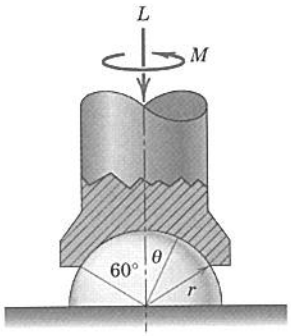
Resp. $M = \dfrac{\mu L}{3 \operatorname{sen} \dfrac{\alpha}{2}} \dfrac{d_2^3 - d_1^3}{d_2^2 - d_1^2}$



Problema 6/91

▶6/92 Um mancal radial para um eixo sob uma carga axial L é projetado como um copo esférico parcial de raio r. Se a pressão entre as superfícies do mancal em qualquer ponto varia de acordo com $p = p_0 \cos \theta$, deduza a expressão para o torque M requerido para manter uma velocidade de rotação constante. O coeficiente de atrito é μ.

Resp. $M = \dfrac{3\sqrt{3}}{7} \mu r L$



Problema 6/92

6/8 Correias Flexíveis

O limiar do escorregamento de cabos flexíveis, correias e cordas sobre roldanas e tambores é importante no projeto de transmissão por correia de todos os tipos, freios de lona e guindastes.

A Fig. 6/11*a* mostra um tambor submetido às duas forças trativas T_1 e T_2 devidas à correia, o torque M necessário para evitar rotação e a reação R do mancal. Com M na direção mostrada, T_2 é maior do que T_1. O diagrama de corpo livre de um elemento da correia de comprimento $r\,d\theta$ é mostrado na parte *b* da figura. Analisamos as forças atuando nesse elemento diferencial estabelecendo o equilíbrio do elemento de modo semelhante àquele usado para outros problemas de força variável. A força trativa aumenta desde T, no ângulo θ, até $T + dT$ no ângulo $\theta + d\theta$. A força normal é uma diferencial dN, pois ela atua em um elemento diferencial de área. De modo semelhante, a força de atrito, que deve atuar na correia no sentido de se opor ao movimento, é uma diferencial e vale $\mu\,dN$ para o limiar do movimento.

O equilíbrio na direção t dá

$$T \cos \frac{d\theta}{2} + \mu\,dN = (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2}$$

ou

$$\mu\,dN = dT$$

já que o cosseno de uma quantidade diferencial vale um no limite. O equilíbrio na direção n impõe que

$$dN = (T + dT) \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} + T \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2}$$

ou

$$dN = T\,d\theta$$

onde usamos os fatos que, no limite, o seno de um ângulo diferencial é igual ao ângulo e que, no limite, o produto de duas diferenciais deve ser desprezado em comparação com as restantes diferenciais de primeira ordem.

Combinando as duas relações de equilíbrio obtém-se

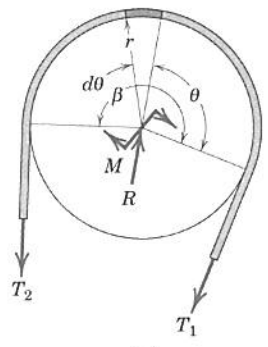
$$\frac{dT}{T} = \mu\,d\theta$$

Integrando entre os limites correspondentes tem-se

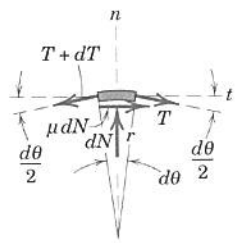
$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} \mu\,d\theta$$

ou

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu\beta$$



(*a*)



(*b*)

Figura 6/11

© Image Source/Media Bakery

Apenas uma volta de uma corda em torno de um cilindro fixo pode produzir uma grande mudança na força trativa.

onde $\ln(T_2/T_1)$ é um logaritmo natural (base e). Resolvendo para T_2 tem-se

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \tag{6/7}$$

Observe que β é o ângulo total de contato da correia e deve ser dado em radianos. Se uma corda fosse enrolada em torno de um tambor n vezes, o ângulo β seria $2\pi n$ radianos. A Eq. 6/7 também é válida para uma seção não circular onde o ângulo de contato total vale β. Essa conclusão é evidente do fato que o raio r do tambor circular na Fig. 6/11 não entra nas equações para o equilíbrio do elemento diferencial da correia.

A relação dada pela Eq. 6/7 também se aplica a transmissões por correias onde tanto a correia quanto a polia estão girando a velocidade constante. Nesse caso a equação descreve a razão das forças trativas na correia para escorregamento ou limiar do escorregamento. Quando a velocidade de rotação se torna grande, a correia tende a sair do aro, de modo que nesse caso a Eq. 6/7 envolve alguns erros.

6/9 Resistência ao Rolamento

A deformação no ponto de contato entre uma roda em movimento e sua superfície de apoio introduz resistência ao movimento, que mencionamos apenas rapidamente. Essa resistência não se deve a forças de atrito tangenciais e, portanto, é um fenômeno inteiramente diferente do atrito a seco.

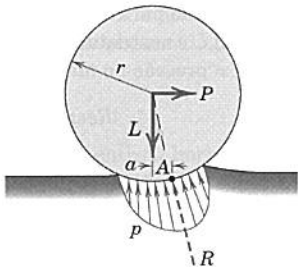


Figura 6/12

Para descrever a resistência ao rolamento, consideremos a roda mostrada na Fig. 6/12, sob a ação de uma carga L, sobre o eixo, e uma força P aplicada em seu centro para produzir rolamento. As deformações da roda e das superfícies de apoio estão mostradas bastante exageradas. A distribuição da pressão p sobre a área de contato é semelhante à distribuição mostrada. A resultante R dessa distribuição atua em algum ponto A e deve passar pelo centro da roda para haver equilíbrio. Determinamos a força P necessária para manter o rolamento a velocidade constante igualando a zero os momentos de todas as forças em relação a A. Isto nos dá

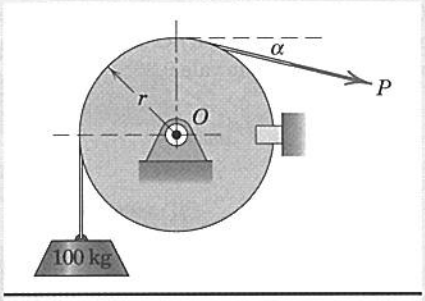
$$P = \frac{a}{r} L = \mu_r L$$

onde o braço de alavanca de P é considerado como sendo r. A razão $\mu_r = a/r$ é chamada de *coeficiente de resistência ao rolamento.* Esse coeficiente é a razão entre a força de resistência e a força normal e, portanto, é análogo ao coeficiente de atrito estático ou dinâmico. Por outro lado, não existe escorregamento ou escorregamento iminente na interpretação de μ_r.

Como a dimensão a depende de inúmeros fatores que são difíceis de quantificar, uma teoria abrangente da resistência ao rolamento não está disponível. A distância a é uma função das propriedades elásticas e plásticas dos materiais em contato, do raio da roda, da velocidade de movimento e da rugosidade das superfícies. Alguns ensaios indicam que a varia apenas ligeiramente com o raio da roda e, assim, a é freqüentemente considerado independente do raio da roda. Infelizmente, a quantidade a tem sido chamada também de coeficiente de atrito ao rolamento em algumas referências. Entretanto, a tem dimensão de comprimento e, portanto, não é um coeficiente adimensional no sentido usual.

Exemplo 6/9

Um cabo flexível que suporta a carga de 100 kg é passado sobre um tambor circular fixo e submetido a uma força P para manter o equilíbrio. O coeficiente de atrito estático μ entre o cabo e o tambor fixo vale 0,30. (*a*) Para $\alpha = 0$, determine os valores máximo e mínimo que P pode ter para não suspender ou abaixar a carga. (*b*) Para $P = 500$ N, determine o valor mínimo que o ângulo α pode ter antes que a carga comece a se mover.



Solução. O limiar do movimento do cabo sobre o cilindro fixo é dado pela Eq. 6/7, que é $T_2/T_1 = e^{\mu\beta}$.

① **(*a*)** Com $\alpha = 0$ o ângulo de contato vale $\beta = \pi/2$ rad. Para o limiar do movimento para cima da carga, $T_2 = P_{máx}$, $T_1 = 981$ N e temos

② $$P_{máx}/981 = e^{0{,}30(\pi/2)} \qquad P_{máx} = 981(1{,}602) = 1572 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Para o limiar do movimento para baixo da carga, $T_2 = 981$ N e $T_1 = P_{mín}$. Assim,

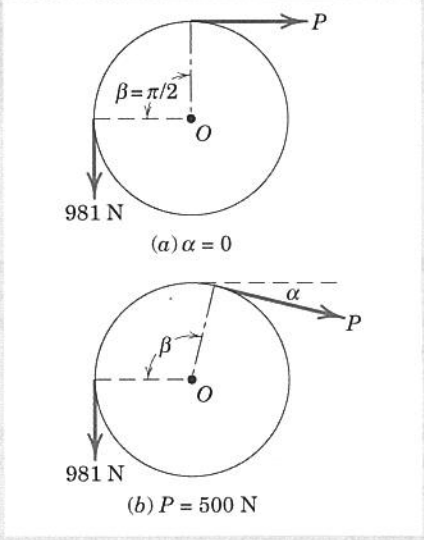
$$981/P_{mín} = e^{0{,}30(\pi/2)} \qquad P_{mín} = 981/1{,}602 = 612 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

(*b*) Com $T_2 = 981$ N e $T_1 = P = 500$ N, a Eq. 6/7 nos dá

$$981/500 = e^{0{,}30\beta} \qquad 0{,}30\beta = \ln(981/500) = 0{,}674$$

$$\beta = 2{,}25 \text{ rad} \qquad \text{ou} \qquad \beta = 2{,}25\left(\frac{360}{2\pi}\right) = 128{,}7°$$

③ $$\alpha = 128{,}7° - 90° = 38{,}7° \qquad \textit{Resp.}$$



Sugestões Úteis

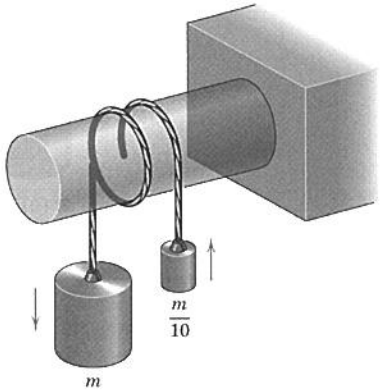
① Temos o cuidado de observar que β deve ser expresso em radianos.
② Em nosso desenvolvimento da Eq. 6/7 esteja certo de observar que $T_2 > T_1$.
③ Como foi observado no desenvolvimento da Eq. 6/7, o raio do tambor não entra nos cálculos. São apenas o ângulo de contato e o coeficiente de atrito que determinam as condições limite para a iminência do movimento do cabo flexível sobre a superfície curva.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

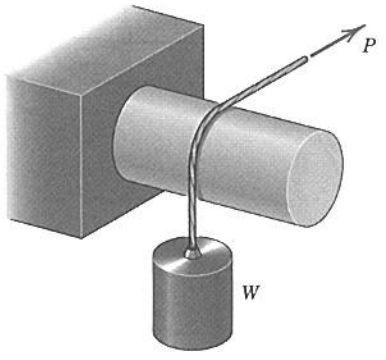
6/93 Observa-se que os dois cilindros permanecem em movimento lento e constante, como indicado na figura. Determine o coeficiente de atrito μ entre a corda e o eixo rígido.

Resp. $\mu = 0{,}244$



Problema 6/93

6/94 Determine a força P necessária para (*a*) levantar e (*b*) abaixar o cilindro de peso W a uma velocidade constante baixa. O coeficiente de atrito entre a corda e o eixo fixo vale 0,4.

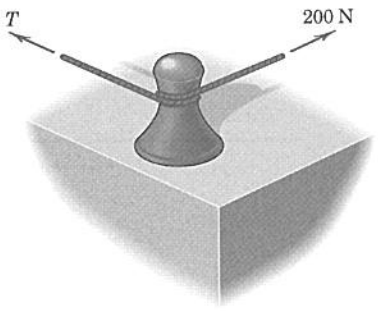


Problema 6/94

6/95 Um marinheiro ajusta uma corda que impede que um barco se desloque ao longo de uma doca. Se ele puxa com uma força de

200 N a corda que está enrolada 1 1/4 de volta no mourão, que força T ele conseguirá sustentar? O coeficiente de atrito entre a corda e o mourão de aço fundido vale 0,30.

Resp. $T = 2{,}11$ kN

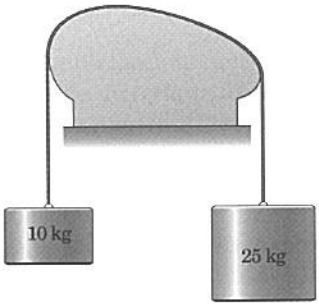


Problema 6/95

6/96 Se o marinheiro do Prob. 6/95 deve suportar uma força trativa de 18 kN na corda presa ao navio, quantas voltas em torno do mourão são necessárias se ele puxa a extremidade livre com uma força de 240 N? O coeficiente de atrito entre a corda e o mourão vale 0,30.

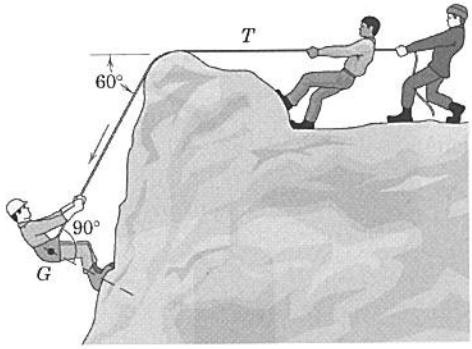
6/97 Os blocos de 10 kg e de 25 kg estão presos por uma corda pendurada sobre a superfície curva fixa. Se o sistema está no limiar de escorregar, calcule o coeficiente de atrito entre a corda e a superfície.

Resp. $\mu = 0{,}292$



Problema 6/97

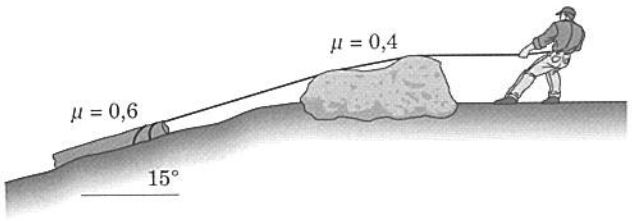
6/98 O alpinista de 80 kg é abaixado por sobre a borda do penhasco por seus dois companheiros, que exercem juntos uma força horizontal T de 350 N na corda. Calcule o coeficiente de atrito μ entre a corda e a rocha.



Problema 6/98

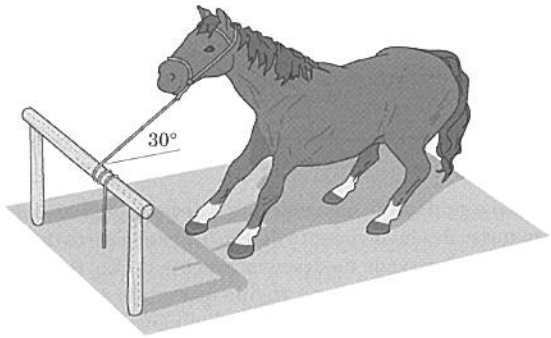
6/99 Com que força horizontal P o trabalhador deve puxar para mover a tora de 35 kg para cima na inclinação com 15°? O coeficiente de atrito entre a tora e a inclinação vale 0,60 e entre a corda e a rocha vale 0,4.

Resp. $P = 320$ N



Problema 6/99

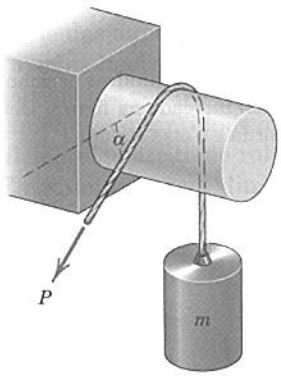
6/100 Em filmes do Velho Oeste, freqüentemente se observa os caubóis prendendo seus cavalos simplesmente dando poucas voltas da rédea em torno de uma barra horizontal e deixando a extremidade pendendo livremente como mostrado — sem nós! Se o comprimento pendurado da rédea tem uma massa de 0,060 kg e o número de voltas é como mostrado, que força trativa T o cavalo deve fazer na direção mostrada, para se libertar? O coeficiente de atrito entre a rédea e a barra de madeira vale 0,70.



Problema 6/100

6/101 Para um certo coeficiente de atrito μ e um certo ângulo α, a força P necessária para elevar m vale 4 kN e a necessária para abaixar m a velocidade constante baixa vale 1,6 kN. Calcule a massa m.

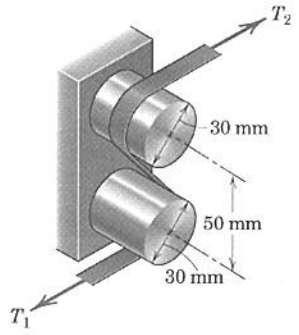
Resp. $m = 258$ kg



Problema 6/101

Problemas Representativos

6/102 A fita desliza em volta dos dois eixos fixos, como mostrado, e está sob a ação de forças trativas horizontais $T_1 = 40$ N e $T_2 = 160$ N. Determine o coeficiente de atrito μ entre a fita e os eixos.



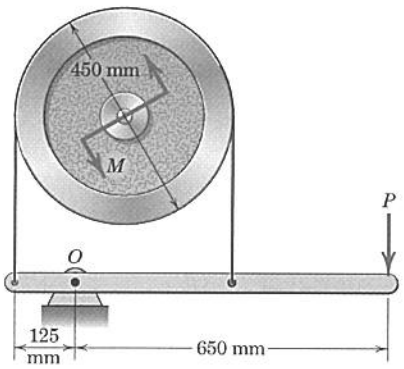
Problema 6/102

6/103 O jardineiro de 80 kg se abaixa com a corda sobre um galho horizontal da árvore. Se o coeficiente de atrito entre a corda e o galho vale 0,60, calcule a força que o homem deve fazer na corda para se abaixar lentamente.

Resp. $P = 135{,}1$ N

Problema 6/103

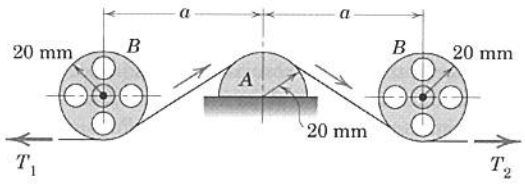
6/104 Um momento no sentido anti-horário $M = 150$ N · m é aplicado ao rotor. Se o coeficiente de atrito entre a fita e o rotor vale 0,20, calcule a força mínima P necessária para impedir a roda de girar.



Problema 6/104

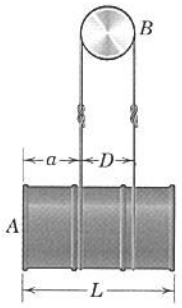
6/105 Uma fita magnética passa, à velocidade constante, em torno das polias esticadoras leves B e sobre a cabeça de gravação circular fixa A. A força trativa na fita não varia enquanto ela passa em torno das polias esticadoras. Calcule o espaçamento mínimo a, no projeto dessa unidade, para o qual a razão entre as forças trativas T_1 e T_2 não excederá 1,15. O coeficiente de atrito entre a fita e a cabeça vale 0,10.

Resp. $a = 62{,}2$ mm



Problema 6/105

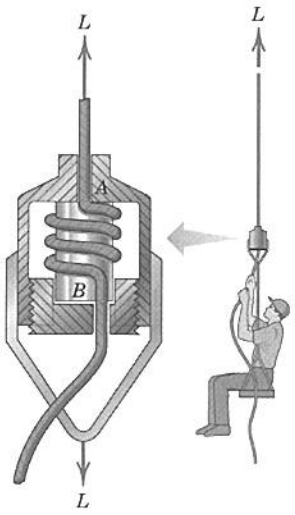
6/106 O tambor uniforme A com centro de massa na metade de seu comprimento, é suspenso por uma corda que passa sobre a superfície cilíndrica fixa B. O coeficiente de atrito estático entre a corda e a superfície sobre a qual ela passa é μ. Determine o valor máximo que a dimensão a pode ter antes que o tambor tombe, saindo da posição horizontal.



Problema 6/106

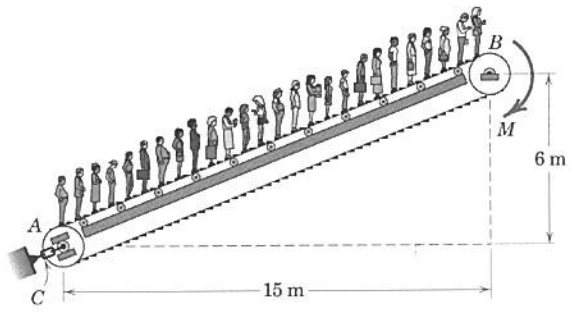
6/107 Um dispositivo projetado para abaixar por meio de uma corda, a uma taxa constante controlada, uma pessoa sentada em um banco está mostrado na figura. A corda passa em torno de um eixo central preso à armação e sai livremente pelo anel inferior. O número de voltas é ajustado girando-se o anel inferior, que enrola ou desenrola a corda em torno do eixo. A entrada da corda na parte superior do dispositivo, em A, é equivalente a 1/4 de uma volta, e a passagem em torno da extremidade, em B, também é equivalente a 1/4 de uma volta. O atrito da corda nos canais de entrada e saída é, em média, de 10 N por canal. Se três voltas completas em torno do eixo, além das voltas nas extremidades, são necessárias para que um homem de 75 kg se abaixe a uma taxa constante sem puxar a extremidade livre da corda, calcule o coeficiente de atrito μ entre a corda e as superfícies de contato do dispositivo. Despreze o pequeno ângulo de hélice da corda em torno do eixo.

Resp. $\mu = 0{,}1948$



Problema 6/107

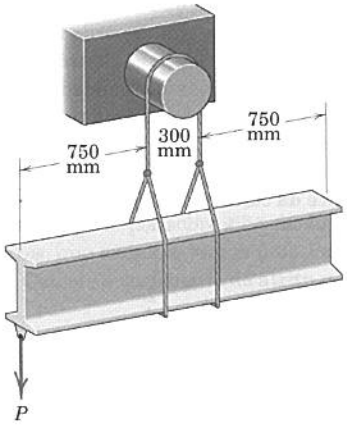
6/108 A correia sem fim de uma escada rolante passa em volta do tambor esticador A e é movimentada por um torque M aplicado ao tambor B. A força trativa na correia é ajustada por um esticador em C, que produz uma força trativa inicial de 4,5 kN em cada lado da correia, quando a escada está sem carga. Para o projeto desse sistema, calcule o coeficiente de atrito mínimo μ entre o tambor B e a correia para impedir deslizamento se a escada transporta 30 pessoas, com 70 kg em média cada uma, uniformemente distribuídas ao longo da correia. (*Nota:* Pode-se mostrar que o aumento da força trativa na correia no lado superior do tambor B e a redução da força trativa na correia no tambor inferior A são, cada, iguais à metade da componente do peso combinado dos passageiros ao longo da escada.)



Problema 6/108

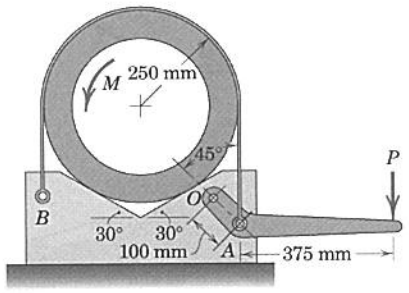
6/109 A viga em I uniforme tem uma massa de 74 kg por metro de comprimento e é suportada por uma corda que passa sobre o eixo fixo de 300 mm. Se o coeficiente de atrito entre a corda e o eixo vale 0,5, calcule o menor valor da força P que fará com que a viga saia da sua posição horizontal.

Resp. $P = 160{,}3$ N



Problema 6/109

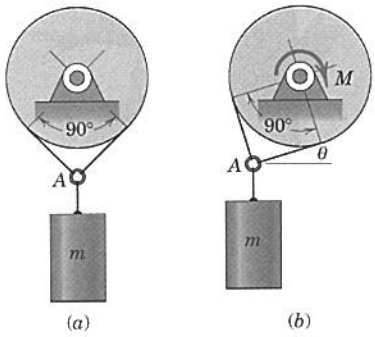
6/110 Encontre o momento M necessário para girar o tubo no bloco em V contra a ação da cinta flexível, no projeto do freio de cinta mostrado. Uma força $P = 100$ N é aplicada à alavanca, que pivota em torno de O. O coeficiente de atrito entre a cinta e o tubo vale 0,30 e entre o tubo e o bloco vale 0,40. Os pesos das peças são desprezíveis.



Problema 6/110

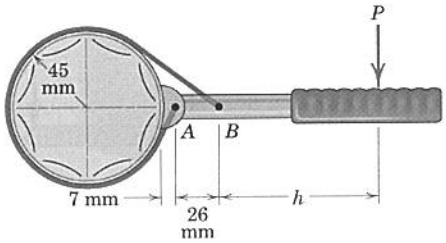
6/111 O cilindro de massa m está preso ao anel A, que está suspenso pelo cabo que passa sobre a polia, como mostrado na parte a da figura. Um momento M aplicado à polia a faz girar até que ocorre deslizamento do cabo na polia na posição $\theta = 20°$, como mostrado na parte b da figura. Calcule o coeficiente de atrito μ entre o cabo e a polia.

Resp. $\mu = 0{,}214$



Problema 6/111

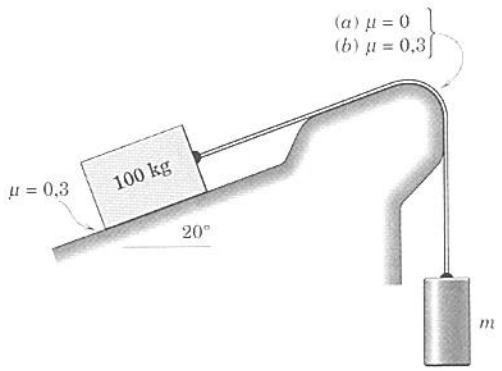
6/112 O projeto de uma chave de correia para soltar filtro de óleo está mostrado na figura. Se o coeficiente de atrito entre a correia e o filtro vale 0,25, determine o valor mínimo de h que assegura que a chave não vai escorregar em torno do filtro, independentemente do módulo da força P. Despreze a massa da chave e considere que o efeito da pequena peça em A é equivalente àquele de uma volta de correia que começa na posição correspondente a três horas e segue no sentido horário.



Problema 6/112

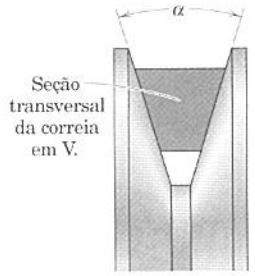
6/113 Determine a faixa de massas m do cilindro na qual o sistema está em equilíbrio. Considere os dois casos em que o coeficiente de atrito entre o cabo e a superfície de apoio fixa vale (*a*) 0 e (*b*) 0,3. Em ambos os casos, inclua o atrito indicado entre o corpo de 100 kg e a rampa.

Resp. (*a*) $6{,}01 \text{ kg} \leq m \leq 62{,}4 \text{ kg}$
(*b*) $3{,}38 \text{ kg} \leq m \leq 111{,}0 \text{ kg}$



Problema 6/113

6/114 Substitua a correia plana e a polia da Fig. 6/11 por uma correia e uma polia em V, como indicado na vista da seção transversal que acompanha esse problema. Obtenha a relação entre as forças trativas na correia, o ângulo de contato e o coeficiente de atrito para a correia em V quando o movimento é iminente. O projeto de uma correia em V com $\alpha = 35°$ seria equivalente a aumentar o coeficiente de atrito por que fator n em relação a uma correia plana do mesmo material?



Problema 6/114

6/10 Revisão do Capítulo

Em nosso estudo sobre atrito nos concentramos no atrito a seco, ou de Coulomb, onde um modelo mecânico simples das irregularidades das superfícies entre corpos em contato, Fig. 6/1, explica adequadamente o fenômeno para a maioria dos propósitos de engenharia. Esse modelo ajuda a visualizar os três tipos de problemas de atrito a seco, que são encontrados na prática. Esses problemas são:

1. Atrito estático menor do que o valor máximo possível e determinado pelas equações de equilíbrio. (O que requer normalmente uma verificação para ver se $F < \mu_s N$.)
2. Atrito estático limite, com movimento iminente ($F = \mu_s N$).
3. Atrito dinâmico, onde movimento relativo ocorre entre as superfícies em contato ($F = \mu_k N$).

Tenha em mente os seguintes tópicos quando estiver resolvendo problemas sobre atrito a seco:

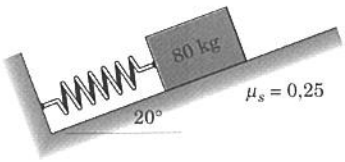
1. Um coeficiente de atrito se aplica a um dado par de superfícies em contato. Não tem sentido falar de um coeficiente de atrito para uma única superfície.
2. O coeficiente de atrito estático μ_s para um dado par de superfícies é normalmente ligeiramente maior do que o coeficiente de atrito dinâmico μ_k.
3. A força de atrito que atua em um corpo está sempre no sentido de se opor ao deslizamento do corpo, que está ocorrendo, ou ao deslizamento que ocorreria na ausência de atrito.
4. Quando forças de atrito são distribuídas sobre uma superfície ou ao longo de uma linha, selecionamos um elemento representativo da superfície ou da linha, e avaliamos os efeitos de força e de momento da força de atrito elementar atuando no elemento. Integramos, então, esses efeitos sobre toda a superfície ou linha.
5. Coeficientes de atrito variam consideravelmente, dependendo da condição exata das superfícies em contato. Calcular coeficientes de atrito com três algarismos significativos representa uma exatidão que não pode ser facilmente duplicada experimentalmente. Quando citados, esses valores são incluídos apenas para propósito de verificação de cálculos. Para cálculos de projeto na prática de engenharia, qualquer valor tabelado para um coeficiente de atrito estático ou dinâmico deve ser visto como uma aproximação.

Outras formas de atrito mencionadas na seção introdutória do capítulo são importantes em engenharia. Problemas que envolvem atrito de fluidos, por exemplo, estão entre os mais importantes problemas de atrito encontrados em engenharia, e são estudados no tópico de mecânica dos fluidos.

PROBLEMAS DE REVISÃO

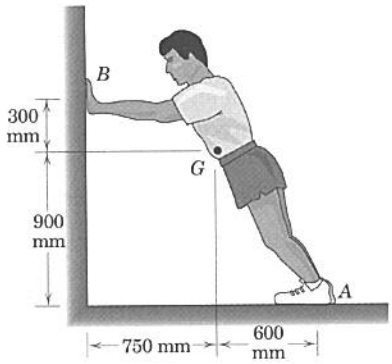
6/115 O bloco de 80 kg está colocado contra a mola em um plano com inclinação de 20° e é solto a partir do repouso. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano inclinado vale 0,25. (*a*) Determine os valores máximo e mínimo da força inicial de compressão na mola, para a qual o bloco não escorregará quando for solto. (*b*) Calcule o módulo e o sentido da força de atrito atuando sobre o bloco se a força de compressão C da mola vale 200 N.

Resp. $C_{máx} = 453$ N, $C_{mín} = 84{,}0$ N
$F = 68{,}4$ N para cima no plano



Problema 6/115

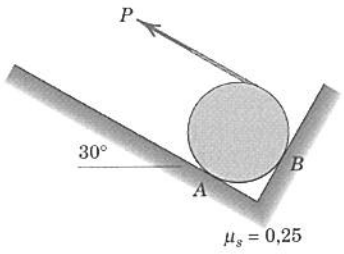
6/116 Antes de correr, um corredor alonga as panturrilhas se inclinando contra uma parede, como mostrado na figura. Essa posição é atingida sem força vertical (atrito) entre suas mãos e a parede. Qual é o coeficiente de atrito estático μ_s mínimo para o qual seus pés não escorregarão?



Problema 6/116

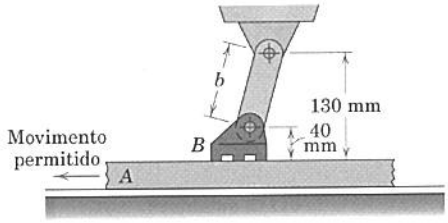
6/117 O disco homogêneo de massa m está em repouso sobre as superfícies de apoio em ângulo reto mostradas. A força trativa P na corda é aumentada bem gradualmente desde zero. Se o atrito, tanto em A quanto em B, é caracterizado por $\mu_s = 0{,}25$, o que acontece primeiro — o disco homogêneo vai escorregar no lugar em que está ou ele começará a rolar, subindo o plano inclinado? Determine o valor de P para o qual esse primeiro movimento ocorre.

Resp. $P = 0{,}232mg$



Problema 6/117

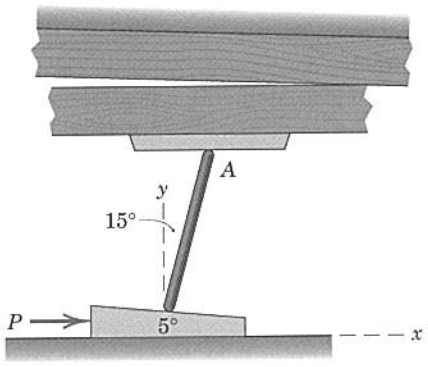
6/118 Um dispositivo de travamento por atrito permite que a barra A se mova para a esquerda, mas previne movimento para a direita. Se o coeficiente de atrito entre a sapata B e a barra A vale 0,40, especifique o máximo comprimento b do braço de ligação que permitirá que o dispositivo trabalhe como descrito.



Problema 6/118

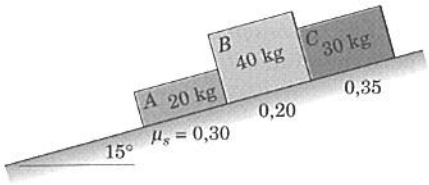
6/119 A cunha com cavilha é um dispositivo eficiente para fechar o vão entre duas pranchas, durante a construção de um barco de madeira. Para a combinação mostrada, se uma força $P = 1{,}2$ kN é requerida para mover a cunha, determine a força de atrito F que atua na extremidade superior A da cavilha. O coeficiente de atrito estático e dinâmico para todos os pares de superfície em contato vale 0,40.

Resp. $F = 481$ N



Problema 6/119

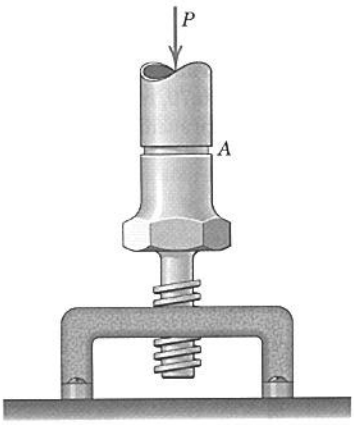
6/120 Três caixas em contato entre si são colocadas em um plano inclinado e são soltas a partir do repouso. Os coeficientes de atrito estático sob as caixas A, B e C valem 0,30, 0,20 e 0,35, respectivamente. Descreva o que ocorre.



Problema 6/120

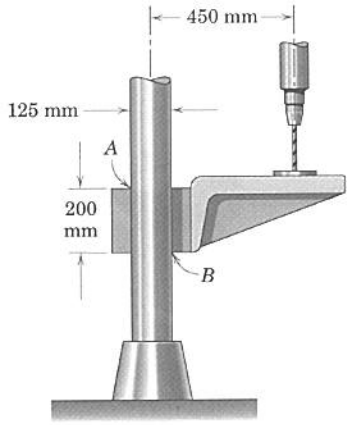
6/121 O dispositivo mostrado é usado para ajuste grosseiro da altura de um aparato experimental sem mudança de sua posição horizontal. Devido à junta deslizante em A, o giro do parafuso não causa giro no suporte cilíndrico acima de A. O diâmetro médio da rosca é 12 mm e o coeficiente de atrito vale 0,15. Em um projeto conservador que despreza o atrito na junta deslizante, qual seria o menor número N de roscas por centímetro para garantir que o parafuso de rosca simples não gire por si só sob o peso do aparato?

Resp. $N = 1{,}768$ rosca por centímetro



Problema 6/121

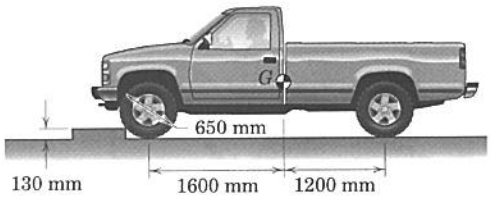
6/122 O coeficiente de atrito estático entre a braçadeira da furadeira de bancada e a coluna vertical vale 0,30. Se o operador esquecer-se de prender a trava, a braçadeira e a mesa deslizarão para baixo da coluna sob a ação da pressão da furadeira, ou o atrito será suficiente para mantê-las no lugar? Despreze o peso da mesa e da braçadeira comparado com a pressão da furadeira e assuma que ocorre contato nos pontos A e B.



Problema 6/122

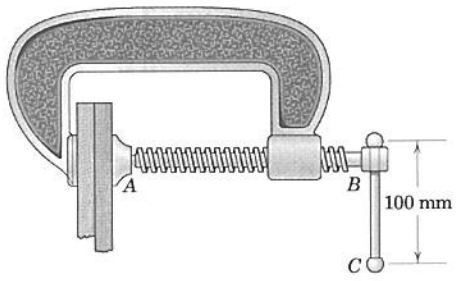
6/123 Calcule o torque M que o motor da caminhonete deve fornecer ao eixo traseiro para fazer com que as rodas dianteiras subam no degrau a partir de uma posição de repouso, sem que as rodas traseiras deslizem. Determine o coeficiente de atrito efetivo mínimo nas rodas traseiras para prevenir deslizamento. A massa da caminhonete carregada, com centro de massa em G, é de 1900 kg.

Resp. $M = 3{,}00$ kN · m, $\mu_{min} = 0{,}787$



Problema 6/123

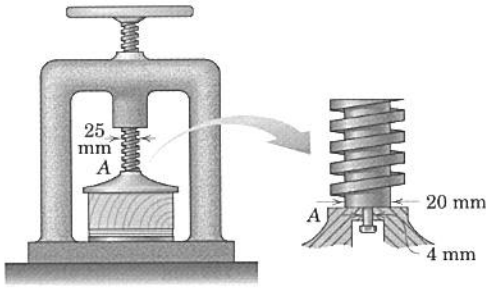
6/124 Uma força compressiva de 600 N deve ser aplicada aos dois painéis na garra do grampo C. O parafuso rosqueado tem um diâmetro médio de 10 mm e avança 2,5 mm por volta. O coeficiente de atrito estático vale 0,20. Determine a força F que deve ser aplicada normal à manopla em C para (a) apertar e (b) desapertar o grampo. Despreze o atrito no ponto A.



Problema 6/124

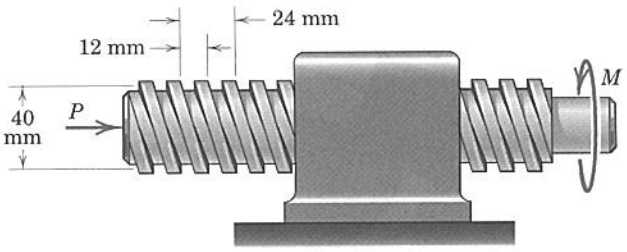
6/125 O parafuso da pequena prensa tem um diâmetro médio de 25 mm e possui uma rosca quadrada simples com passo de 8 mm. O mancal de escora plano em A é mostrado na vista ampliada e tem superfícies que estão bem gastas. Se o coeficiente de atrito tanto para as roscas quanto para o mancal em A vale 0,25, calcule o torque de projeto M necessário no volante para (a) produzir uma força compressiva de 4 kN e (b) afrouxar a prensa da compressão de 4 kN.

Resp. (a) $M = 24{,}1$ N · m, (b) $M = 13{,}22$ N · m



Problema 6/125

6/126 O parafuso com 40 mm de diâmetro tem uma rosca quadrada dupla com passo de 12 mm e avanço de 24 mm. O parafuso e as roscas correspondentes no bloco fixo são lubrificados com grafite e têm um coeficiente de atrito de 0,15. Se um torque $M = 60$ N · m é aplicado à parte direita do eixo, determine (a) a força P necessária para avançar o eixo para a direita e (b) a força P que permitiria que o eixo se movesse para a esquerda à velocidade constante.

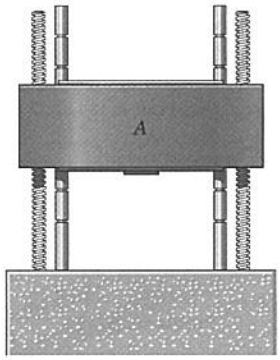


Problema 6/126

6/127 O travessão móvel de uma máquina de ensaios universal tem uma massa de 2,2 Mg e é levantado para a posição de ensaio por dois parafusos monorrosca com 78 mm de diâmetro e passo de 13 mm. Se o coeficiente de atrito nas roscas é de 0,25, que torque M deve ser dado a cada parafuso (a) para levantar o travessão e (b)

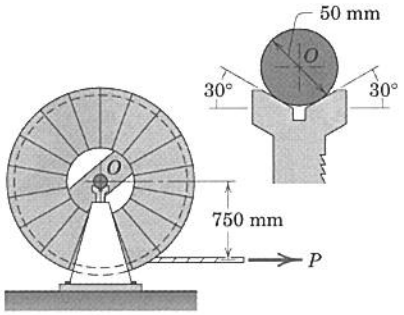
para abaixá-lo? As colunas internas de carregamento não estão presas ao travessão durante o posicionamento.

Resp. (*a*) $M = 129{,}3$ N · m, (*b*) $M = 81{,}8$ N · m



Problema 6/127

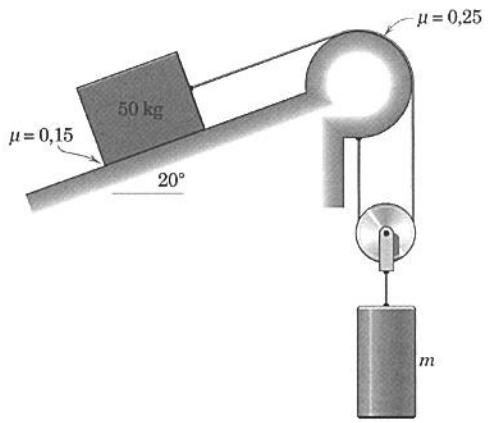
6/128 O carretel de cabo telefônico tem massa de 3 Mg e se apóia em seu eixo sobre blocos em forma de V, dos dois lados do carretel. O carretel é erguido do solo elevando os suportes, de forma que o cabo pode ser puxado na direção horizontal, como mostrado. O eixo é preso ao carretel e gira junto com ele. Se o coeficiente de atrito entre o eixo e as superfícies em V vale 0,30, calcule a força P no cabo necessária para girar o carretel.



Problema 6/128

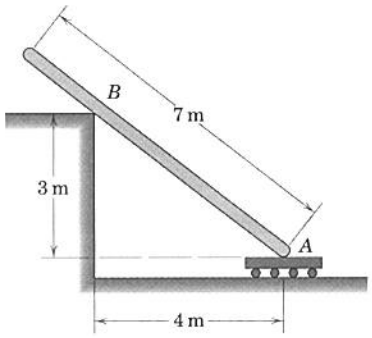
6/129 Determine a faixa de massas m do cilindro para a qual o sistema está em equilíbrio. O coeficiente de atrito entre o bloco de 50 kg e o plano inclinado vale 0,15 e aquele entre a corda e o apoio cilíndrico vale 0,25.

Resp. $12{,}44 \leq m \leq 78{,}0$ kg



Problema 6/129

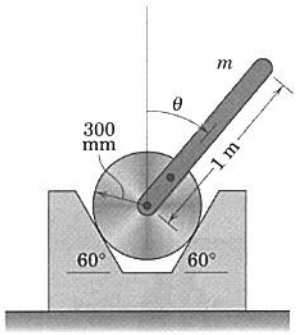
6/130 A extremidade inferior A da prancha uniforme de 80 kg se apóia em roletes que estão livres para se mover na superfície horizontal. Se os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre a prancha e o vértice B valem 0,80 e 0,70, respectivamente, calcule a força de atrito F atuando em B se a prancha é solta a partir do repouso na posição mostrada.



Problema 6/130

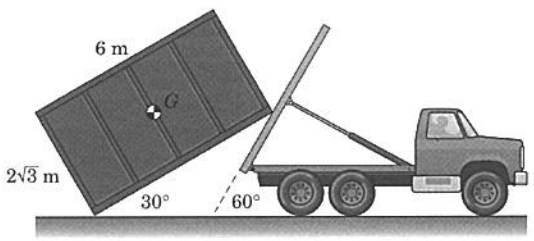
6/131 O cilindro tem massa de 36 kg e a barra esbelta uniforme a ele presa tem uma massa m desconhecida. Esse conjunto permanece em equilíbrio estático para valores do ângulo θ de até 45°, mas escorrega se θ exceder 45°. Determine m, sabendo-se que o coeficiente de atrito estático vale 0,30.

Resp. $m = 31{,}6$ kg



Problema 6/131

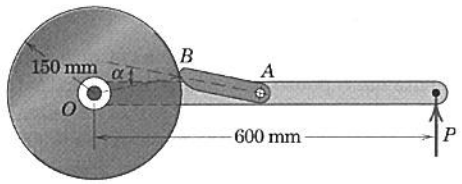
6/132 O caminhão descarrega o caixote deslizando-o para fora da plataforma elevada, conforme se move lentamente para frente, com os seus freios ativados para permitir controle. O caixote tem massa total de 5 Mg com centro de massa em G, no centro do caixote. O coeficiente de atrito estático entre o caixote e a plataforma vale 0,30. Calcule a força de frenagem F entre os pneus e a estrada plana quando o caixote está na iminência de escorregar da plataforma a partir da posição mostrada, e o caminhão está na iminência de rolar para frente. Não ocorre deslizamento no canto inferior do caixote.



Problema 6/132

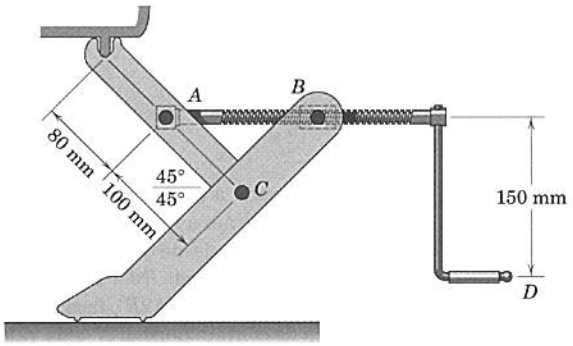
6/133 A figura mostra uma chave à fricção para girar a roda no sentido anti-horário sob a ação da uma força P aplicada ao cabo. O conector flutuante AB se prende à roda de forma que $\theta = 20°$. Se uma força $P = 150$ N é necessária para girar a roda em torno de seu mancal em O, determine (a) o coeficiente de atrito estático mínimo entre o conector e a roda que garantirá que não haja deslizamento em B e (b) o módulo R da força sobre o pino em A.

Resp. (a) $(\mu_s)_{mín} = 0{,}364$, (b) $R = 1{,}754$ kN



Problema 6/133

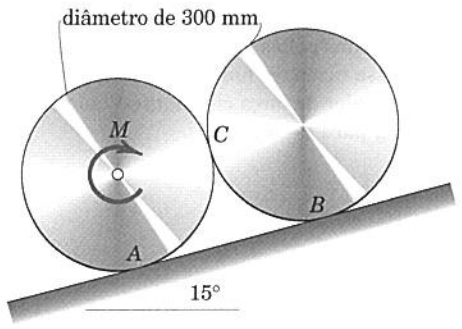
6/134 O macaco mostrado é projetado para levantar carros pequenos. O parafuso é rosqueado na bucha articulada em B e o eixo gira em um mancal de apoio em A. A rosca tem um diâmetro médio de 10 mm e um passo (avanço por revolução) de 2 mm. O coeficiente de atrito para as roscas vale 0,20. Determine a força P normal à manopla em D necessária (a) para levantar uma massa de 500 kg desde a posição mostrada e (b) para abaixar a carga a partir da mesma posição. Despreze o atrito no pivô e no mancal em A.



Problema 6/134

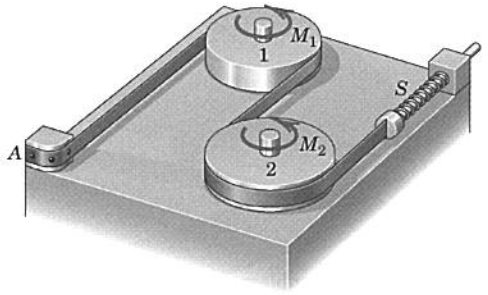
6/135 Calcule o momento M aplicado ao cilindro inferior do par, ambos com 20 kg, que permitirá que eles rolem para *baixo* lentamente. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico para todas as superfícies de contato são $\mu_s = 0{,}60$ e $\mu_k = 0{,}50$.

Resp. $M = 10{,}16$ N · m



Problema 6/135

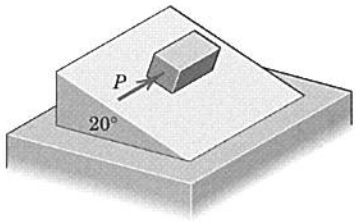
6/136 A fita flexível presa em A faz uma meia volta em torno de cada um dos tambores de 100 mm de diâmetro e termina na mola S, que é ajustada para produzir uma força trativa de 40 N sobre a fita. Calcule os torques M_1 e M_2 aplicados aos eixos dos tambores, de forma a girá-los ao mesmo tempo na direção mostrada. O coeficiente de atrito entre o tambor 1 e a fita vale 0,30, e entre o tambor 2 e a fita vale 0,20.



Problema 6/136

6/137 O bloco de 8 kg está em repouso sobre o plano inclinado a 20°, com um coeficiente de atrito estático $\mu_s = 0{,}50$. Determine a força horizontal mínima P que fará com que o bloco deslize.

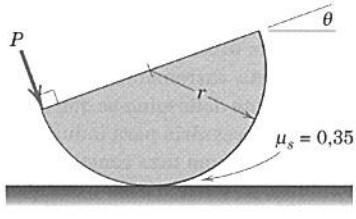
Resp. $P = 25{,}3$ N



Problema 6/137

*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador**

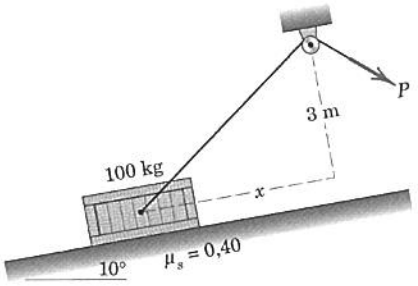
***6/138** O semicilindro com massa específica uniforme se apóia sobre uma superfície horizontal e está sujeito a uma força P aplicada como mostrado. Se P aumenta lentamente e é mantida normal à superfície plana, faça um gráfico do ângulo de inclinação θ em função de P até o ponto de deslizamento. Determine o ângulo $\theta_{máx}$ e o valor correspondente $P_{máx}$ para os quais o deslizamento ocorre. O coeficiente de atrito estático vale 0,35.



Problema 6/138

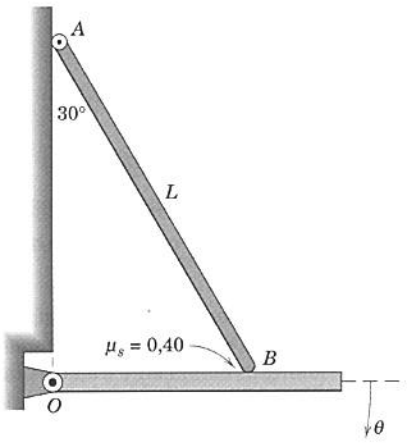
***6/139** Faça um gráfico da força P necessária para mover o caixote de 100 kg para cima do plano com inclinação de 10°, a partir do repouso, para vários valores de x, desde zero até 10 m. Determine o menor valor possível de P e o valor correspondente de x.

Resp. $P_{mín} = 517$ N em $x = 7{,}5$ m



Problema 6/139

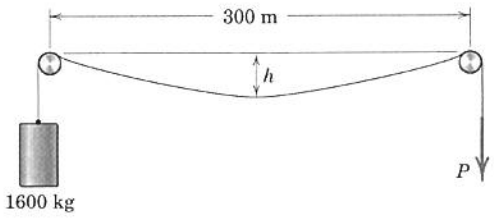
***6/140** O pequeno rolamento na extremidade superior da barra uniforme está apoiado contra a superfície vertical em A, enquanto a extremidade arredondada B repousa sobre a plataforma que está ligeiramente girada para baixo a partir da posição horizontal mostrada. Para um coeficiente de atrito estático $\mu_s = 0{,}40$ em B, determine o ângulo θ da plataforma no qual ocorrerá deslizamento. Despreze o tamanho e o atrito do rolamento e a pequena espessura da plataforma.



Problema 6/140

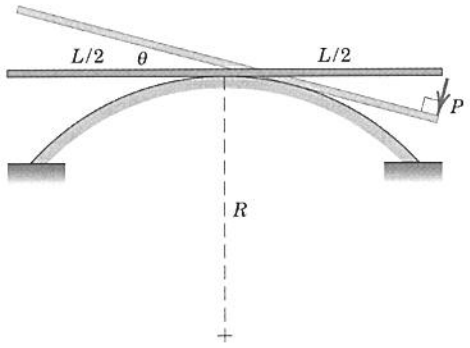
***6/141** Um cabo pesado, com massa de 12 kg por metro de comprimento, passa sobre os dois tubos presos distantes 300 m entre si, e em um mesmo nível. Uma extremidade sustenta um cilindro de 1600 kg. Experimentalmente determina-se que uma força P de 60 kN direcionada para baixo é necessária para induzir escorregamento do cabo sobre ambos os tubos a uma taxa constante. Determine o coeficiente de atrito dinâmico μ_k entre o cabo e os tubos, a força trativa máxima T no cabo entre os tubos e a deflexão h no cabo.

Resp. $\mu_k = 0{,}298$, $T = 30{,}7$ kN, $h = 58{,}1$ m



Problema 6/141

***6/142** A barra esbelta uniforme de massa m e comprimento L está inicialmente em repouso, em uma posição horizontal centrada, sobre a superfície circular fixa de raio $R = 0{,}6L$. Se uma força P normal à barra é aplicada gradualmente a sua extremidade, determine o ângulo de equilíbrio máximo θ que a barra pode atingir antes de escorregar. O coeficiente de atrito estático entre a barra e seu apoio vale 0,15.



Problema 6/142

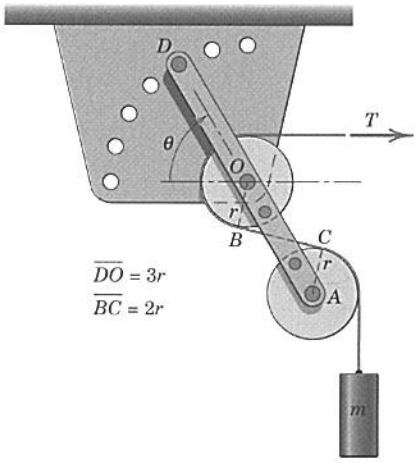
***6/143** Refira-se ao Prob. 6/142 onde a massa da barra uniforme vale 3 kg, $L = 2$m e $R = 1{,}2$ m. Conforme a força P é aumentada, o ângulo de equilíbrio θ também aumenta, desde que não ocorra deslizamento. O valor limite de θ é atingido quando $R\theta = L/2$, onde θ está em radianos. Para valores de θ entre zero e $L/(2R)$, faça gráficos do valor de equilíbrio de P, da força de contato normal N, e do valor mínimo μ_s do coeficiente de atrito estático que impede que ocorra deslizamento naquele ângulo. Identifique o ângulo θ_{cr} no qual μ_s atinge seu valor máximo.

Resp. $P = \dfrac{35{,}3\theta \cos\theta}{1 - 1{,}2\theta}$, $N = \dfrac{29{,}4 \cos\theta}{1 - 1{,}2\theta}$

$\mu_s = (1 - 1{,}2\theta) \tan\theta$

$(\mu_s)_{máx} = 0{,}222$ em $\theta = 25{,}5°$

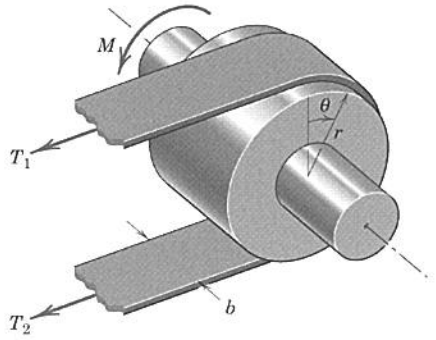
***6/144** O dispositivo está projetado para permitir um ajuste da força trativa horizontal T no cabo que passa em torno das duas polias fixas, para abaixar a massa m. Se o coeficiente de atrito entre o cabo e as superfícies das polias vale 0,40, determine a razão T/mg, e faça um gráfico dessa razão em função de θ na faixa $0 < \theta < 90°$. Determine também o valor da força cisalhante V no pino de ajuste em D em termos de mg para $\theta = 60°$.



Problema 6/144

***6/145** A correia plana tem largura $b = 50$ mm e está no limiar de deslizar conforme ela puxa a polia com raio $r = 75$ mm através de um ângulo de contato de 180°. Se força trativa no lado frouxo da correia é $T_1 = 1000$ N, faça um gráfico da pressão normal p entre a correia e a polia, em função de θ entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Especifique as pressões máxima e mínima p_1 e p_2, a força trativa T_2, e o torque reativo M sobre o eixo da polia. O coeficiente de atrito entre a correia e a polia vale 0,30. (Os mancais da polia não estão mostrados.)

Resp. $p_1 = 267$ kPa, $p_2 = 684$ kPa
$M = 117{,}5$ N · m



Problema 6/145

Cortesia da UpRight, Inc.

A análise de estruturas com múltiplas conexões, com configuração variável, geralmente é mais bem tratada pelo método do trabalho virtual. Essa plataforma de construção é um exemplo típico.

7 TRABALHO VIRTUAL

DESCRIÇÃO DO CAPÍTULO

7/1 Introdução
7/2 Trabalho
7/3 Equilíbrio
7/4 Energia Potencial e Estabilidade
7/5 Revisão do Capítulo

7/1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores analisamos o equilíbrio de um corpo isolando-o com um diagrama de corpo livre e igualando a zero as equações dos somatórios de forças e momentos. Esse enfoque é normalmente empregado para um corpo cuja posição de equilíbrio é conhecida ou dada e onde uma ou mais das forças externas é uma incógnita a ser determinada.

Existe uma classe diferente de problemas, na qual os corpos são compostos de elementos interligados, que podem se mover um em relação ao outro. Assim, várias configurações de equilíbrio são possíveis e devem ser examinadas. Para problemas desse tipo, as equações de equilíbrio de forças e momentos, embora válidas e adequadas, freqüentemente não são o enfoque mais direto e conveniente.

Um método baseado no conceito do trabalho feito por uma força é mais direto. Além disso, o método dá um entendimento mais profundo sobre o comportamento de sistemas mecânicos e nos permite examinar a estabilidade de sistemas em equilíbrio. Esse método é chamado de *método do trabalho virtual*.

7/2 TRABALHO

Primeiramente devemos definir o termo *trabalho* em seu sentido quantitativo, em contraposição ao seu sentido não técnico mais corriqueiro.

Trabalho de uma Força

Considere a força constante $\mathbf{F}$ atuando sobre o corpo mostrado na Fig. 7/1*a*, cujo movimento ao longo do plano desde A até A' é representado pelo vetor $\Delta\mathbf{s}$, denominado *deslocamento* do corpo. Por definição, o trabalho U realizado pela força $\mathbf{F}$ sobre o corpo durante esse deslocamento é a componente da força na direção do deslocamento vezes o deslocamento, ou

$$U = (F\cos\alpha)\,\Delta s$$

Da Fig. 7/1*b* vemos que o mesmo resultado é obtido se multiplicarmos o módulo da força pela componente do deslocamento na direção da força. Isto dará

$$U = F(\Delta s\cos\alpha)$$

Como obtemos o mesmo resultado independentemente da direção na qual projetamos os vetores, concluímos que o trabalho U é uma quantidade *escalar*.

O trabalho é positivo quando a componente da força que está produzindo trabalho está no mesmo sentido que o deslocamento. Quando a componente produzindo trabalho está no sentido oposto ao deslocamento, Fig. 7/2, o trabalho realizado é negativo. Assim,

$$U = (F\cos\alpha)\,\Delta s = -(F\cos\theta)\,\Delta s$$

Generalizaremos agora a definição de trabalho para considerar as condições sob as quais a direção do deslocamento e o módulo e a direção da força são variáveis.

A Fig. 7/3*a* mostra a força $\mathbf{F}$ atuando sobre um corpo no ponto A, que se move ao longo do percurso mostrado, desde A_1 até A_2. O ponto A é localizado pelo seu vetor posição $\mathbf{r}$, medido desde uma origem O arbitrária, mas conveniente. O deslocamento infinitesimal no movimento desde A até A' é dado pela variação infinitesimal $d\mathbf{r}$ do vetor posição. O trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ durante o deslocamento $d\mathbf{r}$ é definido como

$$\boxed{dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}} \qquad (7/1)$$

Se F representa o módulo da força $\mathbf{F}$ e ds representa o módulo do deslocamento diferencial $d\mathbf{r}$, usamos a definição do produto escalar para obter

$$dU = F\,ds\cos\alpha$$

Podemos novamente interpretar essa expressão como sendo a componente $F\cos\alpha$ da força na direção do deslocamento, vezes o deslocamento, ou como a componente $ds\cos\alpha$ do deslocamento na direção da força, vezes a força, como representado na Fig. 7/3*b*. Se escrevermos $\mathbf{F}$ e $d\mathbf{r}$ em termos de suas componentes retangulares, temos

$$\begin{aligned} dU &= (\mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z)\cdot(\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz) \\ &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \end{aligned}$$

Para obter o trabalho total U realizado por $\mathbf{F}$ durante um movimento finito do ponto A, desde A_1 até A_2, Fig. 7/3*a*, integramos dU entre essas posições. Assim,

$$U = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$

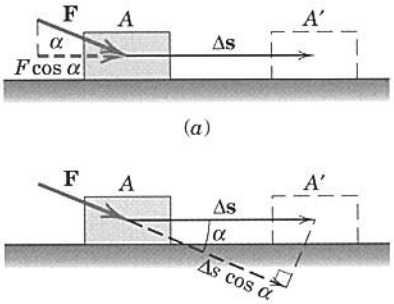


Figura 7/1

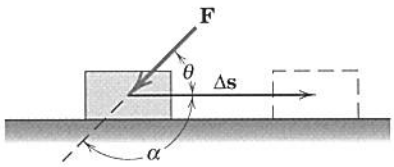


Figura 7/2

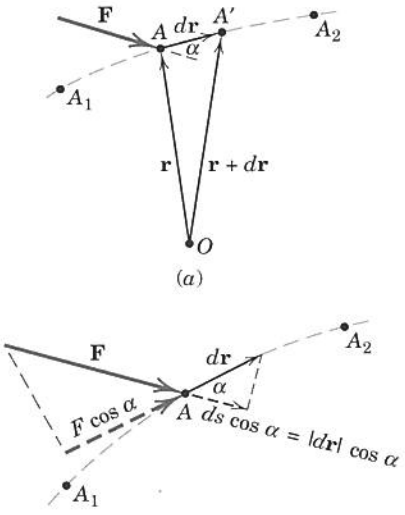


Figura 7/3

ou

$$U = \int F \cos \alpha \, ds$$

Para fazer essa integração devemos conhecer a relação entre as componentes de força e suas respectivas coordenadas, ou as relações entre F e s e entre cos α e s.

No caso de forças concorrentes, que estão aplicadas em qualquer ponto sobre um corpo, o trabalho realizado pela resultante dessas forças é igual ao trabalho total realizado pelas diversas forças. Isso acontece porque a componente da resultante na direção do deslocamento é igual a soma das componentes das diversas forças nessa mesma direção.

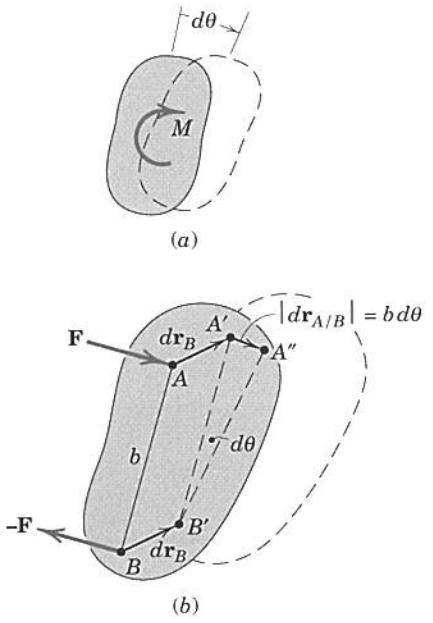


Figura 7/4

Trabalho de um Binário

Além do trabalho feito por forças, binários também podem realizar trabalho. Na Fig. 7/4*a*, o binário M atua sobre o corpo e muda a sua posição angular por um valor $d\theta$. O trabalho realizado pelo binário é facilmente determinado a partir do trabalho combinado das duas forças que formam o binário. Na parte *b* da figura representamos o binário por duas forças iguais e opostas, $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$, atuando em dois pontos arbitrários A e B, tal que $F = M/b$. Durante o movimento infinitesimal no plano da figura, a linha AB se move para $A''B'$. Consideramos agora o deslocamento de A em dois passos. Primeiro, um deslocamento $d\mathbf{r}_B$ igual ao de B e, a seguir, um deslocamento $d\mathbf{r}_{A/B}$ (lido como o deslocamento de A em relação a B) devido à rotação em torno de B. Assim, o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ durante o deslocamento de A até A' é igual e oposto em sinal ao devido a $-\mathbf{F}$, agindo sobre o mesmo deslocamento de B até B'. Concluímos, portanto, que nenhum trabalho é realizado por um binário durante uma translação (movimento sem rotação).

Durante a rotação, entretanto, $\mathbf{F}$ realiza trabalho igual a $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{A/B} = Fb \, d\theta$, onde $d\mathbf{r}_{A/B} = b \, d\theta$ e onde $d\theta$ é o ângulo de rotação infinitesimal em radianos. Como $M = Fb$, temos

$$\boxed{dU = M \, d\theta} \qquad \textbf{(7/2)}$$

O trabalho do binário é positivo se M tem o mesmo sentido que $d\theta$ (no sentido horário na ilustração) e negativo se M tem um sentido oposto àquele da rotação. O trabalho total de um binário durante uma rotação finita em seu plano será

$$U = \int M \, d\theta$$

Dimensões de Trabalho

Trabalho tem dimensões de (força) × (distância). Em unidades SI, a unidade de trabalho é o joule (J), que é o trabalho

realizado por uma força de um newton sobre uma distância de um metro no sentido da força (J = N · m). Em unidades SI do sistema gravitacional, a unidade de trabalho é o quilograma-força · metro (kgf · m), que é o trabalho realizado por uma força de um kgf sobre uma distância de um metro, no sentido da força.

As dimensões do trabalho de uma força e do momento de uma força são as mesmas, embora sejam quantidades físicas inteiramente diferentes. Observe que o trabalho é um *escalar*, obtido pelo produto escalar, e, assim, envolve o produto de uma força e uma distância, ambas medidas ao longo da mesma linha. Momento, por outro lado, é um *vetor*, dado pelo produto vetorial e envolve o produto da força e da distância, medida ortogonal à força. Para distinguir entre essas duas quantidades quando escrevemos suas unidades, usamos o joule (J), em unidades SI, para trabalho e reservamos as unidades combinadas newton-metro (N · m) para momento.

Trabalho Virtual

Consideramos agora uma partícula cuja posição de equilíbrio estático é determinada pelas forças que atuam sobre ela. Qualquer deslocamento pequeno e arbitrário considerado, $\delta\mathbf{r}$, para fora dessa posição natural, e consistente com as restrições do sistema, é chamado um *deslocamento virtual*. O termo *virtual* é usado para indicar que o deslocamento não existe realmente, mas apenas considera-se que ele existe, de modo que podemos comparar várias possíveis posições de equilíbrio para determinar a correta.

O trabalho realizado por qualquer força $\mathbf{F}$ atuando sobre a partícula durante o deslocamento virtual $\delta\mathbf{r}$ é chamado *trabalho virtual* e vale

$$\delta U = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} \qquad \text{ou} \qquad \delta U = F\,\delta s\cos\alpha$$

onde α é o ângulo entre $\mathbf{F}$ e $\delta\mathbf{r}$ e δs é o módulo de $\delta\mathbf{r}$. A diferença entre $d\mathbf{r}$ e $\delta\mathbf{r}$ é que $d\mathbf{r}$ se refere a uma variação infinitesimal real na posição e pode ser integrada, enquanto $\delta\mathbf{r}$ se refere a um movimento infinitesimal virtual, ou considerado, e não pode ser integrado. Matematicamente ambas as quantidades são diferenciais de primeira ordem.

Um deslocamento virtual pode também ser uma rotação $\delta\theta$ de um corpo. De acordo com a Eq. 7/2 o trabalho virtual realizado por um binário M durante um deslocamento angular virtual $\delta\theta$ vale $\delta U = M\,\delta\theta$.

Podemos encarar a força $\mathbf{F}$ ou o binário M como permanecendo constantes durante qualquer deslocamento virtual infinitesimal. Se levarmos em conta qualquer variação em $\mathbf{F}$ ou em M durante o movimento infinitesimal, aparecerão termos de ordens superiores, que desaparecerão no limite. Essa consideração é, matematicamente, a mesma que aquela que permite desprezar o produto $dxdy$ quando escrevemos $dA = y\,dx$ para o elemento de área sob a curva $y = f(x)$.

7/3 Equilíbrio

Expressamos, agora, as condições de equilíbrio em termos do trabalho virtual. Primeiramente para uma partícula, depois para um corpo rígido e, então, para um sistema de corpos rígidos interligados.

Equilíbrio de uma Partícula

Considere a partícula, ou o corpo pequeno, na Fig. 7/5, a qual atinge uma posição de equilíbrio como resultado das forças nas molas presas a ela. Se a massa da partícula fosse significativa, então o peso mg deveria também ser incluído como uma das forças. Para um deslocamento virtual considerado, $\delta\mathbf{r}$, da partícula para fora de sua posição de equilíbrio, o trabalho virtual total realizado sobre a partícula vale

$$\delta U = \mathbf{F}_1\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_3\cdot\delta\mathbf{r} + \cdots = \Sigma\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}$$

Expressamos agora $\Sigma\mathbf{F}$ em termos de suas somas escalares e $\delta\mathbf{r}$ em termos das componentes de seus deslocamentos virtuais nas direções coordenadas:

$$\delta U = \Sigma\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} = (\mathbf{i}\,\Sigma F_x + \mathbf{j}\,\Sigma F_y + \mathbf{k}\,\Sigma F_z)\cdot(\mathbf{i}\,\delta x + \mathbf{j}\,\delta y + \mathbf{k}\,\delta z)$$
$$= \Sigma F_x\,\delta x + \Sigma F_y\,\delta y + \Sigma F_z\,\delta z = 0$$

O somatório vale zero, pois $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$, o que implica $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma F_z = 0$. A equação $\delta U = 0$ é, portanto, um enunciado alternativo das condições de equilíbrio para uma partícula. Essa condição de trabalho virtual nulo para o equilíbrio é tanto necessária quanto suficiente, pois podemos aplicá-la a deslocamentos virtuais considerados um de cada vez, em cada uma das três direções mutuamente perpendiculares. Nesse caso ela se torna equivalente às três condições escalares de equilíbrio conhecidas.

O princípio do trabalho virtual nulo para o equilíbrio de uma única partícula normalmente não simplifica esse problema, já simples, pois $\delta U = 0$ e $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ dão a mesma informação. Entretanto, introduzimos o conceito do trabalho virtual para uma partícula, de modo que possamos aplicá-lo posteriormente a sistemas de partículas.

Equilíbrio de um Corpo Rígido

Podemos facilmente estender o princípio do trabalho virtual de uma partícula para um corpo rígido, tratado como um sistema de elementos pequenos ou partículas rigidamente presas entre si. Como o trabalho virtual realizado em cada partícula do corpo em equilíbrio vale zero, então o trabalho

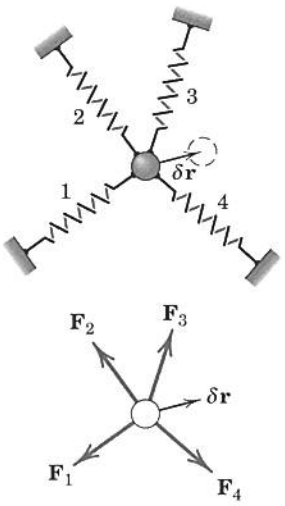


Figura 7/5

virtual realizado sobre todo o corpo rígido é zero. Para o corpo inteiro, apenas o trabalho virtual realizado por forças *externas* aparece na avaliação de $\delta U = 0$, pois todas as forças internas ocorrem em pares de forças colineares, iguais e opostas, e o trabalho resultante realizado por estas forças durante qualquer movimento vale zero.

Como no caso de uma partícula, verificamos novamente que o princípio do trabalho virtual não oferece nenhuma vantagem particular à solução para um único corpo rígido em equilíbrio. Quaisquer deslocamentos virtuais considerados, definidos por um movimento linear ou angular, aparecerão em cada termo de $\delta U = 0$, e quando cancelados nos levarão à mesma expressão que obteríamos usando diretamente uma das equações de equilíbrio de força ou de momento.

Essa condição está ilustrada na Fig. 7/6, onde queremos determinar a reação R sob o rolete para uma placa articulada de peso desprezível sob a ação de uma dada força P. Uma pequena rotação considerada, $\delta\theta$, em torno de O é consistente com a restrição da articulação em O e é tomada como o deslocamento virtual. O trabalho realizado por P é $-Pa\ \delta\theta$, e o trabalho realizado por R é $+Rb\ \delta\theta$. Desse modo, o princípio de que $\delta U = 0$ dá

$$-Pa\ \delta\theta + Rb\ \delta\theta = 0$$

Cancelando $\delta\theta$ tem-se

$$Pa - Rb = 0$$

que é simplesmente a equação de equilíbrio do momento em torno de O. Assim sendo, nada se ganha usando o princípio do trabalho virtual para um único corpo rígido. O princípio é, entretanto, decididamente vantajoso para corpos interligados, como discutido a seguir.

Equilíbrio de Sistemas Ideais de Corpos Rígidos

Ampliaremos agora o princípio do trabalho virtual ao equilíbrio de um sistema interligado de corpos rígidos. Nosso tratamento será limitado aqui aos chamados *sistemas ideais*. Esses sistemas são compostos por dois ou mais elementos rígidos interligados por conexões mecânicas, que são incapazes de absorver energia por meio de alongamento ou compressão e nas quais o atrito é suficientemente pequeno, podendo ser desprezado.

A Fig. 7/7*a* mostra um exemplo simples de um sistema ideal onde o movimento relativo entre suas duas partes é possível e onde a posição de equilíbrio é determinada pelas forças externas aplicadas **P** e **F**. Podemos identificar três tipos de forças que atuam nesse sistema interligado. Elas são, como se segue:

(1) *Forças ativas* são forças externas capazes de realizar trabalho virtual durante possíveis deslocamentos virtuais. Na Fig. 7/7*a* as forças **P** e **F** são forças ativas porque poderiam realizar trabalho à medida que as conexões se movessem.

(2) *Forças reativas* são forças que atuam nos apoios, em posições fixas, onde não ocorrem deslocamentos virtuais na direção da força. Forças reativas não realizam trabalho durante um deslocamento virtual. Na Fig. 7/7*b* a força horizontal $\mathbf{F}_B$ exercida pela guia vertical sobre a extremidade com rolamento do elemento não pode realizar trabalho porque não pode existir deslocamento horizontal do rolamento. A força reativa $\mathbf{F}_O$ exercida sobre o sistema pelo apoio fixo em O também não realiza trabalho porque O não pode se mover.

(3) *Forças internas* são forças nas conexões entre elementos. Durante qualquer possível movimento do sistema ou de suas partes, o *trabalho resultante realizado pelas forças internas nas conexões vale zero*. Isto ocorre porque as forças internas sempre existem em pares de forças iguais e opostas, como indicado para as forças internas $\mathbf{F}_A$ e $-\mathbf{F}_A$ no nó A na Fig. 7/7*c*. Desse modo, o trabalho de uma força necessariamente cancela o trabalho da outra força durante seus deslocamentos idênticos.

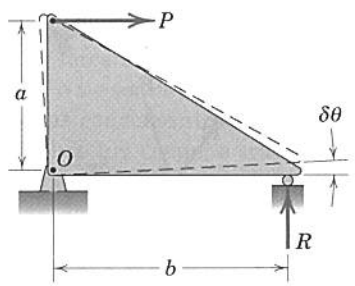
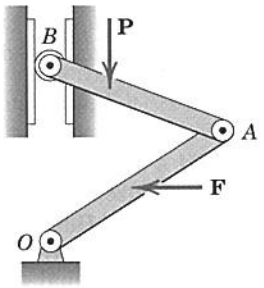
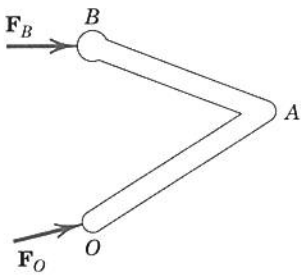


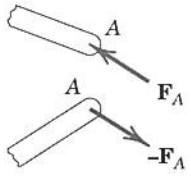
Figura 7/6



(*a*) Forças ativas



(*b*) Forças reativas



(*c*) Forças internas

Figura 7/7

Princípio do Trabalho Virtual

Observando que apenas forças ativas externas realizam trabalho durante qualquer possível movimento do sistema, podemos agora enunciar o princípio do trabalho virtual como se segue:

O trabalho virtual realizado por forças ativas externas sobre um sistema mecânico ideal em equilíbrio vale zero para cada um e para todos os deslocamentos virtuais consistentes com suas restrições.

Por restrição queremos dizer impedimento ao movimento devido aos apoios. Enunciamos matematicamente o princípio pela equação

$$\delta U = 0 \tag{7/3}$$

onde δU representa o trabalho virtual total realizado sobre o sistema por todas as forças ativas durante um deslocamento virtual.

Somente agora podemos ver as vantagens reais do método de trabalho virtual, que são essencialmente duas. Primeiro, não é necessário desmembrar sistemas ideais para estabelecer as relações entre as forças ativas, como geralmente ocorre com o método de equilíbrio baseado nos somatórios de forças e momentos. Segundo, podemos determinar as relações entre as forças ativas diretamente, sem referência às forças reativas. Essas vantagens tornam o método do trabalho virtual particularmente útil na determinação da posição de equilíbrio de um sistema sob cargas conhecidas. Esse tipo de problema contrasta com o problema de determinação das forças atuando em um corpo cuja posição de equilíbrio é conhecida.

O método do trabalho virtual é especialmente útil para os propósitos mencionados, mas requer que as forças de atrito internas realizem um trabalho desprezível durante qualquer deslocamento virtual. Conseqüentemente, se o atrito interno em um sistema mecânico for apreciável, o método do trabalho virtual não pode ser usado para o sistema como um todo, a menos que o trabalho realizado pelo atrito interno seja incluído.

Ao usar o método do trabalho virtual, deve-se desenhar um diagrama que isole o sistema em consideração. Diferentemente do diagrama de corpo livre, onde todas as forças são conhecidas, o diagrama para o método do trabalho virtual precisa mostrar apenas as *forças ativas*, pois as forças reativas não entram na aplicação de $\delta U = 0$. Esse diagrama será denominado *diagrama de forças ativas*. A Fig. 7/7*a* é um diagrama de forças ativas para o sistema mostrado.

Graus de Liberdade

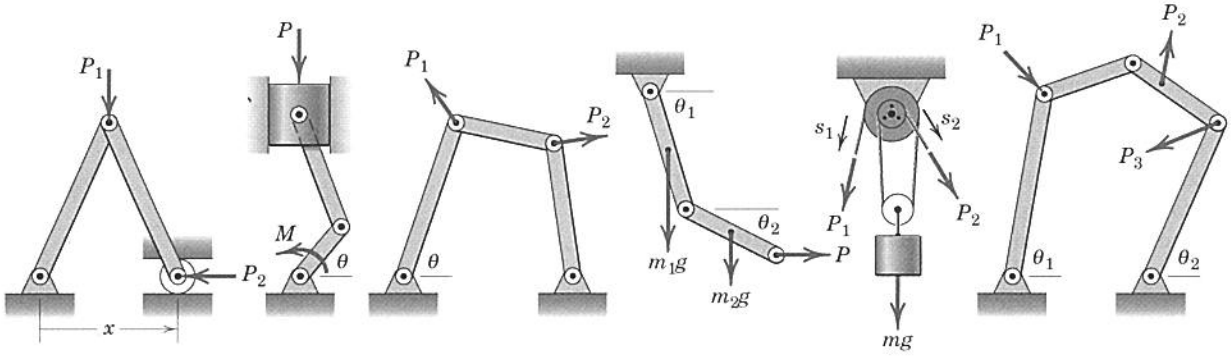
O número de *graus de liberdade* de um sistema mecânico é o número de coordenadas independentes necessárias para especificar completamente a configuração do sistema. A Fig. 7/8*a* mostra três exemplos de sistemas com um grau de liberdade. Apenas uma coordenada é necessária para estabelecer a posição de cada parte do sistema. A coordenada pode ser um comprimento ou um ângulo. A Fig. 7/8*b* mostra três exemplos de sistemas com dois graus de liberdade, onde duas coordenadas independentes são necessárias para determinar a configuração do sistema. Adicionando-se mais elos ao mecanismo na figura da direita, não existirá limite para o número de graus de liberdade que podem ser introduzidos.

O princípio do trabalho virtual, $\delta U = 0$, pode ser aplicado tantas vezes quantos forem os graus de liberdade. Em cada aplicação permitimos que apenas uma coordenada independente varie de cada vez, mantendo as outras constantes. No nosso tratamento do trabalho virtual neste capítulo, consideramos apenas sistemas com um grau de liberdade.

Sistemas com Atrito

Quando o atrito, devido a movimentos relativos, estiver presente em qualquer grau apreciável em um sistema mecânico, o sistema é denominado "real". Em sistemas reais, parte do trabalho positivo realizado sobre o sistema por forças externas ativas (trabalho aplicado) é dissipada sob a forma de calor gerado pelas forças de atrito dinâmico durante o movimento do sistema. Quando existe movimento relativo entre superfícies em contato, a força de atrito realiza trabalho negativo porque seu sentido é sempre contrário ao movimento do corpo sobre o qual ela atua. Esse trabalho negativo não pode ser recuperado.

Assim, a força de atrito dinâmico, $\mu_k N$, atuando sobre o bloco em movimento na Fig. 7/9*a* realiza um trabalho de



(*a*) Exemplos de sistemas com um grau de liberdade (*b*) Exemplos de sistemas com dois graus de liberdade

Figura 7/8

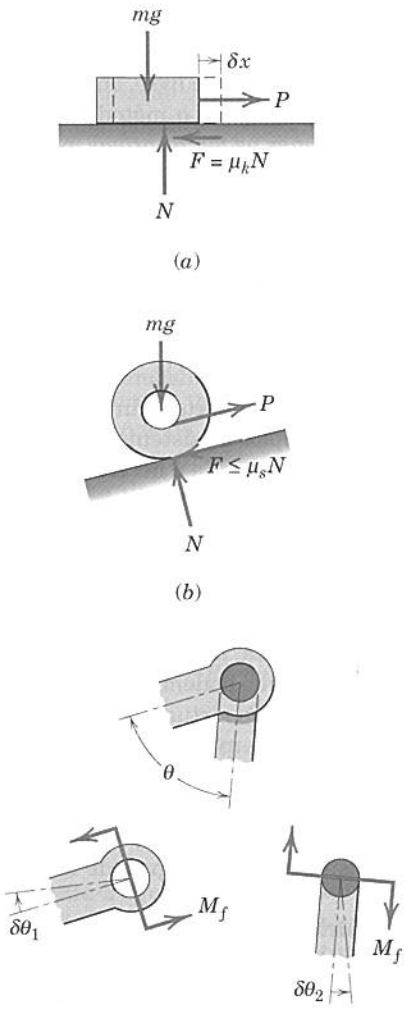


Figura 7/9

$-\mu_k Nx$ sobre o bloco, durante um deslocamento x. Durante um deslocamento virtual δx, a força de atrito realiza trabalho igual a $-\mu_k N\,\delta x$. A força de atrito estático atuando sobre a roldana na Fig.7/9*b*, por outro lado, não realiza trabalho se a roldana não deslizar enquanto gira.

Na Fig. 7/9*c* o momento M_f em relação ao centro da junta presa por um pino, devido às forças de atrito que atuam nas superfícies em contato, realiza trabalho negativo durante qualquer movimento angular relativo entre as duas partes. Assim, para um deslocamento virtual $\delta\theta$ entre as duas partes, que têm independentemente, como mostrado, os deslocamentos virtuais $\delta\theta_1$ e $\delta\theta_2$, o trabalho negativo realizado é $-M_f\,\delta\theta_1 - M_f\,\delta\theta_2 = -M_f(\delta\theta_1 + \delta\theta_2)$, ou simplesmente $-M_f\,\delta\theta$. Para cada parte, M_f está no sentido de se opor ao movimento de rotação relativo.

Foi comentado anteriormente nesta seção que uma grande vantagem do método do trabalho virtual está na análise de um sistema completo de elementos conectados, sem precisar desmembrá-los. Se existir atrito dinâmico interno apreciável no sistema, se torna necessário desmembrar o sistema para determinar as forças de atrito. Nesses casos, o método do trabalho virtual encontra apenas uso limitado.

Eficiência Mecânica

Devido à perda de energia pelo atrito, o trabalho realizado por uma máquina é sempre menor do que o trabalho cedido a ela. A razão entre as duas quantidades de trabalho é a *eficiência mecânica* e. Assim,

$$e = \frac{\text{trabalho realizado}}{\text{trabalho recebido}}$$

A eficiência mecânica de máquinas simples, que têm um único grau de liberdade e que operam de uma maneira uniforme, pode ser determinada pelo método do trabalho, avaliando-se o numerador e o denominador da expressão de e durante um deslocamento virtual.

Como um exemplo, considere o bloco que está sendo movido para cima no plano inclinado na Fig. 7/10. Para o deslocamento virtual δs mostrado, o trabalho realizado é aquele necessário para içar o bloco, ou $mg\,\delta s$ sen θ. O trabalho recebido é $T\,\delta s = (mg \text{ sen } \theta + \mu_k mg \cos\theta)\,\delta s$. A eficiência do plano inclinado vale, portanto,

$$e = \frac{mg\,\delta s \text{ sen } \theta}{mg(\text{sen } \theta + \mu_k \cos\theta)\,\delta s} = \frac{1}{1 + \mu_k \cot\theta}$$

Como um segundo exemplo, considere o macaco descrito na Seção 6/5 e mostrado na Fig. 6/6. A Eq. 6/3 dá o momento M necessário para levantar a carga W, onde o parafuso tem um raio médio r e um ângulo de hélice α e onde o ângulo de atrito vale $\phi = \tan^{-1}\mu_k$. Durante uma pequena rotação $\delta\theta$ do parafuso, o trabalho recebido vale $M\,\delta\theta = Wr\,\delta\theta \tan(\alpha + \phi)$. O trabalho realizado é aquele necessário para levantar a carga, ou $Wr\,\delta\theta \tan\alpha$. Portanto a eficiência do macaco pode ser expressa como

$$e = \frac{Wr\,\delta\theta \tan\alpha}{Wr\,\delta\theta \tan(\alpha + \phi)} = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha + \phi)}$$

Conforme o atrito decresce, ϕ se torna menor e a eficiência se aproxima da unidade.

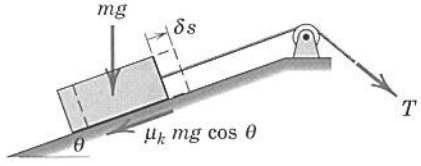
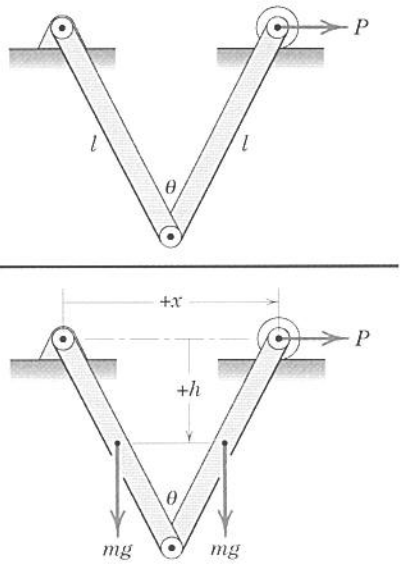


Figura 7/10

Exemplo 7/1

Cada uma das duas barras uniformes articuladas tem uma massa m e um comprimento l, e está apoiada e carregada como mostrado. Para uma dada força P, determine o ângulo θ para haver equilíbrio.



Solução. O diagrama de forças ativas para o sistema composto pelos dois elementos está mostrado separadamente e inclui o peso mg de cada barra, além da força P. Todas as outras forças atuando externamente sobre o sistema são forças de reação, que não realizam trabalho durante um movimento virtual δx e, portanto, não estão mostradas.

O princípio do trabalho virtual requer que o trabalho total de todas as forças ativas externas seja zero para qualquer deslocamento virtual consistente com as restrições. Assim, para um movimento δx o trabalho virtual é

① $[\delta U = 0]$ $$P\,\delta x + 2mg\,\delta h = 0$$

Expressamos, agora, cada um desses deslocamentos virtuais em termos da variável θ, cujo valor deseja-se determinar. Assim sendo,

$$x = 2l \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \qquad \text{e} \qquad \delta x = l \cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

② De modo semelhante,

$$h = \frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{e} \qquad \delta h = -\frac{l}{4}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

Substituindo-se na equação do trabalho virtual obtemos

$$Pl\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta - 2mg\,\frac{l}{4}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\delta\theta = 0$$

a partir da qual obtemos

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{2P}{mg} \qquad \text{ou} \qquad \theta = 2\tan^{-1}\frac{2P}{mg} \qquad \textit{Resp.}$$

Para chegar a esse resultado pelos princípios dos somatórios de forças e momentos seria necessário desmembrar o conjunto e considerar todas as forças agindo em cada elemento. A solução pelo método do trabalho virtual envolve uma operação mais simples.

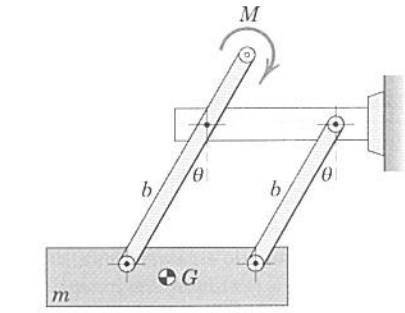
Sugestões Úteis

① Observe cuidadosamente que com x sendo positivo para a direita, δx também é positivo para a direita, no sentido de P. Desse modo, o trabalho virtual vale $P(+\delta x)$. Com h sendo positivo para baixo, δh também é matematicamente positivo para baixo, no sentido de mg, de modo que a expressão matemática correta para o trabalho é $mg(+\delta h)$. Quando expressamos δh em termos de $\delta\theta$ no próximo passo, δh terá um sinal negativo, fazendo nossa expressão matemática concordar com a observação física de que o peso mg realiza trabalho negativo à medida que cada centro de massa se move para cima devido a um aumento em x e θ.

② Obtemos δh e δx com as mesmas regras matemáticas da diferenciação com as quais podemos obter dh e dx.

Exemplo 7/2

A massa m é levada a uma posição de equilíbrio pela aplicação de um momento M à extremidade de uma das duas barras paralelas, que são articuladas como mostrado. As barras têm massa desprezível e considera-se ausência total de atrito. Para um dado valor de M, determine a expressão para o ângulo de equilíbrio θ assumido pelas barras com a vertical. Considere a alternativa de uma solução pelo equilíbrio de forças e momentos.



Solução. O diagrama de forças ativas mostra o peso mg atuando através do centro de massa G e o momento M aplicado à extremidade da barra. Não existem outras forças ou momentos ativos externos, que realizem trabalho sobre o sistema durante uma variação do ângulo θ.

A posição vertical do centro de massa G é dada pela distância h abaixo da linha de referência horizontal fixa e vale $h = b\cos\theta + c$. O trabalho realizado por mg durante um movimento δh na direção de mg vale

$$\begin{aligned} +mg\,\delta h &= mg\,\delta(b\cos\theta + c) \\ &= mg(-b\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta + 0) \\ &= -mgb\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta \end{aligned}$$

① O sinal de menos mostra que o trabalho é negativo para um valor positivo de $\delta\theta$. A constante c desaparece, pois sua variação é nula.

Com θ medido como sendo positivo no sentido horário, $\delta\theta$ também é positivo no sentido horário. Portanto, o trabalho realizado pelo momento M no sentido horário vale $+M\,\delta\theta$. Substituindo na equação do trabalho virtual obtemos

$$[\delta U = 0] \qquad M\,\delta\theta + mg\,\delta h = 0$$

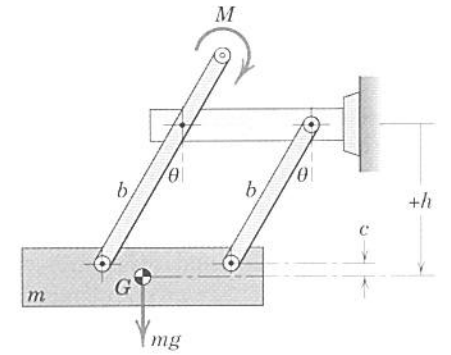
que fornece

$$M\,\delta\theta = mgb\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta$$

$$\theta = \text{sen}^{-1}\frac{M}{mgb} \qquad \textit{Resp.}$$

Levando em conta que sen θ não pode exceder a unidade, vemos que para haver equilíbrio, M está limitado a valores que não excedam mgb.

A vantagem da solução pelo trabalho virtual para esse problema é facilmente percebida quando se observa o que estaria envolvido em uma solução pelo equilíbrio de forças e de momentos. Para esse último enfoque seria necessário desenhar diagramas de corpo livre separados para todas as três partes móveis e considerar todas as reações internas nas conexões. Para desenvolver esses passos seria necessário incluir na análise a posição horizontal de G em relação aos pontos de união das duas barras, embora a referência a essa posição seja, por fim, eliminada quando as equações são resolvidas. Concluímos, portanto, que o método do trabalho virtual nesse problema lida diretamente com a causa e o efeito e evita referência a quantidades irrelevantes.

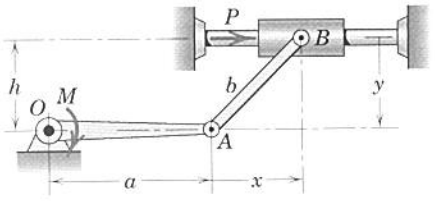


Sugestão Útil

① Novamente, como no Exemplo 7/1, somos matematicamente consistentes com nossa definição de trabalho, e vemos que o sinal algébrico da expressão resultante concorda com a variação física.

Exemplo 7/3

Para a conexão OA na posição horizontal mostrada, determine a força P sobre a bucha móvel, que impedirá OA de girar sob a ação do momento M. Despreze a massa das partes móveis.



Solução. O esboço dado serve como o diagrama de forças ativas para o sistema. Todas as outras forças são ou internas ou forças reativas que não realizam trabalho devido às restrições.

Daremos ao eixo OA um pequeno movimento angular no sentido horário, $\delta\theta$, com o nosso deslocamento virtual e determinaremos o trabalho virtual resultante realizado por M e P. A partir da posição horizontal do eixo, o movimento angular resulta em um deslocamento para baixo de A igual a

① $$\delta y = a\,\delta\theta$$

onde $\delta\theta$ é, claro, dado em radianos.

A partir do triângulo retângulo para o qual a conexão AB é a hipotenusa podemos escrever

$$b^2 = x^2 + y^2$$

Fazemos agora a diferencial da equação e obtemos

② $$0 = 2x\,\delta x + 2y\,\delta y \qquad \text{ou} \qquad \delta x = -\frac{y}{x}\,\delta y$$

Assim,

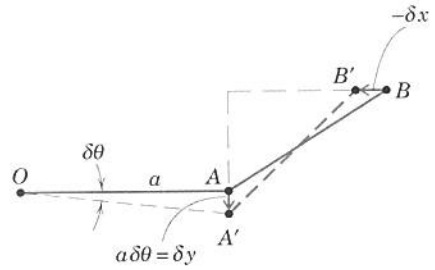
$$\delta x = -\frac{y}{x}\,a\,\delta\theta$$

e a equação do trabalho virtual torna-se

③ $[\delta U = 0]$ $$M\,\delta\theta + P\,\delta x = 0 \qquad M\,\delta\theta + P\left(-\frac{y}{x}\,a\,\delta\theta\right) = 0$$

$$P = \frac{Mx}{ya} = \frac{Mx}{ha} \qquad \textit{Resp.}$$

Observamos, novamente, que o método do trabalho virtual produz uma relação direta entre a força ativa P e o momento M, sem envolver outras forças que são irrelevantes para essa relação. A solução pelas equações de equilíbrio de forças e momentos, embora bastante simples nesse problema, iria requerer que inicialmente todas as forças fossem consideradas para, então, eliminar as irrelevantes.



Sugestões Úteis

① Observe que o deslocamento $a\,\delta\theta$ do ponto A não seria mais igual a δy se o eixo OA não estivesse na posição horizontal.

② O comprimento b é constante, de modo que $\delta b = 0$. Observe o sinal negativo, que simplesmente informa que se uma variação é positiva, a outra deve ser negativa.

③ Poderíamos, de modo semelhante, usar um deslocamento virtual no sentido anti-horário para o eixo, o qual, simplesmente, inverteria os sinais de todos os termos.

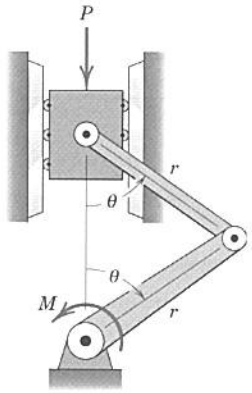
PROBLEMAS

(Considere que o trabalho negativo do atrito é desprezível nos problemas a seguir, a menos que seja indicado de outro modo.)

Problemas Introdutórios

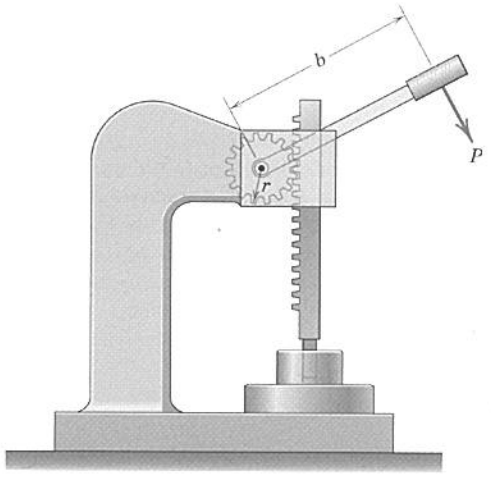
7/1 Determine, em função do ângulo θ, o momento M, aplicado através do eixo à conexão inferior, necessário para suportar a carga P. Despreze os pesos das partes.

Resp. $M = 2Pr \operatorname{sen} \theta$



Problema 7/1

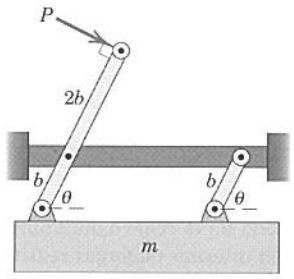
7/2 A prensa trabalha por meio de um mecanismo de cremalheira e pinhão, e é usada para gerar grandes forças, tais como as necessárias para produzir encaixes por pressão. Se o raio médio das engrenagens do pinhão vale r, determine a força R que pode ser gerada pela prensa para uma dada força P na manopla.



Problema 7/2

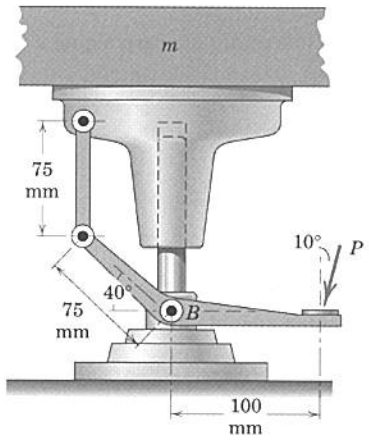
7/3 Determine o ângulo θ de equilíbrio, para uma dada força P. Despreze a massa das conexões.

Resp. $\theta = \cos^{-1} \dfrac{2P}{mg}$



Problema 7/3

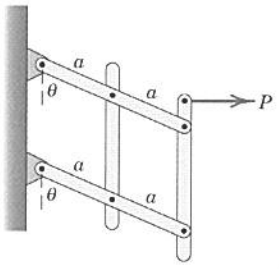
7/4 O pedal é usado para levantar uma plataforma de massa m. Determine a força P necessária, aplicada em um ângulo de 10°, para suportar a carga de 80 kg.



Problema 7/4

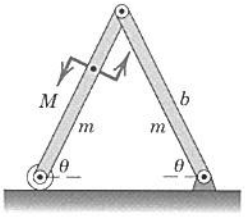
7/5 Cada uma das quatro conexões uniformes tem uma massa m. Determine a força horizontal P, necessária para mantê-las em posição no plano vertical, como mostrado.

Resp. $P = \dfrac{5}{2} mg \tan \theta$



Problema 7/5

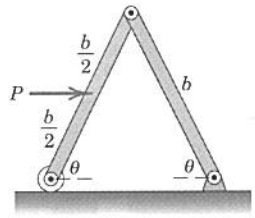
7/6 Cada uma das conexões uniformes do conjunto tem massa m e comprimento b. A posição de equilíbrio do conjunto, no plano vertical, é determinada pelo binário M, aplicado à conexão da esquerda. Expresse θ em função de M.



Problema 7/6

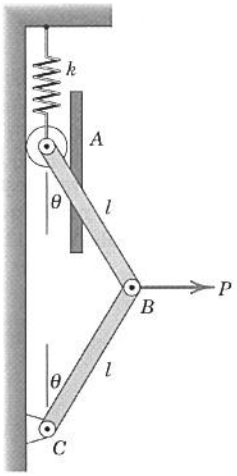
7/7 Substitua o binário M do Prob. 7/6 pela força horizontal P, como mostrado, e determine o ângulo de equilíbrio θ.

Resp. $\theta = \tan^{-1}\dfrac{2mg}{3P}$



Problema 7/7

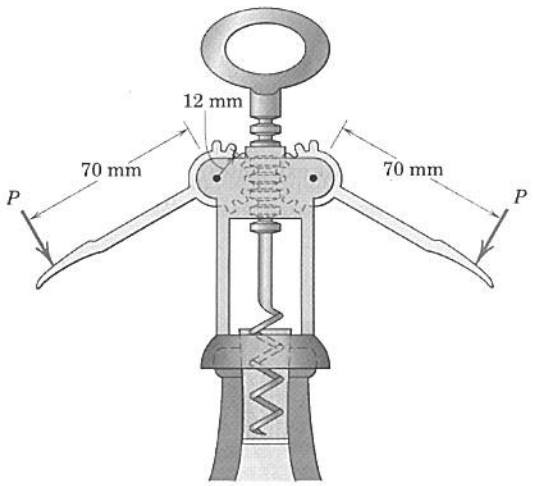
7/8 A mola de constante k não está distendida quando $\theta = 0$. Obtenha uma expressão para a força P necessária para defletir o sistema de um ângulo θ. A massa das barras é desprezível.



Problema 7/8

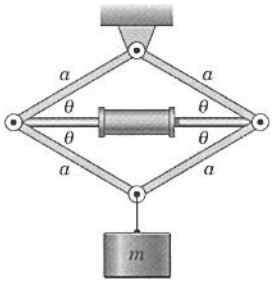
7/9 Por meio de um mecanismo de cremalheira e pinhão, grandes forças podem ser desenvolvidas pelo saca-rolhas mostrado. Se o raio médio das engrenagens do pinhão vale 12 mm, determine a força R que é exercida sobre a rolha para as forças dadas, P, nas manoplas.

Resp. $R = 11{,}67P$



Problema 7/9

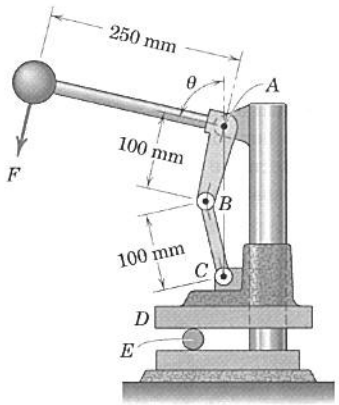
7/10 O cilindro hidráulico é usado para afastar as conexões e elevar a carga m. Determine a força compressiva C no cilindro, para a posição mostrada. Despreze a massa de todas as partes, à exceção de m.



Problema 7/10

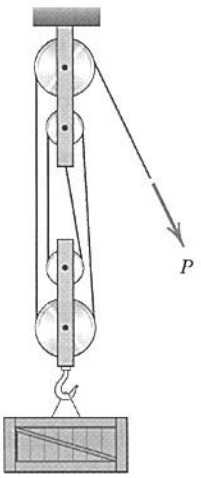
7/11 A garra superior D da prensa desliza sem atrito ao longo da coluna vertical fixa. Determine a força F necessária sobre a manopla, para produzir uma compressão R sobre o rolamento para qualquer valor dado de θ.

Resp. $F = 0{,}8R\cos\theta$



Problema 7/11

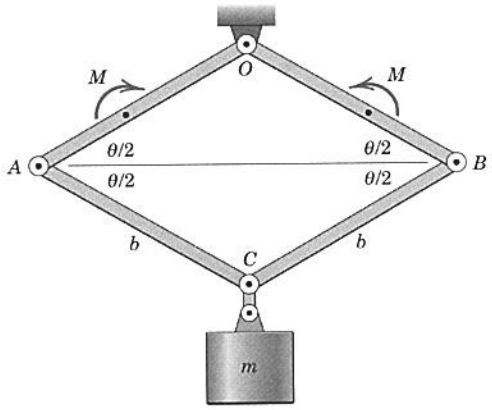
7/12 Para cada unidade de movimento da extremidade livre da corda na direção da força aplicada P, a carga de 100 kg se move em um quarto de unidade. Se a eficiência mecânica e do conjunto de roldanas vale 0,75, calcule a força P necessária para levantar a carga e a força P' necessária para abaixá-la.



Problema 7/12

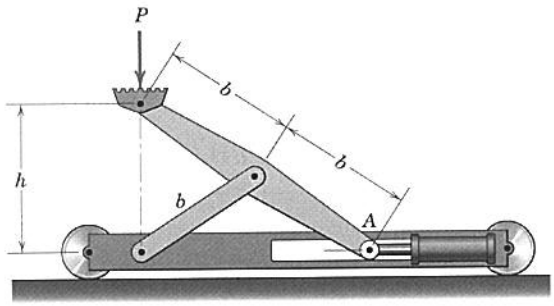
7/13 As conexões simétricas sustentam o cilindro de massa m no plano vertical, pela ação dos dois momentos M aplicados a OA e a OB, como mostrado. Determine o valor do momento M em função de θ. A massa das conexões é desprezível em comparação a m.

Resp. $M = mgb \cos \frac{\theta}{2}$



Problema 7/13

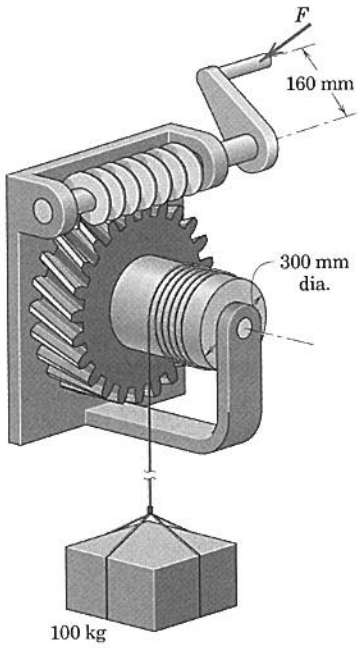
7/14 O macaco portátil é operado por um cilindro hidráulico que controla o movimento horizontal da extremidade A do tirante, no rasgo horizontal. Determine a força compressiva C na barra do pistão do cilindro, necessária para sustentar a carga P em uma altura h.



Problema 7/14

7/15 O guindaste manual é projetado para levantar uma carga de 100 kg, sendo que 25 voltas na manivela produzem, através do eixo redutor, uma revolução no tambor. Considerando uma perda de energia de 40% devido ao atrito no mecanismo, calcule a força F normal ao braço da manivela necessária para levantar a carga.

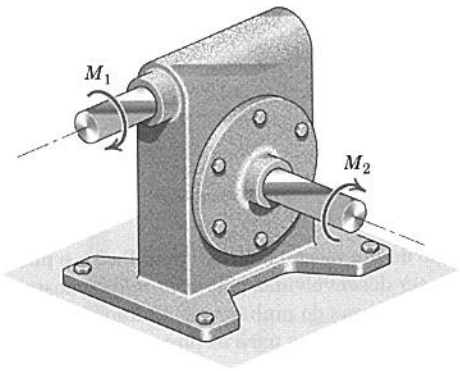
Resp. $F = 61{,}3$ N



Problema 7/15

Problemas Representativos

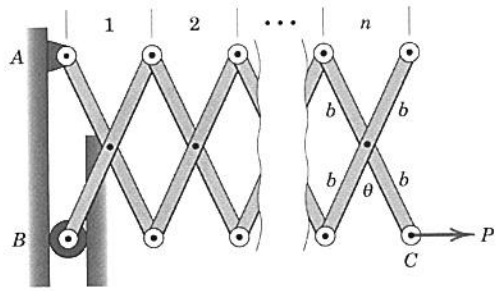
7/16 O redutor de velocidade mostrado está projetado com uma razão de engrenagens de 40:1. Com um torque de entrada $M_1 = 30$ N · m, o torque de saída medido vale $M_2 = 1180$ N · m. Determine a eficiência mecânica e da unidade.



Problema 7/16

7/17 A conexão dobrável é composta por n seções idênticas, cada uma das quais consistindo em duas barras idênticas, cada uma de massa m. Determine a força horizontal P necessária para manter o equilíbrio em uma posição caracterizada pelo ângulo θ. A força P depende do número n de seções existentes?

Resp. $P = mg \tan \frac{\theta}{z}$, não

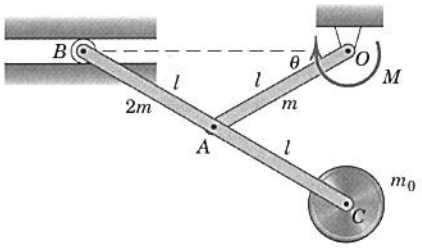


Problema 7/17

7/18 Substitua a força P agindo na conexão do Prob. 7/17 por um binário M. Determine o momento M do binário necessário para manter o equilíbrio em uma posição arbitrária caracterizada pelo ângulo θ. O momento M depende do número n de seções existentes?

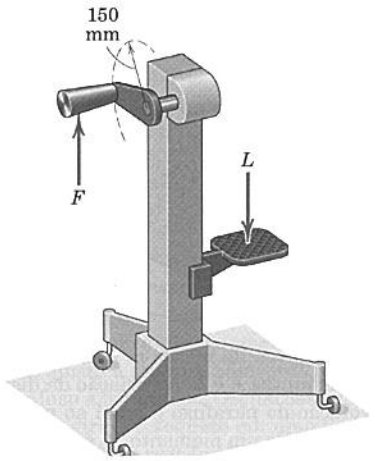
7/19 Determine o momento M que deve ser aplicado em O para sustentar o mecanismo na posição $\theta = 30°$. As massas do disco em C, da barra OA e da barra BC são m_0, m e $2m$, respectivamente.

Resp. $M = (\frac{5}{4}m + m_0)gl\sqrt{3}$



Problema 7/19

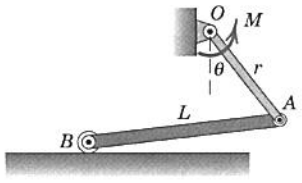
7/20 Ao se testar o projeto mostrado de um macaco guiado por um fuso, 12 voltas na manivela são necessárias para elevar o pedal de 24 mm. Se uma força $F = 50$ N, aplicada normalmente ao eixo da manivela, é necessária para elevar uma massa de 1,5 Mg, determine a eficiência e do fuso ao elevar a carga.



Problema 7/20

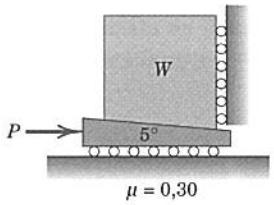
7/21 O torque M, aplicado à conexão leve OA através do eixo O, gira OA de um ângulo θ e eleva a extremidade A da barra uniforme AB de massa m. A extremidade B é sustentada por um pequeno rolete sobre a superfície horizontal. Quando $\theta = 0$, a barra AB está na horizontal. Determine o ângulo de equilíbrio para um dado valor de M. O que aconteceria se M fosse maior do que $mgr/2$?

Resp. $\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{2M}{mgr}\right)$



Problema 7/21

7/22 Calcule a eficiência com a qual a cunha, com inclinação de 5°, eleva o peso W, sob a ação da força horizontal P atuando na cunha. O coeficiente de atrito entre a cunha e o bloco vale 0,30.



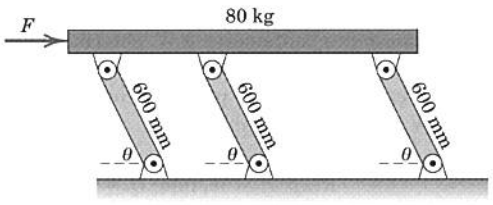
Problema 7/22

7/23 Determine a força F que a pessoa deve aplicar, tangente ao aro da roda de uma cadeira de rodas, para subir uma rampa inclinada de ângulo θ. A massa combinada da cadeira e da pessoa é m. (Se s é o deslocamento do centro da roda medido ao longo do plano inclinado e β é o ângulo correspondente, em radianos, que a roda gira, pode-se facilmente mostrar que $s = R\beta$ se a roda gira sem escorregar.)

Resp. $F = mg\frac{R}{r}\,\text{sen}\,\theta$

Problema 7/23

7/24 Especifique a força horizontal F necessária para manter o equilíbrio da plataforma de 80 kg em função do ângulo θ feito pelas barras de sustentação em relação à horizontal. Cada uma das três barras uniformes tem uma massa de 10 kg. (Compare a solução por trabalho virtual com a solução pelo equilíbrio de forças e momentos.)

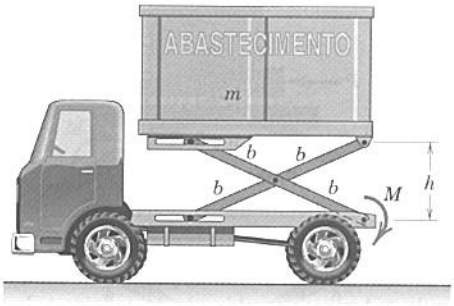


Problema 7/24

7/25 A caçamba do caminhão de entrega de alimentos para aeronaves tem massa m quando carregada e é levantada pela aplicação de um torque M na extremidade inferior da engrenagem, que é arti-

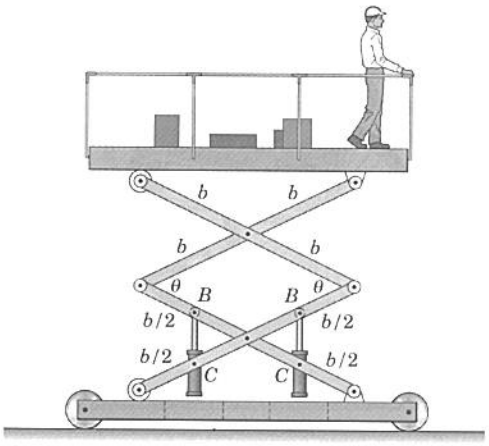
culada com a estrutura do caminhão. Os rasgos horizontais permitem que estrutura articulada se desdobre à medida que a caçamba é elevada. Expresse M em função de h.

$$Resp.\ M = 2mgb\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2b}\right)^2}$$



Problema 7/25

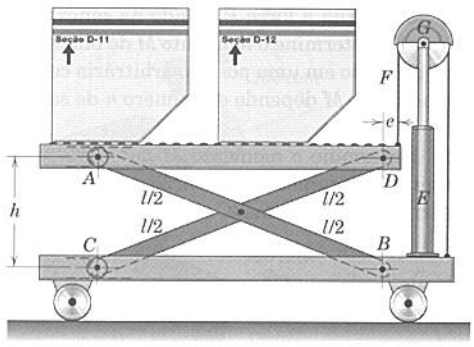
7/26 A plataforma de trabalho portátil é elevada por intermédio de dois cilindros hidráulicos articulados nos pontos C. Cada cilindro está sob uma pressão hidráulica p e tem uma área de pistão A. Determine a pressão p necessária para sustentar a plataforma e mostre que ela é independente de θ. A plataforma, o trabalhador e os suprimentos têm uma massa combinada m e as massas das barras de conexão podem ser desprezadas.



Problema 7/26

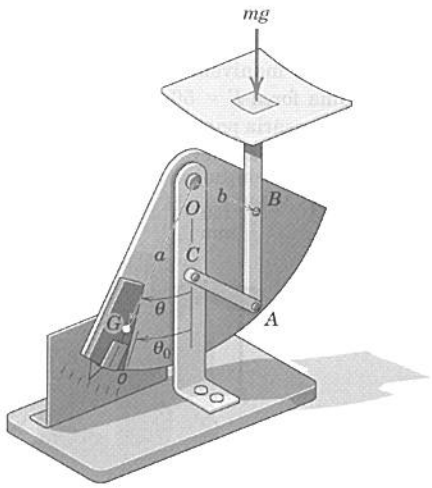
7/27 O projeto existente de um carrinho para colocação de carga em aviões está sob revisão. A plataforma AD do carrinho é elevada até a altura adequada pelo mecanismo mostrado. Existem dois sistemas de conexão e dois macacos hidráulicos, um de cada lado. Os cabos F que levantam a plataforma são controlados pelos cilindros hidráulicos E, cujas barras dos pistões levantam as polias G. Se o peso total da plataforma e dos contêineres é W, determine a força compressiva P em cada um dos dois pistões. O valor de P depende da altura h? Que força Q é suportada por cada conexão, em seu ponto médio, quando W está centrado entre A e D?

$$Resp.\ P = W, \text{ não; } Q = \frac{W}{2}\left(1 + \frac{2e}{\sqrt{l^2 - h^2}}\right)$$



Problema 7/27

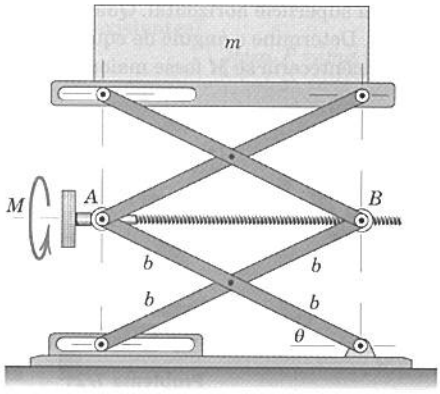
7/28 A balança postal consiste de um setor circular de massa m_0 articulado em O e com centro de massa em G. O prato e a haste vertical AB têm massa m_1 e são articulados ao setor circular em B. A extremidade A é articulada à haste uniforme AC de massa m_2, que, por sua vez, é articulada ao suporte fixo. A figura $OBAC$ forma um paralelogramo e o ângulo GOB é um ângulo reto. Determine a relação entre a massa m a ser medida e o ângulo θ, considerando que $\theta = \theta_0$ quando $m = 0$.



Problema 7/28

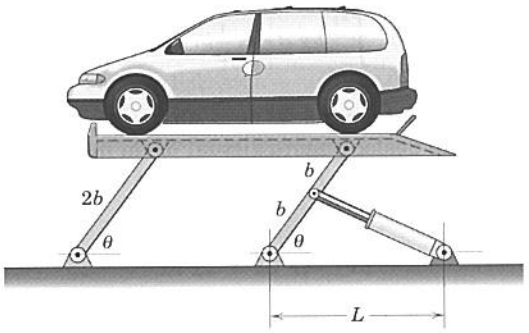
7/29 A elevação da carga de massa m é controlada pelo parafuso de ajuste que une as juntas A e B. A variação da distância entre A e B para uma revolução do parafuso é igual ao passo L do parafuso (avanço por revolução). Se um momento M_f é necessário para vencer o atrito nas roscas e no mancal de escora do parafuso, determine a expressão para o momento total M, aplicado ao parafuso de ajuste, necessário para levantar a carga.

$$Resp.\ M = M_f + \frac{mgL}{\pi}\cot\theta$$



Problema 7/29

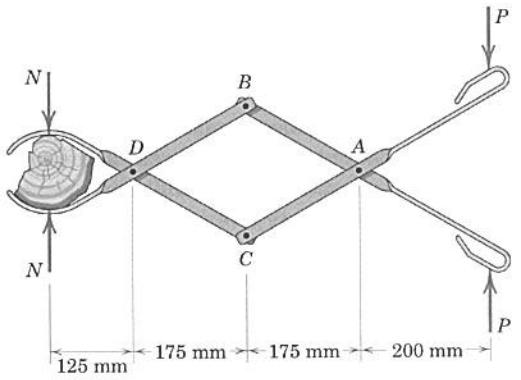
7/30 Expresse a força compressiva C no cilindro hidráulico da plataforma para carros em termos do ângulo θ. A massa da plataforma é desprezível comparada com a massa m de veículo.



Problema 7/30

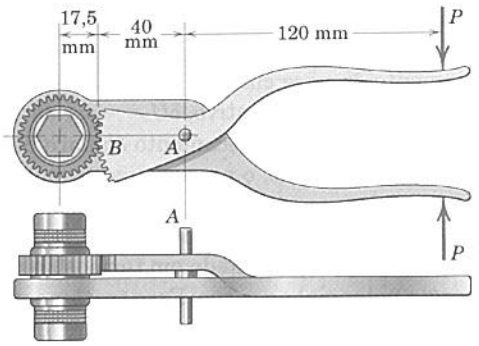
7/31 Determine a força N exercida na tora por cada garra do pegador de lenha mostrado.

Resp. $N = 1{,}6P$



Problema 7/31

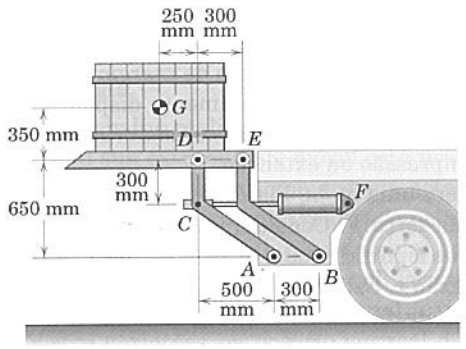
7/32 Uma ferramenta "antitorque" foi projetada para ser usada por um tripulante de uma nave espacial, onde não existe uma plataforma estável contra a qual se possa apoiar enquanto se gira um parafuso. O pino A se ajusta a um furo adjacente na estrutura espacial que contém o parafuso a ser girado. Oscilações sucessivas da engrenagem e da manopla giram o soquete em uma direção pela ação de um mecanismo de catraca. A reação contra o pino A dá a característica "antitorque" da ferramenta. Para uma força de aperto $P = 150$ N, determine o torque M transmitido à porca. (Um lado da ferramenta é usado para apertar e o outro para afrouxar a porca.)



Problema 7/32

7/33 Uma plataforma automática de carga, projetada para a traseira de um caminhão, está mostrada na figura. A posição da plataforma é controlada pelo cilindro hidráulico, que aplica força em C. As conexões são articuladas à estrutura do caminhão em A, B e F. Determine a força P fornecida pelo cilindro para sustentar a plataforma na posição mostrada. A massa da plataforma e das conexões pode ser desprezada em comparação com a massa do caixote de 250 kg com centro de massa em G.

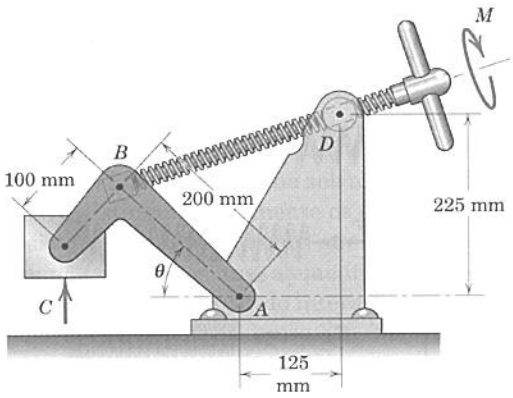
Resp. $P = 3{,}5$ kN



Problema 7/33

▶**7/34** Na morsa acionada por um parafuso, um torque M aplicado à manopla do parafuso aperta a morsa aumentando a distância $\overline{BD}$ e, portanto, produzindo uma força de aperto C. O parafuso é rosqueado através da bucha articulada em D, tendo uma rosca quadrada simples com um passo (avanço por revolução) de 4 mm. Considere que não há atrito e expresse a força de aperto C, em newtons, em função do torque M, medido em newton-metros, para uma posição $\theta = 30°$.

Resp. $C = 1120M$



Problema 7/34

7/4 Energia Potencial e Estabilidade

A seção anterior tratou a configuração de equilíbrio de sistemas mecânicos compostos de elementos individuais, que assumimos serem perfeitamente rígidos. Estendemos agora nosso método para levar em conta sistemas mecânicos que incluem elementos elásticos na forma de molas. Introduzimos o conceito de energia potencial, que é útil para determinar a estabilidade do equilíbrio.

Energia Potencial Elástica

O trabalho realizado sobre um elemento elástico é armazenado no elemento sob a forma de *energia potencial elástica* V_e. Essa energia está potencialmente disponível para realizar trabalho sobre algum outro corpo durante o relaxamento de sua compressão ou extensão.

Considere uma mola, Fig. 7/11, que está sendo comprimida por uma força F. Consideramos que a mola é elástica e linear, o que significa que a força F é diretamente proporcional à deflexão x. Escrevemos essa relação como $F = kx$, onde k é a *constante da mola* ou *rigidez* da mola. O trabalho realizado sobre a mola por F durante um movimento dx é $dU = F\,dx$, de modo que a energia potencial elástica da mola para uma compressão x é o trabalho total realizado sobre a mola

$$V_e = \int_0^x F\,dx = \int_0^x kx\,dx$$

ou

$$\boxed{V_e = \tfrac{1}{2}kx^2} \qquad \textbf{(7/4)}$$

Assim, a energia potencial da mola é igual à área triangular no diagrama de F *versus* x, desde 0 até x.

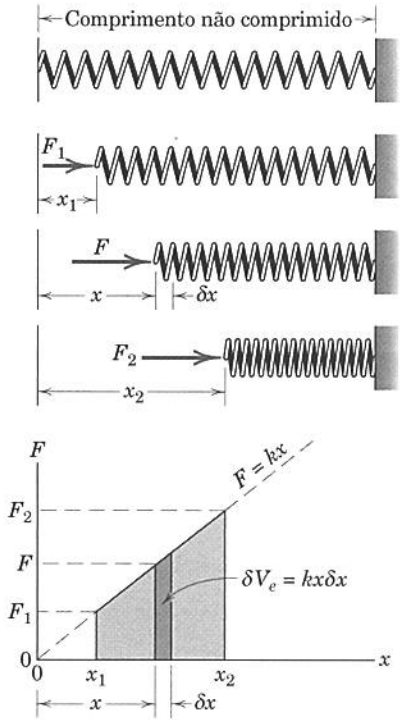


Figura 7/11

Durante um aumento na compressão da mola de x_1 até x_2 o trabalho realizado sobre a mola é igual à sua *variação* de energia potencial elástica ou

$$\Delta V_e = \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

que é igual à área trapezoidal de x_1 a x_2.

Durante um deslocamento virtual δx da mola, o trabalho virtual realizado sobre a mola é a variação virtual na energia potencial elástica

$$\delta V_e = F\,\delta x = kx\,\delta x$$

Durante um decréscimo na compressão da mola, quando ela é relaxada de $x = x_2$ até $x = x_1$, a *variação* na energia potencial elástica da mola (final menos inicial) é negativa. Conseqüentemente, se δx é negativo, δV_e também é negativo.

Quando temos uma mola em tração, em vez de compressão, as relações de trabalho e energia são as mesmas que as usadas para compressão, onde x representa agora o alongamento da mola e não sua compressão. Enquanto a mola está sendo esticada, a força novamente atua na direção do deslocamento, realizando trabalho positivo sobre a mola e aumentando sua energia potencial.

Como a força atuando na extremidade móvel de uma mola tem um valor igual e contrário ao da força exercida pela mola sobre o corpo ao qual sua extremidade móvel está presa, o *trabalho realizado sobre o corpo é igual e contrário ao valor da variação da energia potencial da mola.*

Uma *mola de torção*, que resiste à rotação de um eixo ou de outro elemento, também pode armazenar e liberar energia potencial. Se a *rigidez à torção*, expressa como torque por radiano de torção, é uma constante K, e se θ é o ângulo de torção em radianos, então o torque de reação é $M = K\theta$. A energia potencial se torna $V_e = \int_0^\theta K\theta\,d\theta$ ou

$$\boxed{V_e = \tfrac{1}{2}K\theta^2} \qquad \textbf{(7/4a)}$$

que é análoga à expressão para a mola com extensão linear.

As unidades de energia potencial elástica são as mesmas do trabalho e são expressas em joules (J) em unidades SI.

Energia Potencial Gravitacional

Na seção anterior, tratamos o trabalho de uma força gravitacional ou do peso atuando sobre um corpo, da mesma forma que o trabalho de qualquer outra força ativa. Assim, para um deslocamento δh para cima do corpo na Fig. 7/12, o peso $W = mg$ realiza trabalho negativo, $\delta U = -mg\,\delta h$. Se, por outro lado, o corpo sofre um deslocamento δh para baixo, com h medido positivo para baixo, o peso realiza trabalho positivo, $\delta U = +mg\,\delta h$.

Uma alternativa para o tratamento anterior expressa o trabalho realizado pela gravidade em termos de uma variação na energia potencial do corpo. Esse tratamento alternativo é uma representação útil quando descrevemos um sistema mecânico em termos de sua energia total. A *energia potencial gravitacional*, V_g, de um corpo é definida como o trabalho realizado sobre o corpo por uma força igual e opos-

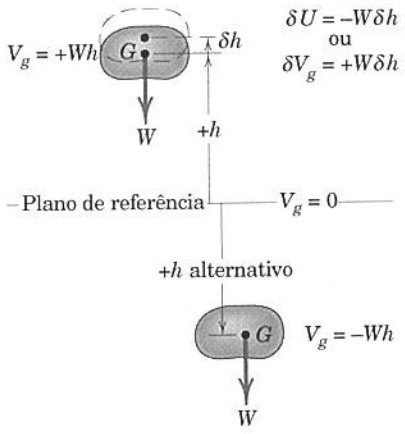


Figura 7/12

ta ao peso, ao trazer o corpo para a posição em consideração, a partir de um dado plano de referência arbitrário onde a energia potencial é definida como valendo zero. A energia potencial, então, tem o mesmo valor, mas com sinal contrário, ao trabalho realizado pelo peso. Quando o corpo é erguido, por exemplo, o trabalho realizado é convertido em energia, que está potencialmente disponível, já que o corpo pode realizar trabalho em algum outro corpo ao retornar a sua posição original mais baixa. Se considerarmos V_g como sendo zero em $h = 0$, Fig. 7/12, então em uma altura h acima do plano de referência, a energia potencial gravitacional do corpo é

$$V_g = mgh \qquad (7/5)$$

Se o corpo estiver a uma distância h abaixo do plano de referência, sua energia potencial gravitacional será $-mgh$.

Observe que o plano de referência para energia potencial zero é arbitrário, porque apenas a *variação* na energia potencial importa, e essa variação é a mesma, independentemente de onde colocamos o plano de referência. Note, também, que a energia potencial gravitacional é independente do caminho percorrido para alcançar uma altura específica h. Assim, o corpo de massa m na Fig. 7/13 tem a mesma variação de energia potencial, independente de qual caminho ele segue ao ir do plano de referência 1 até o plano de referência 2, porque Δh é o mesmo para todos os três caminhos.

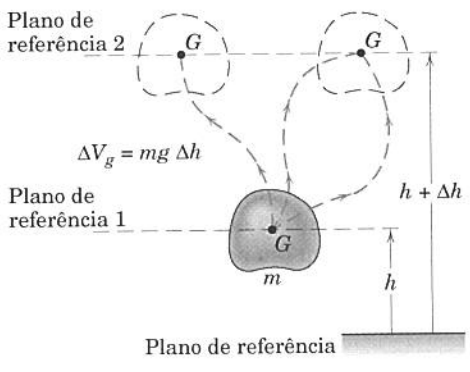


Figura 7/13

A variação virtual na energia potencial gravitacional é simplesmente

$$\delta V_g = mg\,\delta h$$

onde δh é o deslocamento virtual para cima do centro de massa do corpo. Se o centro de massa tem um deslocamento virtual para baixo, então δV_g é negativo.

As unidades da energia potencial gravitacional são as mesmas que as do trabalho e da energia potencial elástica, joules (J) no sistema SI.

Equação de Energia

Vimos que o trabalho realizado *por* uma mola linear *sobre* um corpo ao qual sua extremidade móvel está presa é igual, mas de sinal contrário, à variação na energia potencial elástica da mola. Além disso, o trabalho realizado pela força gravitacional, ou o peso mg, é igual, mas de sinal contrário, à variação na energia potencial gravitacional. Portanto, quando aplicamos a equação do trabalho virtual a um sistema com molas e com variações na posição vertical de seus elementos, podemos substituir o trabalho das molas e o trabalho dos pesos pelo valor negativo das respectivas variações de energia potencial.

Podemos usar essas substituições para escrever o trabalho virtual total δU na Eq. 7/3 como a soma do trabalho $\delta U'$ realizado por todas as forças ativas, *exceto as forças das molas e dos pesos*, e o trabalho $-(\delta V_e + \delta V_g)$ realizado pelas forças das molas e dos pesos. A Eq. 7/3, então, se torna

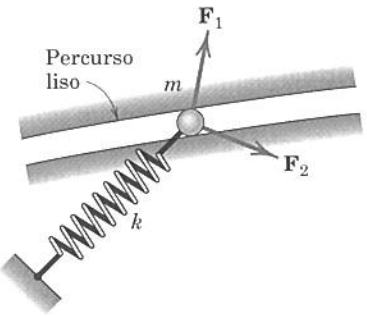
$$\delta U' - (\delta V_e + \delta V_g) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta U' = \delta V \qquad (7/6)$$

onde $V = V_e + V_g$ se refere à energia potencial total do sistema. Com essa formulação uma mola se torna *interna* ao sistema e o trabalho das forças gravitacionais e das molas é levado em conta no termo δV.

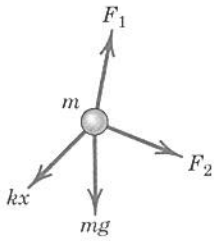
Diagramas de Forças Ativas

Com o método do trabalho virtual é útil construir o *diagrama de forças ativas* do sistema sob análise. A fronteira do sistema deve distinguir claramente os elementos que fazem parte do sistema dos outros corpos que não são parte do sistema. Quando incluímos um elemento elástico *dentro* da fronteira do sistema, as forças de interação entre ele e os elementos móveis ao qual está preso são *internas* ao sistema. Assim, essas forças não precisam ser mostradas porque seus efeitos são levados em conta no termo V_e. Similarmente, forças devidas a pesos não são mostradas porque seu trabalho é levado em conta no termo V_g.

A Fig. 7/14 ilustra a diferença entre o uso das Eqs. 7/3 e 7/6. Por simplicidade, consideramos o corpo na parte *a* da figura como uma partícula e admitimos que o deslocamento virtual ocorre ao longo do percurso determinado. A partícula está em equilíbrio sob a ação das forças aplicadas F_1 e F_2, da força gravitacional mg, da força da mola kx e de uma força de reação normal. Na Fig. 7/14*b*, onde somente a partícula é isolada, δU inclui o trabalho virtual de todas as forças mostradas no diagrama de forças ativas da partícula. (A reação nor-

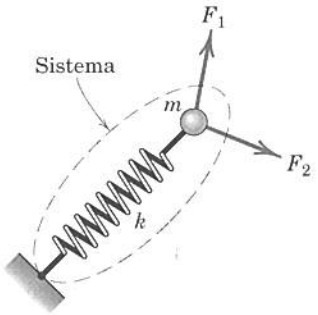


(a)



Eq. 7/3: $\delta U = 0$

(b)



Eq. 7/6: $\delta U' = \delta V_e + \delta V_g = \delta V$

(c)

Figura 7/14

mal exercida sobre a partícula pela guia lisa não realiza trabalho e é omitida.) Na Fig. 7/14*c* a mola está *incluída* no sistema e $\delta U'$ é o trabalho virtual apenas de F_1 e F_2, que são as únicas forças externas cujo trabalho não é levado em conta nos termos de energia potencial. O trabalho do peso *mg* é considerado no termo δV_g e o trabalho da força da mola é incluído no termo δV_e.

Princípio do Trabalho Virtual

Assim, para um sistema mecânico com elementos elásticos e elementos que sofrem mudança de posição, podemos enunciar, de outra forma, o princípio do trabalho virtual, como se segue:

O trabalho virtual realizado por todas as forças externas ativas (diferentes da força gravitacional e daquelas devidas a molas e consideradas nos termos de energia potencial) sobre um sistema mecânico em equilíbrio é igual à variação correspondente da energia potencial elástica e gravitacional total do sistema, para qualquer e para todos os deslocamentos virtuais consistentes com as restrições.

Estabilidade do Equilíbrio

Considere agora o caso de um sistema mecânico onde o movimento é acompanhado por variações nas energias potenciais gravitacional e elástica e onde nenhum trabalho é realizado sobre o sistema por forças não potenciais. O mecanismo tratado no Exemplo 7/6 é uma mostra desse tipo de sistema. Com $\delta U' = 0$ a relação do trabalho virtual, Eq. 7/6, se torna

$$\boxed{\delta(V_e + V_g) = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\delta V = 0} \qquad \textbf{(7/7)}$$

A Eq. 7/7 expressa o requisito de que a configuração de equilíbrio de um sistema mecânico seja aquela para a qual a energia potencial total *V* do sistema tenha um valor estacionário. Para um sistema com um grau de liberdade, onde a energia potencial e suas derivadas são funções contínuas de uma única variável, digamos de *x*, a qual descreve a configuração, a condição de equilíbrio $\delta V = 0$ é equivalente matematicamente ao requisito

$$\boxed{\frac{dV}{dx} = 0} \qquad \textbf{(7/8)}$$

A Eq. 7/8 afirma que um sistema mecânico está em equilíbrio quando a derivada de sua energia potencial total vale zero. Para sistemas com vários graus de liberdade, a derivada parcial de *V* em relação a cada coordenada deve ser zero para haver equilíbrio.*

Figura 7/15

Existem três condições sob as quais a Eq. 7/8 se aplica. Especificamente, quando a energia potencial total é um mínimo (*equilíbrio estável*), um máximo (*equilíbrio instável*) ou uma constante (*equilíbrio neutro*). A Fig. 7/15 mostra um exemplo simples dessas três condições. A energia potencial do rolete é claramente mínima na posição estável, máxima na posição instável e constante na posição neutra.

Podemos também caracterizar a estabilidade de um sistema mecânico observando que um pequeno deslocamento a partir da posição estável resulta em um aumento da energia potencial e à tendência de retornar à posição de menor energia. Por outro lado, um pequeno deslocamento a partir da posição instável resulta em uma diminuição da energia potencial e à tendência de se mover para mais longe da posição de equilíbrio, para outra posição com energia ainda mais baixa. Para a posição neutra, um pequeno deslocamento para um lado ou para o outro não resulta em variação na energia potencial e não há tendência para se mover em qualquer direção.

Quando uma função e suas derivadas são contínuas, a segunda derivada é positiva em um ponto de valor mínimo da função, e negativa em um ponto de valor máximo da fun-

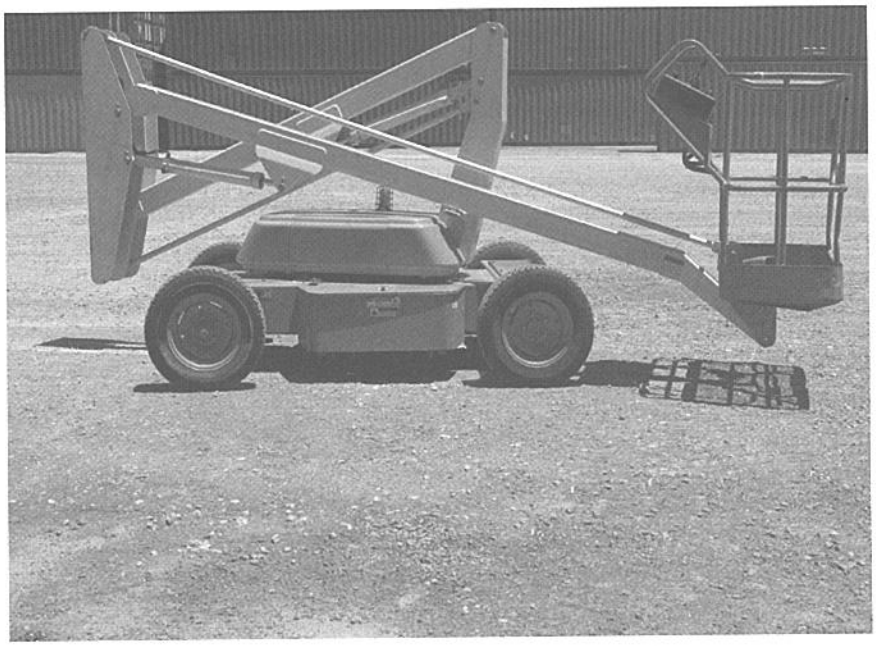
*Para exemplos de sistemas com dois graus de liberdade veja a Seção 43, Capítulo 7 do livro *Statics, 2nd Edition, SI Version, 1975,* do primeiro autor.

ção. Assim, as condições matemáticas para equilíbrio e estabilidade de um sistema com um único grau de liberdade x são:

$$\begin{array}{ll} \text{Equilíbrio} & \dfrac{dV}{dx} = 0 \\ \text{Estável} & \dfrac{d^2V}{dx^2} > 0 \\ \text{Instável} & \dfrac{d^2V}{dx^2} < 0 \end{array} \qquad \textbf{(7/9)}$$

A segunda derivada de V também pode valer zero na posição de equilíbrio. Nesse caso devemos examinar o sinal de uma derivada de ordem mais alta para determinar o tipo de equilíbrio. Quando a ordem da derivada remanescente, não nula, de mais baixa ordem for par, o equilíbrio será estável ou instável dependendo se o sinal dessa derivada é positivo ou negativo. Se a ordem da derivada for ímpar, o equilíbrio é classificado como instável e o gráfico de V *versus* x para esse caso aparece como um ponto de inflexão na curva, com inclinação zero no valor de equilíbrio.

Critérios de estabilidade para múltiplos graus de liberdade requerem um tratamento mais avançado. Para dois graus de liberdade, por exemplo, usamos uma expansão em série de Taylor para duas variáveis.

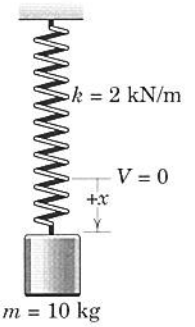


© image100/Media Bakery

A plataforma móvel é um exemplo do tipo de estrutura que pode ser mais facilmente analisado pelo método do trabalho virtual.

Exemplo 7/4

O cilindro de 10 kg está suspenso pela mola, que tem uma rigidez de 2 kN/m. Construa o gráfico da energia potencial V do sistema e mostre que ela é mínima na posição de equilíbrio.



Solução. (Apesar da posição de equilíbrio nesse problema simples ser claramente onde a força na mola iguala o peso mg, prosseguiremos como se esse fato fosse desconhecido para ilustrar as relações de energia da forma mais simples.) Escolhemos o plano de referência, para energia potencial zero, na posição em que a mola não está alongada. ①

A energia potencial elástica para uma posição x arbitrária é $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ e a energia potencial gravitacional é $-mgx$, de forma que a energia potencial total é

$$[V = V_e + V_g] \qquad V = \tfrac{1}{2}kx^2 - mgx$$

O equilíbrio ocorre onde

$$\left[\frac{dV}{dx} = 0\right] \qquad \frac{dV}{dx} = kx - mg = 0 \qquad x = mg/k$$

Apesar de sabermos neste caso simples que o equilíbrio é estável, nós o provamos avaliando o sinal da segunda derivada de V na posição de equilíbrio. Assim, $d^2V/dx^2 = k$, que é positiva, provando que o equilíbrio é estável.

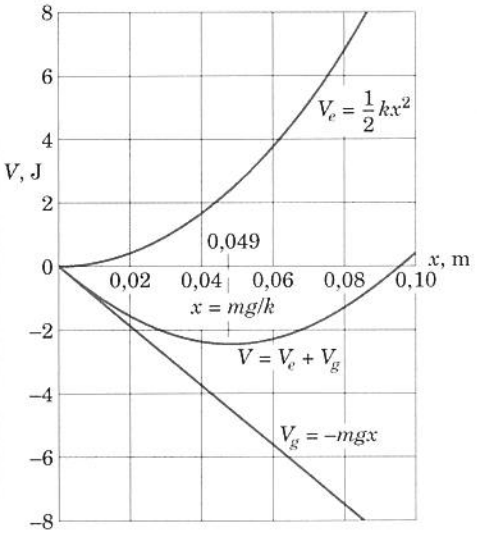
Substituindo os valores numéricos obtemos

$$V = \tfrac{1}{2}(2000)x^2 - 10(9{,}81)x$$

expresso em joules e o valor de equilíbrio de x é

$$x = 10(9{,}81)/2000 = 0{,}0490 \text{ m} \qquad \text{ou} \qquad 49{,}0 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Calculamos V para vários valores de x e fizemos o gráfico de V em função de x como mostrado. O valor mínimo de V ocorre em $x = 0{,}0490$ m, onde $dV/dx = 0$ e d^2V/dx^2 é positivo. ②



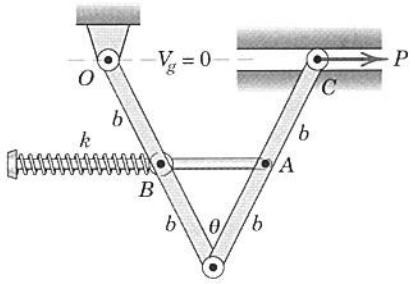
Sugestões Úteis

① A escolha é arbitrária, mas simplifica os cálculos.

② Poderíamos ter escolhido planos de referência diferentes para V_e e V_g sem afetar nossas conclusões. Tal mudança simplesmente deslocaria as curvas separadas de V_e e V_g para cima ou para baixo, mas não afetaria a posição do valor mínimo de V.

Exemplo 7/5

As duas conexões uniformes, cada uma com massa m, estão no plano vertical, estão unidas e têm seu movimento restrito como mostrado. Conforme o ângulo θ entre as conexões aumenta com a aplicação da força horizontal P, a barra leve, que está conectada em A e passa por uma bucha articulada em B, comprime a mola com rigidez k. Se a mola está sem compressão na posição em que $\theta = 0$, determine a força P que produzirá equilíbrio no ângulo θ.



Solução. O esboço dado serve como o diagrama de forças ativas do sistema. A compressão x da mola é a distância que A se afastou de B, que vale $x = 2b \operatorname{sen} \theta/2$. Assim, a energia potencial elástica da mola é

$$[V_e = \tfrac{1}{2}kx^2] \qquad V_e = \tfrac{1}{2}k\left(2b \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^2 = 2kb^2 \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

Com o plano de referência para a energia potencial gravitacional zero passando pelo apoio em O, por conveniência, a expressão para V_g se torna

$[V_g = mgh]$ $$V_g = 2mg\left(-b\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

A distância entre O e C é $4b\ sen\ \theta/2$, de forma que o trabalho virtual realizado por P é

$$\delta U' = P\,\delta\left(4b\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right) = 2Pb\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

A equação do trabalho virtual agora dá

$[\delta U' = \delta V_e + \delta V_g]$

$$2Pb\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta = \delta\left(2kb^2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) + \delta\left(-2mgb\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2kb^2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta + mgb\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

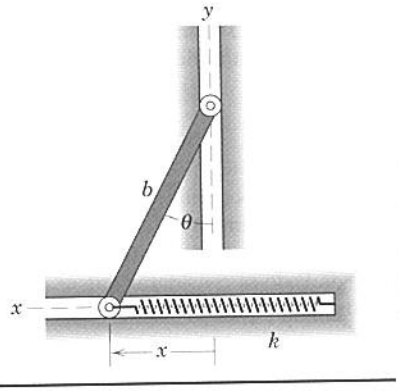
Simplificando dá, finalmente,

$$P = kb\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} + \tfrac{1}{2}mg\tan\frac{\theta}{2} \qquad \textit{Resp.}$$

Se houvesse sido solicitado expressar o valor de equilíbrio de θ, correspondente a uma dada força P, teríamos dificuldade em resolver explicitamente para θ nesse caso particular. Mas, para um problema numérico poderíamos recorrer a uma solução por computador e a um gráfico dos valores numéricos da soma das duas funções de θ, para determinar o valor de θ para o qual a soma fosse igual a P.

Exemplo 7/6

As extremidades da barra uniforme de massa m deslizam livremente nas guias horizontal e vertical. Examine as condições de estabilidade para as posições de equilíbrio. A mola com rigidez k está sem deformação quando $x = 0$.



Solução. O sistema consiste em uma mola e uma barra. Como não existem forças externas ativas, o esboço dado serve como o diagrama de forças ativas. Escolheremos o eixo x como referência para energia potencial gravitacional zero. Na posição deslocada, as energias potenciais elástica e gravitacional são

① $$V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kb^2\,\text{sen}^2\,\theta \qquad \text{ou} \qquad V_g = mg\frac{b}{2}\cos\theta$$

A energia potencial total é, então,

$$V = V_e + V_g = \tfrac{1}{2}kb^2\,\text{sen}^2\,\theta + \tfrac{1}{2}mgb\cos\theta$$

O equilíbrio ocorre para $dV/d\theta = 0$, de forma que

$$\frac{dV}{d\theta} = kb^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - \tfrac{1}{2}mgb\,\text{sen}\,\theta = (kb^2\cos\theta - \tfrac{1}{2}mgb)\,\text{sen}\,\theta = 0$$

As duas soluções para essa equação são dadas por

② $$\text{sen}\,\theta = 0 \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = \frac{mg}{2kb}$$

Determinamos, agora, a estabilidade examinando o sinal da segunda derivada de V para cada uma das duas posições de equilíbrio. A segunda derivada é

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kb^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) - \tfrac{1}{2}mgb\cos\theta$$

$$= kb^2(2\cos^2\theta - 1) - \tfrac{1}{2}mgb\cos\theta$$

Sugestões Úteis

① Sem forças externas ativas, o termo $\delta U'$ não existe e $\delta V = 0$ é equivalente a $dV/d\theta = 0$.

② Tome cuidado para não esquecer a solução $\theta = 0$ para sen $\theta = 0$.

Solução I. $\operatorname{sen}\theta = 0, \theta = 0$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kb^2(2-1) - \tfrac{1}{2}mgb = kb^2\left(1 - \frac{mg}{2kb}\right)$$

$$= \text{positiva (estável)} \quad \text{se } k > mg/2b$$

$$= \text{negativa (instável)} \quad \text{se } k < mg/2b \qquad \textit{Resp.}$$

Assim, se a mola é suficientemente rígida, a barra retornará à posição vertical, mesmo ③ que não haja força na mola naquela posição.

③ Poderíamos não ter previsto esse resultado sem a análise matemática da estabilidade.

Solução II. $\cos\theta = \dfrac{mg}{2kb}, \theta = \cos^{-1}\dfrac{mg}{2kb}$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kb^2\left[2\left(\frac{mg}{2kb}\right)^2 - 1\right] - \tfrac{1}{2}mgb\left(\frac{mg}{2kb}\right) = kb^2\left[\left(\frac{mg}{2kb}\right)^2 - 1\right] \qquad \textit{Resp.}$$

Como o cosseno deve ser menor que 1, vemos que essa solução é limitada ao caso onde $k > mg/2b$, o que faz com que a segunda derivada de V seja negativa. Assim, o equilíbrio ④ para a Solução II nunca é estável. Se $k < mg/2b$, não teremos mais a Solução II porque a mola será fraca demais para manter o equilíbrio em um valor de θ entre 0 e 90°.

④ Novamente, sem a vantagem da análise matemática da estabilidade, poderíamos ter suposto erroneamente que a barra poderia parar em uma posição de equilíbrio estável para algum valor de θ entre 0 e 90°.

PROBLEMAS

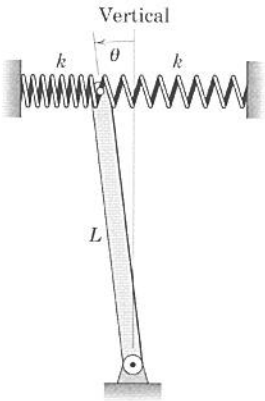
(Considere que trabalho negativo devido ao atrito é desprezível nos problemas a seguir.)

Problemas Introdutórios

7/35 A energia potencial de um sistema mecânico é dada por $V = 6x^3 - 9x^2 + 7$, onde x é a coordenada de posição associada ao único grau de liberdade. Determine a posição, ou as posições, de equilíbrio e a condição de estabilidade do sistema em cada posição de equilíbrio.

Resp. $x = 0$, instável; $x = 1$, estável

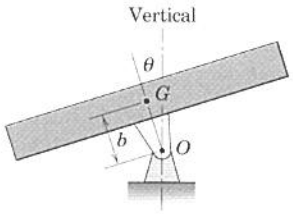
7/36 A barra uniforme de massa m e comprimento L é sustentada no plano vertical por duas molas idênticas com rigidez k e comprimidas de um comprimento δ na posição vertical, $\theta = 0$. Determine a rigidez mínima k que garantirá uma posição de equilíbrio estável com $\theta = 0$. Pode-se considerar que as molas atuam na direção horizontal durante um pequeno movimento angular da barra.



Problema 7/36

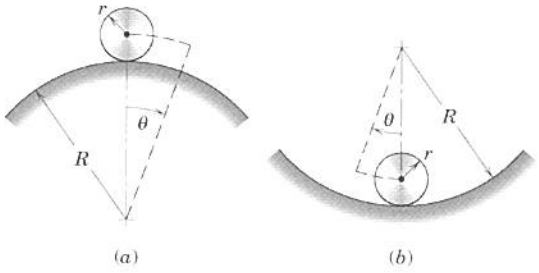
7/37 A barra de massa m com centro de massa em G gira ao redor de um eixo horizontal passando por O. Verifique as condições de estabilidade para as duas posições de equilíbrio.

Resp. $\theta = 0$, instável; $\theta = 180°$, estável



Problema 7/37

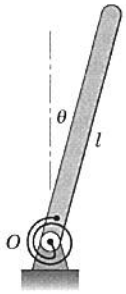
7/38 O pequeno cilindro de massa m e raio r está confinado a rolar sobre a superfície circular de raio R. Usando os métodos desta seção, prove que o cilindro é instável no caso (*a*) e estável no caso (*b*).



Problema 7/38

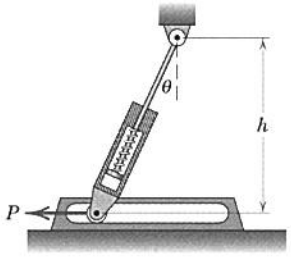
7/39 A barra uniforme de massa m e comprimento l é articulada em relação a um eixo horizontal que passa pela sua extremidade O e está presa a uma mola de torção, que exerce um torque $M = K\theta$ sobre ela, onde K é a rigidez da mola, expressa em unidades de torque por radiano, e θ é a deflexão angular em relação à vertical, medida em radianos. Determine o valor máximo de l, para o qual o equilíbrio na posição $\theta = 0$ é estável.

Resp. $l = \dfrac{2K}{mg}$



Problema 7/39

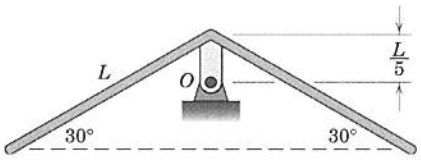
7/40 Determine, para um dado valor de θ, a força P necessária para manter o equilíbrio do mecanismo acionado por uma mola. A mola tem uma rigidez k e não está comprimida em $\theta = 0$. A massa dos elementos pode ser desprezada.



Problema 7/40

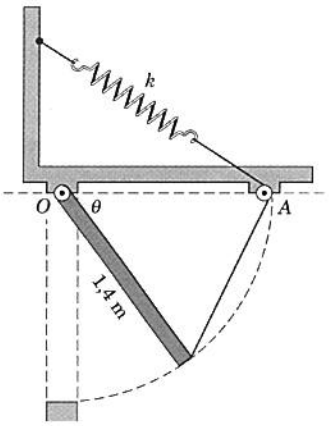
7/41 Duas barras idênticas estão soldadas em um ângulo de 120° e são articuladas em O, como mostrado. A massa do apoio é pequena em comparação à massa das barras. Investigue a estabilidade da posição de equilíbrio mostrada.

Resp. Estável



Problema 7/41

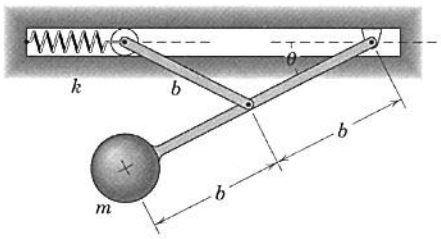
7/42 A figura mostra a seção transversal de um basculante de ventilação uniforme de 60 kg, articulado em O ao longo de sua borda horizontal superior. O basculante é controlado pelo cabo acionado por uma mola, que passa sobre a pequena polia em A. A mola tem uma rigidez de 160 N por metro de alongamento e está sem deformação quando $\theta = 0$. Determine o ângulo θ para haver equilíbrio.



Problema 7/42

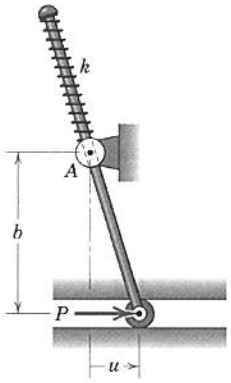
7/43 Para o dispositivo mostrado, a mola não estaria esticada na posição $\theta = 0$. Especifique a rigidez k da mola que estabelecerá uma posição de equilíbrio θ no plano vertical. A massa das conexões é desprezível comparada com m.

$$Resp.\ k = \frac{mg}{2b}\frac{\cot\theta}{1-\cos\theta}$$



Problema 7/43

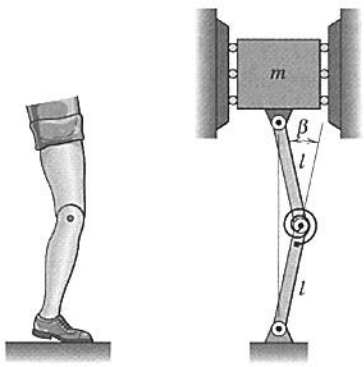
7/44 A mola de rigidez k não está comprimida quando $u = 0$. À medida que u aumenta, a barra desliza dentro do anel articulado em A e comprime a mola situada entre o anel e a extremidade da barra. Determine a força P necessária para produzir um dado deslocamento u. Considere ausência de atrito e despreze a massa da barra.



Problema 7/44

7/45 Um dos requisitos críticos no projeto de uma perna artificial é prevenir que a junta do joelho flambe sob carga quando a perna está esticada. Como uma primeira aproximação, simule a perna artificial como duas barras leves com uma mola de torção em seu ponto de união. A mola realiza um torque $M = K\beta$, que é proporcional ao ângulo de inclinação β na junta. Determine o valor mínimo de K que garantirá estabilidade da junta do joelho para $\beta = 0$.

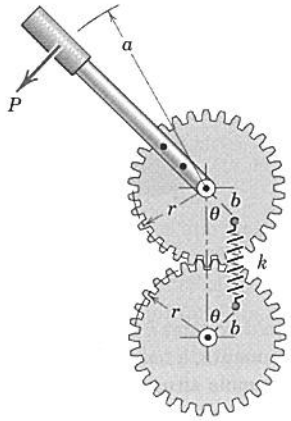
$$Resp.\ K_{\text{mín}} = \tfrac{1}{2}mgl$$



Problema 7/45

Problemas Representativos

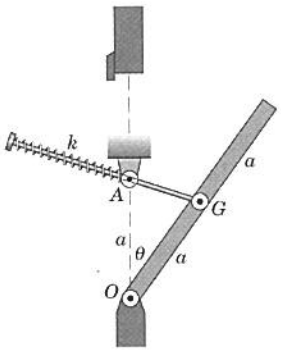
7/46 A alavanca está presa a uma das engrenagens montadas sobre mancais fixos, que estão ligadas por uma mola. A mola de rigidez k liga dois pinos, montados nas faces das engrenagens. Quando a alavanca está na posição vertical, $\theta = 0$ e a força sobre a mola vale zero. Determine a força P necessária para manter o equilíbrio em um ângulo θ.



Problema 7/46

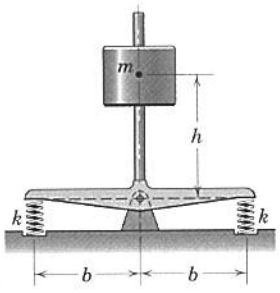
7/47 A seção transversal de um basculante articulado em relação ao eixo horizontal O, de massa m e com centro de massa em G, está mostrada na figura. À medida que o basculante abre, a mola é comprimida pela haste articulada, que desliza através da bucha em A. A mola não está comprimida quando o basculante está fechado. Mostre que o basculante ficará em equilíbrio para qualquer ângulo θ se a mola tiver uma rigidez k apropriada.

Resp. $k = mg/a$



Problema 7/47

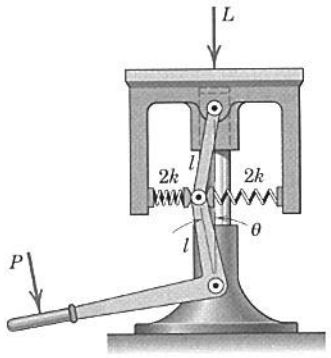
7/48 Determine a altura máxima h da massa m para a qual o pêndulo invertido será estável na posição vertical mostrada. Cada uma das molas tem rigidez k e elas estão igualmente pré-comprimidas nessa posição. Despreze a massa do restante do mecanismo.



Problema 7/48

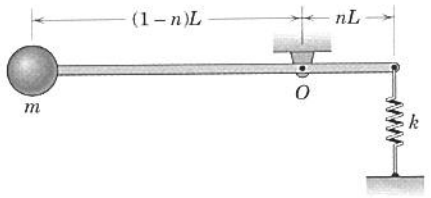
7/49 Um pequeno elevador industrial, acionado a pedal, está mostrado na figura. Existem quatro molas idênticas, duas de cada lado do eixo central. A rigidez de cada par de molas vale $2k$. Ao projetar o elevador, especifique o valor de k, que assegurará equilíbrio estável quando o elevador suporta uma carga (peso) L na posição para a qual $\theta = 0$, sem qualquer força P sobre o pedal. Pode-se considerar que as molas atuam sempre na direção horizontal e, inicialmente, estão pré-comprimidas.

Resp. $k > \dfrac{L}{2l}$



Problema 7/49

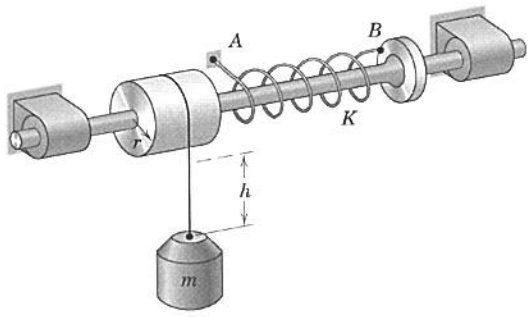
7/50 O sistema formado por uma barra leve articulada, a massa m da extremidade e a mola de rigidez k são mostrados em sua posição de equilíbrio. O parâmetro n é uma fração situada na faixa $0 < n < 1$. Mostre que o sistema é estável para todos os valores de n na faixa permissível.



Problema 7/50

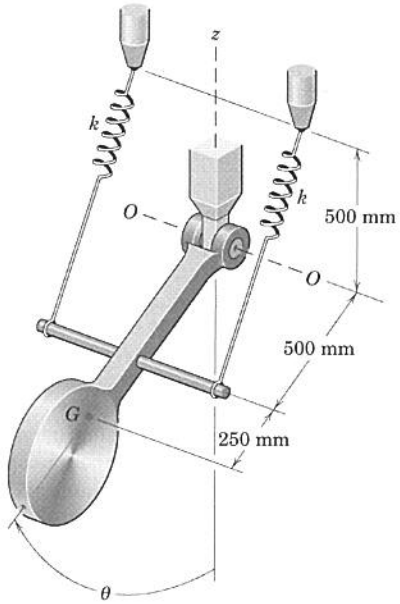
7/51 Uma extremidade da mola de torção está presa ao chão em A e a outra extremidade está presa ao eixo em B. A rigidez à torção K da mola elástica é o torque necessário para torcer a mola de um ângulo de um radiano. A mola resiste ao momento em torno do eixo, causado pela força de tração mg no cabo enrolado ao redor do tambor de raio r. Determine o valor de equilíbrio de h medido a partir da posição tracejada, na qual a mola não está torcida.

Resp. $h = \dfrac{mgr^2}{K}$



Problema 7/51

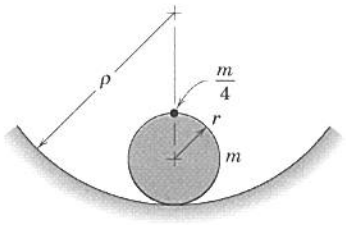
7/52 O pêndulo de 1,5 kg oscila em relação ao eixo *O-O* e tem centro de massa em *G*. Quando $\theta = 0$, cada mola tem um alongamento inicial de 100 mm. Calcule a rigidez máxima *k* de cada uma das molas paralelas, a qual permitirá que o pêndulo esteja em equilíbrio estável na posição inferior, em $\theta = 0$.



Problema 7/52

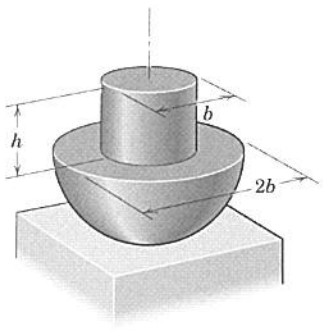
7/53 O cilindro de massa *m* e raio *r* rola sem deslizar sobre a superfície circular de raio ρ. Um pequeno corpo de massa *m*/4 está preso ao cilindro. Determine o máximo valor de ρ para o qual o corpo é estável na posição de equilíbrio mostrada.

Resp. $\rho < 6r$



Problema 7/53

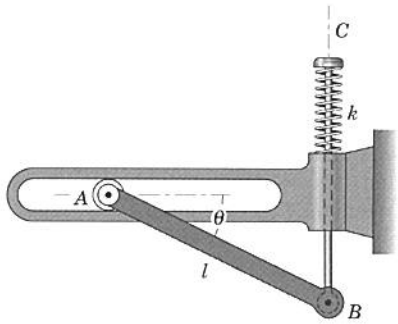
7/54 O hemisfério sólido de diâmetro 2*b* e o cilindro concêntrico de diâmetro *b* estão em repouso sobre uma superfície horizontal. Determine a altura máxima *h* que o cilindro pode ter sem fazer com que o conjunto seja instável na posição vertical mostrada. Ambas as partes são feitas do mesmo material.



Problema 7/54

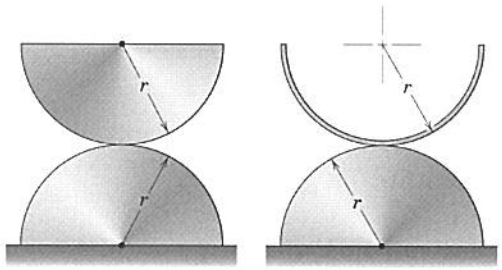
7/55 A conexão uniforme *AB* tem massa *m* e sua extremidade esquerda *A* desliza livremente no rasgo horizontal fixo. A extremidade *B* está presa ao êmbolo vertical, que comprime a mola quando *B* desce. A mola estaria sem compressão na posição $\theta = 0$. Determine o ângulo θ para o equilíbrio (diferente daquele para a posição impossível, correspondente a $\theta = 90°$) e indique a condição que garantirá estabilidade.

Resp. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{mg}{2kl}$, $k > \dfrac{mg}{2l}$



Problema 7/55

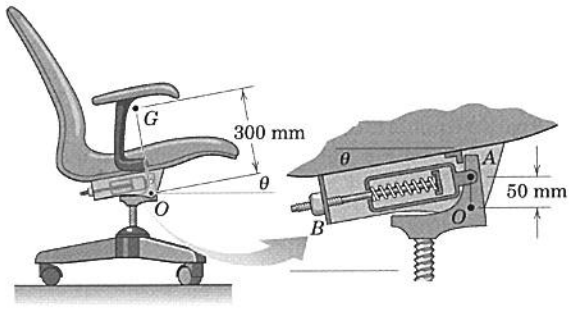
7/56 Determine por meio de cálculos se o semicilindro homogêneo e a casca semicilíndrica permanecerão nas posições mostradas ou se eles rolarão sobre os cilindros inferiores.



Problema 7/56

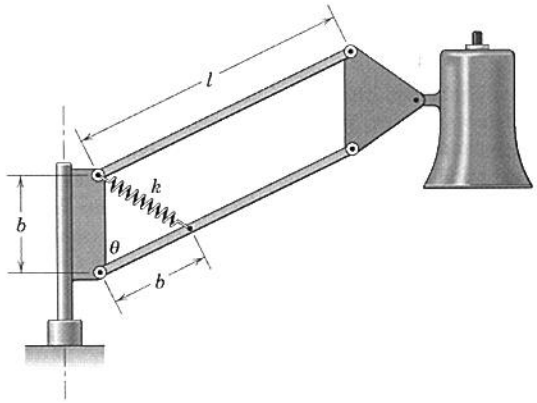
7/57 A figura mostra uma cadeira reclinável de escritório juntamente com um detalhe do projeto do mecanismo de inclinação suportado por uma mola. A estrutura do assento é articulada em relação ao ponto fixo *O* na base. O aumento da distância entre *A* e *B*, quando a cadeira se inclina para trás em relação a *O*, corresponde ao aumento na compressão da mola. A mola, que tem rigidez de 96 kN/m, está sem compressão quando $\theta = 0$. Para pequenos ângulos de inclinação, pode-se assumir, com erro desprezível, que o eixo da mola permanece paralelo ao assento. O centro de massa de uma pessoa de 80 kg que senta na cadeira está em *G*, sobre uma linha perpendicular ao assento passando por *O*. Determine o ângulo de inclinação θ para haver equilíbrio. (*Sugestão:* A deformação da mola pode ser visualizada permitindo que a base se incline do ângulo θ necessário em relação a *O*, enquanto o assento é mantido em uma posição fixa.)

Resp. $\theta = 11{,}19°$



Problema 7/57

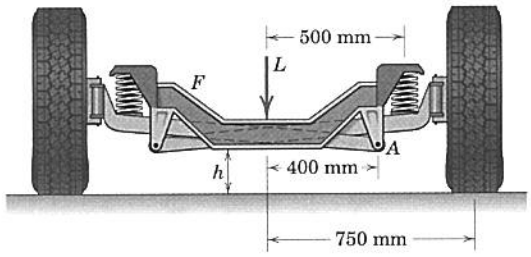
7/58 Um suporte, em forma de paralelogramo, proposto para uma luminária ajustável é mostrado. Se o comprimento não esticado da mola é $b/2$, determine a rigidez k da mola necessária para haver equilíbrio em um dado ângulo θ com a vertical. A massa da luminária e da peça triangular é m. Verifique a estabilidade dentro da faixa de trabalho de $\theta = 2\ \text{sen}^{-1}(1/4) \cong 29°$ até $\theta = 180°$.



Problema 7/58

▶7/59 A suspensão dianteira de eixo duplo é usada em caminhões pequenos. Em um teste do comportamento projetado, o chassi F deve ser levantado com um macaco de forma que $h = 350$ mm, para relaxar a compressão nas molas dos amortecedores. Determine o valor de h quando o macaco é removido. Cada mola tem uma rigidez de 120 kN/m. A carga L vale 12 kN e o chassi central F tem uma massa de 40 kg. Cada roda e sua conexão associada tem uma massa de 35 kg com centro de massa a 680 mm da linha de centro vertical.

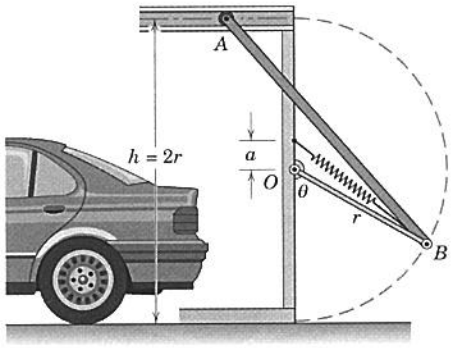
Resp. $h = 265$ mm



Problema 7/59

▶7/60 A porta de garagem uniforme AB mostrada em seção tem uma massa m e está equipada com dois mecanismos acionados por mola iguais ao mostrado, um de cada lado da porta. O braço OB tem massa desprezível e o canto superior A da porta é livre para se mover horizontalmente sobre um rolete. O comprimento não esticado da mola é $r - a$ de forma que na posição superior com $\theta = \pi$ a força da mola vale zero. Para garantir um funcionamento suave da porta quando ela atinge a posição vertical fechada em $\theta = 0$, é desejável que ela seja insensível a movimentos nessa posição. Determine a rigidez k da mola necessária para esse projeto.

$$\textit{Resp. } k = \frac{mg(r + a)}{8a^2}$$



Problema 7/60

7/5 Revisão do Capítulo

Neste capítulo desenvolvemos o princípio do trabalho virtual. Esse princípio é útil na determinação das configurações de equilíbrio possíveis para um corpo ou sistema de corpos interligados, onde as forças externas são conhecidas. Para aplicar o método com sucesso, você deve entender os conceitos de deslocamento virtual, graus de liberdade e energia potencial.

Método do Trabalho Virtual

Quando várias configurações são possíveis para um corpo ou para um sistema de corpos interligados sob a ação de forças aplicadas, podemos encontrar a posição de equilíbrio aplicando o princípio do trabalho virtual. Quando usar esse método tenha em mente os itens a seguir.

1. As únicas forças que precisam ser consideradas quando se determina a posição de equilíbrio são aquelas que realizam trabalho (forças ativas) durante o suposto movimento diferencial do corpo, ou sistema, a partir da sua posição de equilíbrio.
2. As forças externas que não realizam trabalho (forças reativas) não precisam estar envolvidas.
3. Por essa razão, o diagrama de forças ativas do corpo ou sistema (ao invés do diagrama de corpo livre) é útil para centrar a atenção apenas sobre aquelas forças externas que realizam trabalho durante os deslocamentos virtuais.

Deslocamentos Virtuais

Um deslocamento virtual é uma variação diferencial de primeira ordem em uma posição linear ou angular. Essa variação é fictícia já que é um movimento suposto, que não precisa realmente acontecer. Matematicamente, um deslocamento virtual é tratado da mesma forma que uma variação diferencial em um movimento real. Usamos o símbolo δ para a variação diferencial virtual e o símbolo usual d para a variação diferencial em um movimento real.

Relacionar os deslocamentos virtuais linear e angular das partes de um sistema mecânico, durante um movimento virtual consistente com as restrições é, freqüentemente, a parte mais difícil da análise. Para fazer isso,

1. Escreva as relações geométricas que descrevem a configuração do sistema.
2. Estabeleça as variações diferenciais nas posições das partes do sistema, diferenciando a relação geométrica para obter expressões para os movimentos diferenciais virtuais.

Graus de Liberdade

No Capítulo 7 restringimos nossa atenção a sistemas mecânicos para os quais as posições dos elementos podem ser especificadas por uma única variável (sistemas com grau de liberdade único). Para dois ou mais graus de liberdade, aplicaríamos a equação do trabalho virtual tantas vezes quanto fossem os graus de liberdade, deixando uma variável mudar de cada vez enquanto as outras são mantidas constantes.

Método da Energia Potencial

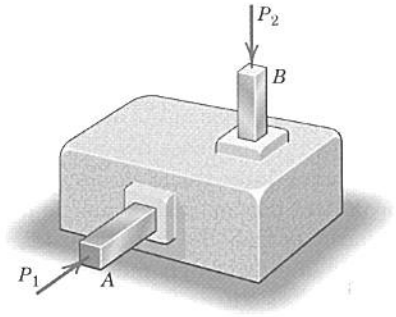
O conceito de energia potencial, tanto gravitacional (V_g) quanto elástica (V_e) é útil na solução de problemas de equilíbrio onde deslocamentos virtuais causam variações nas posições verticais dos centros de massa dos corpos e variações nos comprimentos de elementos elásticos (molas). Para aplicar esse método,

1. Obtenha uma expressão para a energia potencial total V do sistema em termos da variável que especifica a possível posição do sistema.
2. Examine a primeira e a segunda derivadas de V para estabelecer, respectivamente, a posição de equilíbrio e a condição de estabilidade correspondente.

PROBLEMAS DE REVISÃO

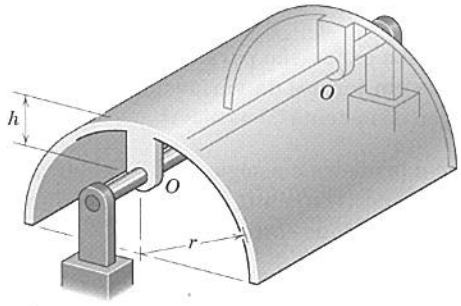
7/61 Uma "caixa preta" contém uma série de cremalheiras e pinhões, engrenagens e outros elementos mecânicos internos interconectados, os quais transformam o movimento linear da haste A em um movimento linear da haste B. Para cada unidade de movimento de entrada em A, sob a ação da força P_1, a barra B se move para fora da caixa, um quarto de unidade, contra a ação da força P_2. Se $P_1 = 100$ N, calcule P_2 para haver equilíbrio. Despreze qualquer atrito e considere que todos os componentes mecânicos são corpos rígidos leves, idealmente unidos.

Resp. $P_2 = 400$ N



Problema 7/61

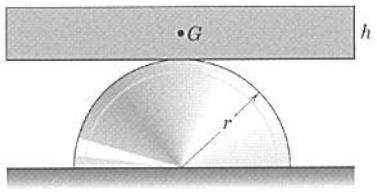
7/62 A casca semicilíndrica de raio r gira em torno de um eixo, pelos pontos O, como mostrado. A massa das duas hastes de suporte é pequena comparada à massa da casca. Determine o valor máximo de h para o qual o equilíbrio na posição mostrada é estável.



Problema 7/62

7/63 Um bloco retangular uniforme de altura h e massa m está centrado em uma posição horizontal, sobre a superfície circular fixa de raio r. Determine o valor limite de h para haver estabilidade.

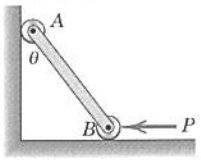
Resp. $h < 2r$



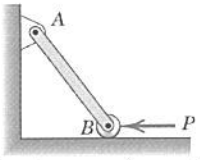
Problema 7/63

7/64 Identifique quais dos itens de (*a*) até (*f*) são mais bem resolvidos (*A*) pelas equações de equilíbrio de força e momento e (*B*) por trabalho virtual. Descreva sucintamente o procedimento para cada solução.

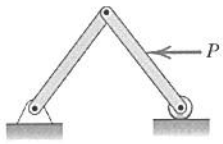
O plano de cada figura é vertical. O tamanho e a massa de cada elemento e a força aplicada são conhecidos



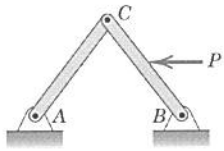
Encontre θ para haver equilíbrio
(*a*)



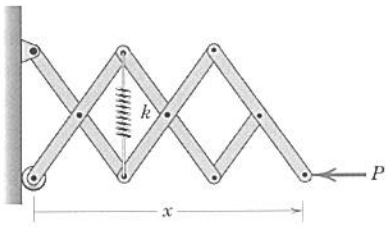
Encontre as reações em A e B
(*b*)



Encontre x para haver equilíbrio
(*c*)



Encontre as forças em A, B, e C
(*d*)



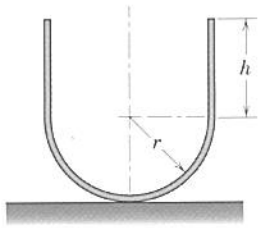
Encontre x para haver equilíbrio
(*e*)

Determine o k máximo para haver equilíbrio estável em $\theta = 0$
(*f*)

Problema 7/64

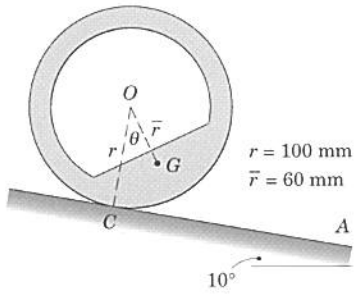
7/65 A figura mostra a seção transversal de um recipiente composto por uma casca hemisférica de raio r e uma casca cilíndrica de altura h, feitas do mesmo material. Especifique o limite de h para haver estabilidade na posição vertical quando o recipiente é colocado sobre uma superfície horizontal.

Resp. $h < r$



Problema 7/65

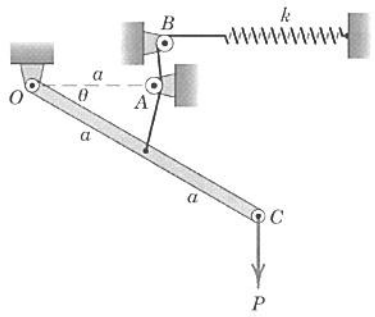
7/66 Determine os valores de equilíbrio de θ e a estabilidade do equilíbrio em cada posição para a roda não balanceada sobre a rampa de 10°. O atrito estático é suficiente para prevenir deslizamento. O centro de massa está em G.



Problema 7/66

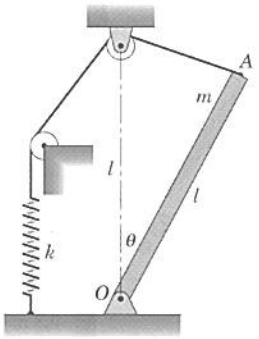
7/67 A barra leve OC é articulada em O e balança no plano vertical. Quando $\theta = 0$, a mola de rigidez k não está alongada. Determine o ângulo de equilíbrio, correspondente a uma força vertical P aplicada à extremidade da barra. Despreze a massa da barra e o diâmetro das pequenas polias.

Resp. $\theta = \tan^{-1}\dfrac{2P}{ka}$



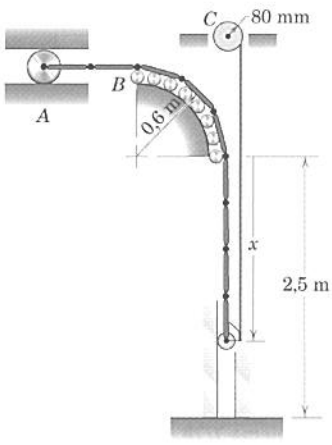
Problema 7/67

7/68 A figura mostra a vista lateral de uma clarabóia uniforme de massa m e com centro de massa na metade da distância entre A e O. A clarabóia é contrabalançada pela ação da mola, que tem uma rigidez k e que não está alongada quando ela está no plano vertical, em $\theta = 0$. Determine a rigidez k necessária para equilibrar a clarabóia em uma posição de equilíbrio para $\theta > 0$.



Problema 7/68

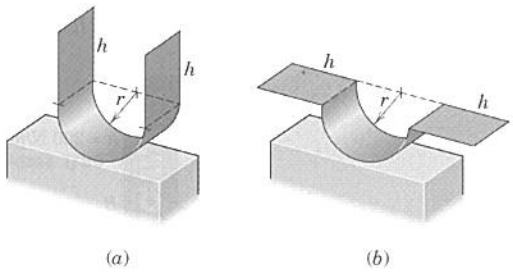
7/69 A figura mostra o projeto da seção transversal de uma porta industrial de 35 kg, com segmentos articulados, que passa sobre roletes posicionados sobre a guia cilíndrica. Quando a porta está fechada, a extremidade A está na posição B. Em cada lado da porta existe um cabo de controle, preso à extremidade inferior da porta e enrolado em um tambor C. Cada um dos dois tambores está ligado a uma mola de torção, que oferece uma resistência à torção que aumenta de 10 N · m para cada revolução do tambor, começando a partir de uma posição não torcida da mola quando $x = 0$. Determine o valor projetado de x para haver equilíbrio e prove que o equilíbrio nessa posição é estável.



Problema 7/69

Resp. $x = 2{,}05$ m

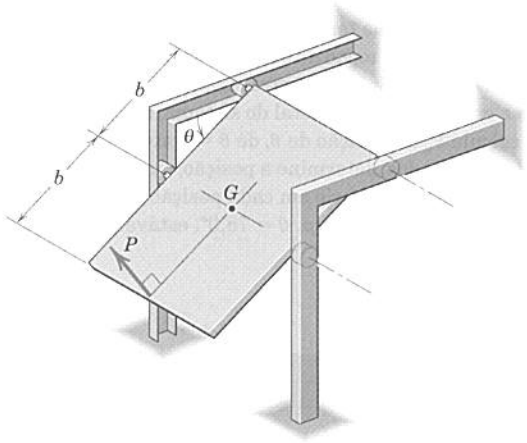
7/70 Duas cascas semicilíndricas com retângulos projetados iguais são formadas de lâminas metálicas, uma com a configuração (*a*) e a outra com a configuração (*b*). Ambas as cascas repousam sobre uma superfície horizontal. Para o caso (*a*) determine o valor máximo de h para o qual a casca se manterá estável na posição mostrada. Para o caso (*b*) prove que a estabilidade na posição mostrada não é afetada pela dimensão h.



Problema 7/70

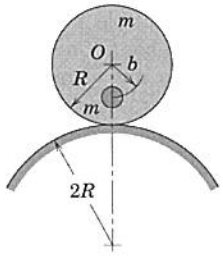
7/71 O painel retangular uniforme de massa m e centro de massa em G é guiado por roletes — o par superior na guia horizontal e o par inferior na guia vertical. Determine a força P, aplicada à extremidade inferior e normal ao painel, necessária para manter equilíbrio em um ângulo θ dado. (*Sugestão*: Para avaliar o trabalho realizado por P, substitua-a por suas componentes horizontal e vertical.)

Resp. $P = \dfrac{mg\cos\theta}{1 + \cos^2\theta}$



Problema 7/71

7/72 O disco uniforme de alumínio com raio R e massa m rola sem deslizar sobre a superfície circular fixa de raio $2R$. Um cilindro de chumbo, também de massa m, está preso ao disco e seu centro está localizado a uma distância b do centro O do disco. Determine o valor mínimo de b para o qual o disco permanecerá em equilíbrio estável no topo, sobre a superfície cilíndrica, como mostrado.

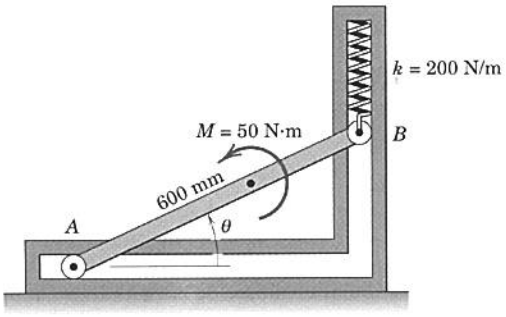


Problema 7/72

*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador**

***7/73** Os roletes nas extremidades da barra uniforme AB, de 10 kg, se movem livremente nas guias horizontal e vertical, como mostrado. Determine a posição de equilíbrio θ para a barra sob a ação de um momento $M = 50$ N · m e da mola com rigidez $k = 200$ N/m. A mola não está comprimida quando $\theta = 0$.

Resp. $\theta = 19{,}01°$

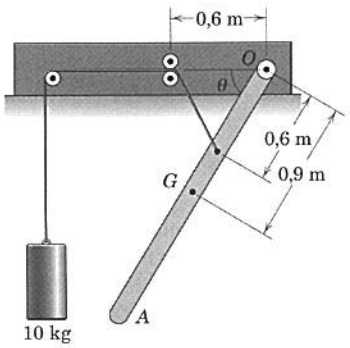


Problema 7/73

***7/74** Calcule, em função de x, a energia potencial total ($V = V_e + V_g$) para a porta industrial do Prob. 7/69 e verifique o resultado dado para aquele problema. Considere $V_g = 0$ tendo como referência A. Observe que a energia potencial da parte da porta em contato com a guia cilíndrica é uma constante, que pode ser considerada como valendo zero, por conveniência.

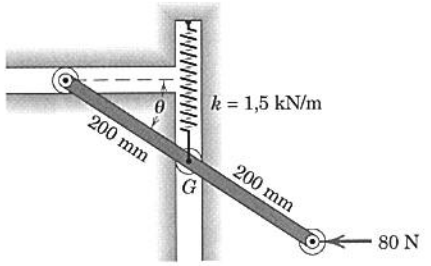
***7/75** A barra OA, que tem uma massa de 25 kg e centro de massa em G, é articulada em torno de sua extremidade O e balança no plano vertical sob a restrição do contrapeso de 10 kg. Escreva a expressão para a energia potencial total do sistema, fazendo $V_g = 0$ quando $\theta = 0$, e calcule V_g em função de θ, de $\theta = 0$ até $\theta = 360°$. A partir do gráfico dos resultados, determine a posição, ou posições, de equilíbrio e a estabilidade do equilíbrio em cada posição.

Resp. $\theta = 78{,}0°$, estável; $\theta = 260°$, instável



Problema 7/75

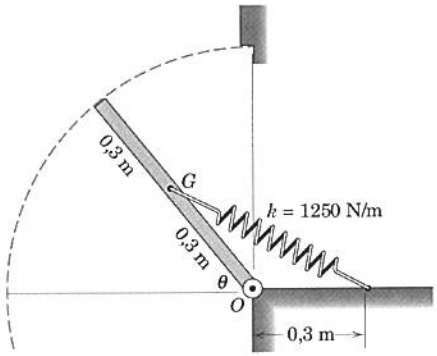
***7/76** Determine o ângulo θ para haver equilíbrio da conexão uniforme de 10 kg e centro de massa em G, à medida que sua posição no plano vertical é influenciada pela força horizontal de 80 N aplicada a sua extremidade. A mola tem uma constante de 1,5 kN/m e não está alongada quando $\theta = 0$.



Problema 7/76

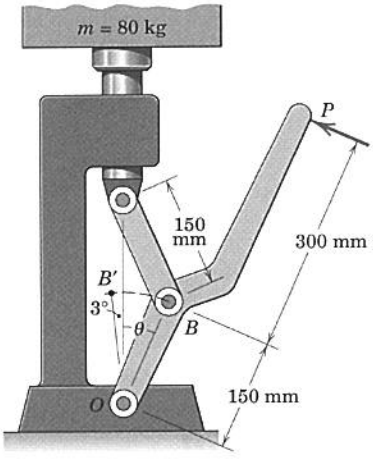
***7/77** A figura mostra a vista lateral de uma janela de ventilação de 10 kg e centro de massa em G, articulada em relação a um eixo horizontal que passa por sua aresta em O. Quando $\theta = 90°$, a mola de rigidez $k = 1250$ N/m não está alongada. Calcule a energia potencial total da janela e da mola em função de θ, e faça um gráfico de $\theta = 0$ até $\theta = 90°$. A partir do gráfico, especifique a posição de equilíbrio diferente daquela em $\theta = \pm 90°$ e verifique sua condição de estabilidade. Você pode justificar o fato do equilíbrio em $\theta = +90°$ ser estável com a mola conectada e ser instável sem a mola?

Resp. $\theta = 49{,}9°$, instável



Problema 7/77

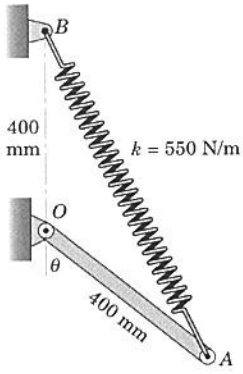
***7/78** O mecanismo articulado é usado para levantar a massa de 80 kg para uma posição travada quando OB se move para OB' na posição a 3°. Para avaliar a ação projetada do mecanismo, faça um



Problema 7/78

gráfico do valor de P necessário para operá-lo, em função de θ, de $\theta = 20°$ até $\theta = -3°$.

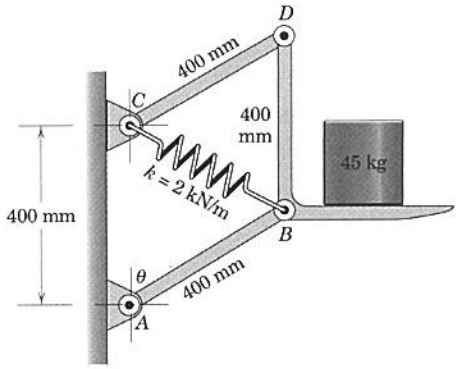
***7/79** A conexão uniforme OA tem uma massa de 20 kg e está apoiada no plano vertical pela mola AB cujo comprimento é de 400 mm quando não está esticada. Faça um gráfico da energia potencial total V e da sua derivada $dV/d\theta$ em função de θ, de $\theta = 0$ até $\theta = 120°$. A partir dos gráficos, identifique os valores de equilíbrio de θ e a correspondente estabilidade do equilíbrio. Considere $V_g = 0$ em um nível passando por O.



Problema 7/79

Resp. $\theta = 0$, instável
$\theta = 51{,}1°$, estável

***7/80** Determine o ângulo de equilíbrio θ para o mecanismo mostrado. A mola de rigidez $k = 2$ kN/m tem um comprimento de 200 mm quando não está esticada. Cada uma das conexões uniformes AB e CD tem uma massa de 4,5 kg e o elemento BD, com sua carga, tem uma massa de 45 kg. Os movimentos ocorrem no plano vertical.



Problema 7/80

A

Momentos de Inércia de Área

DESCRIÇÃO DO CAPÍTULO

A/1 Introdução
A/2 Definições
A/3 Áreas Compostas
A/4 Produtos de Inércia e Rotação de Eixos

A/1 Introdução

Quando forças são distribuídas continuamente sobre uma área na qual atuam, é comumente necessário calcular o momento dessas forças em relação a algum eixo no plano que contém a área ou perpendicular a ele. Freqüentemente, a intensidade da força (pressão ou tensão) é proporcional à distância entre a linha de ação da força ao eixo do momento. A força elementar atuando sobre um elemento de área é então proporcional à distância vezes a área diferencial, e o momento elementar é proporcional à distância ao quadrado vezes a área diferencial. Vemos, portanto, que o momento total envolve uma integral da forma $\int (\text{distância})^2\, d\,(\text{área})$. Essa integral é denominada *momento de inércia* ou *segundo momento* da área. A integral é uma função da geometria da área e ocorre freqüentemente em aplicações da mecânica. Assim, é útil desenvolver suas propriedades em algum detalhe e ter essas propriedades disponíveis para uso imediato quando a integral aparecer.

A Figura A/1 ilustra a origem física dessas integrais. Na parte *a* da figura, a área da superfície *ABCD* está sujeita a uma pressão distribuída p, cujo módulo é proporcional à distância y a partir do eixo *AB*. Essa situação foi tratada na Seção 5/9 do Capítulo 5, onde descrevemos a ação da pressão de um líquido sobre uma superfície plana. O momento em relação a *AB* devido à pressão sobre o elemento de área dA é $py\,dA = ky^2\,dA$. Assim, a integral em questão aparece quando o momento total $M = k\int y^2\,dA$ é avaliado.

Na Fig. A/1*b* mostramos a distribuição de tensão atuando em uma seção transversal de uma viga elástica simples fletida por momentos iguais e opostos aplicados a suas extremidades. Em qualquer seção da viga, uma distribuição linear de força ou tensão σ, dada por $\sigma = ky$, está presente. A tensão é positiva (trativa) abaixo do eixo *O-O* e negativa (compressiva) acima do eixo. Vemos que o momento elementar em relação ao eixo *O-O* é $dM = y(\sigma\,dA) = ky^2\,dA$. Assim, a mesma integral aparece quando o momento total $M = k\int y^2\,dA$ é avaliado.

Um terceiro exemplo é dado na Fig. A/1*c*, que mostra um eixo circular submetido a uma torção ou a um momento torçor. Dentro do limite elástico do material, existe resistência a esse momento em cada seção transversal do eixo por uma distribuição de tensão tangencial ou cisalhante τ, que é pro-

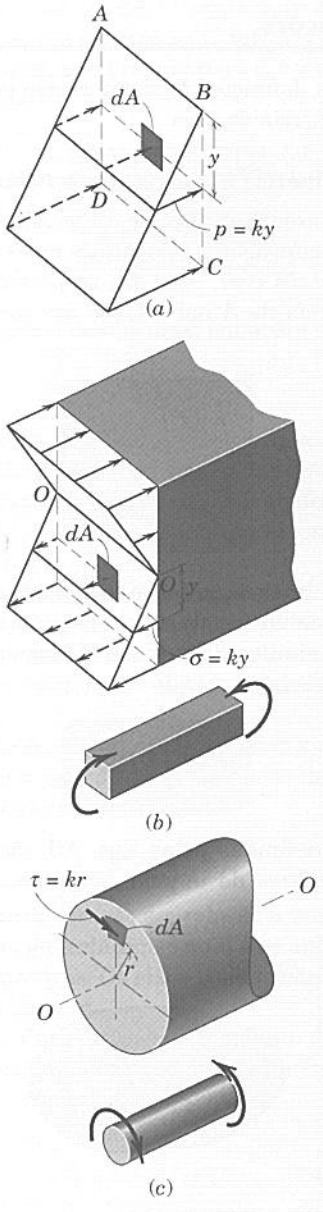


Figura A/1

porcional à distância radial r ao centro do eixo. Assim, $\tau = kr$, e o momento total em relação ao eixo central é $M = \int r\,(\tau\,dA) = k\int r^2\,dA$. Aqui a integral difere daquela dos dois exemplos anteriores já que a área é normal, em vez de paralela, ao eixo do momento e r é uma coordenada radial em vez de retangular.

Apesar da integral ilustrada nos exemplos anteriores ser geralmente chamada *momento de inércia* da área em relação ao eixo em questão, um termo mais adequado é *segundo momento da área*, já que o primeiro momento $y\,dA$ é multiplicado pelo braço de alavanca y para obter o segundo momento para o elemento dA. A palavra *inércia* aparece na terminologia devido à similaridade entre a forma matemática das integrais para segundos momentos de áreas e as dos momentos resultantes das chamadas forças de inércia no caso de corpos girando. O momento de inércia de uma área é uma propriedade puramente matemática da área e, por si só, não tem nenhum significado físico.

A/2 Definições

As seguintes definições formam a base para a análise de momentos de inércia de área.

Momentos de Inércia Retangulares e Polares

Considere a área A no plano x-y, Fig. A/2. Os momentos de inércia do elemento dA em relação aos eixos x e y são, por definição, $dI_x = y^2\,dA$ e $dI_y = x^2\,dA$, respectivamente. Os momentos de inércia de A em relação aos mesmos eixos são, portanto,

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \int y^2\,dA \\ I_y &= \int x^2\,dA \end{aligned}} \qquad \textbf{(A/1)}$$

onde fazemos a integração sobre toda a área.

O momento de inércia de dA em relação ao pólo O (eixo z) é, por definição similar, $dI_z = r^2\,dA$. O momento de inércia da área inteira em relação a O é

$$\boxed{I_z = \int r^2\,dA} \qquad \textbf{(A/2)}$$

As expressões definidas pelas Eqs. A/1 são chamadas momentos *retangulares* de inércia, enquanto a expressão da Eq. A/2 é chamada momento *polar* de inércia.* Já que $x^2 + y^2 = r^2$ fica claro que

$$\boxed{I_z = I_x + I_y} \qquad \textbf{(A/3)}$$

Para uma área cujas fronteiras sejam mais simplesmente descritas em coordenadas retangulares do que em coordenadas polares, seu momento polar de inércia é facilmente calculado com a ajuda da Eq. A/3.

O momento de inércia de um elemento envolve o quadrado da distância do eixo de inércia ao elemento. Assim, um elemento cuja coordenada seja negativa contribui tanto para o momento de inércia quanto um elemento igual com uma coordenada positiva de mesmo módulo. Conseqüentemente, o momento de inércia de área em relação a qualquer eixo é sempre uma grandeza positiva. Em contraste, o primeiro momento da área, que foi usado nos cálculos de centróides, pode ser tanto positivo, negativo ou zero.

As dimensões dos momentos de inércia de áreas são claramente L^4, onde L indica a dimensão de comprimento. Assim, as unidades SI para momentos de inércia de área são expressas como metros à quarta (m^4) ou milímetros à quarta (mm^4).

A escolha das coordenadas a serem usadas para o cálculo dos momentos de inércia é importante. Coordenadas retangulares devem ser usadas para formas cujos contornos são mais facilmente expressos nessas coordenadas. Coordenadas polares geralmente simplificarão problemas envolvendo contornos que são facilmente descritos por r e θ. A escolha de um elemento de área que simplifique, tanto quanto possível, a integração também é importante. Essas considerações são bastante semelhantes àquelas discutidas e ilustradas no Capítulo 5 para o cálculo de centróides.

Raio de Giração

Considere uma área A, Fig. A/3*a*, que tem momentos retangulares de inércia I_x e I_y e um momento polar de inércia I_z em relação a O. Agora visualizamos essa área como concentrada em uma longa e estreita faixa de área A a uma distância k_x do eixo x, Fig. A/3*b*. Por definição, o momento de inércia da faixa em relação ao eixo x será igual ao da área original se $k_x^2 A = I_x$. A distância k_x é chamada *raio de giração* da área em relação ao eixo x. Uma relação semelhante para o eixo y é escrita considerando a área concentrada em uma faixa estreita paralela ao eixo y, como mostrado na Fig. A/3*c*. Da mesma forma, se visualizarmos a área como concentrada em um anel estreito de raio k_z como mostrado na Fig. A/3*d*, podemos expressar o momento polar de inércia como $k_z^2 A = I_z$. Em resumo, podemos escrever

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= k_x^2 A \\ I_y &= k_y^2 A \\ I_z &= k_z^2 A \end{aligned}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{aligned} k_x &= \sqrt{I_x/A} \\ k_y &= \sqrt{I_y/A} \\ k_z &= \sqrt{I_z/A} \end{aligned}} \qquad \textbf{(A/4)}$$

O raio de giração é, então, uma medida da distribuição da área em relação ao eixo em questão. Um momento de inércia

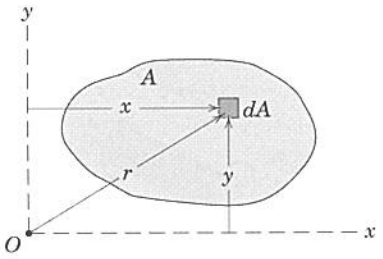


Figura A/2

*O momento polar de inércia de uma área é às vezes representado pelo símbolo J na literatura de mecânica.

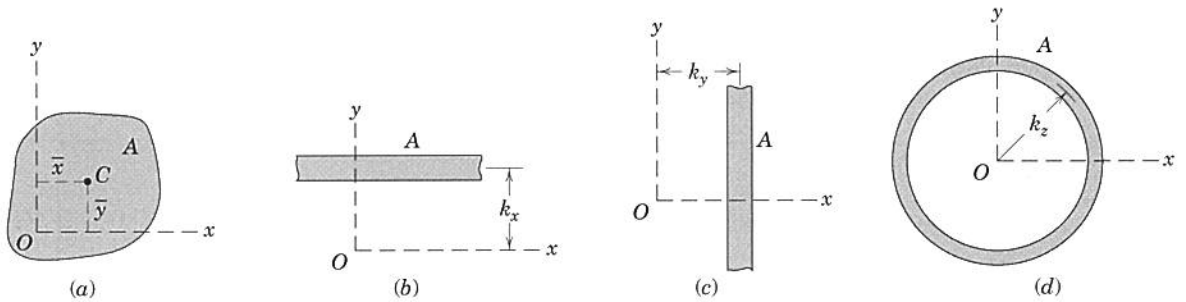


Figura A/3

retangular ou polar pode ser expresso especificando o raio de giração e a área.

Quando substituímos as Eqs. A/4 na Eq. A/3 temos

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \qquad \textbf{(A/5)}$$

Assim, o quadrado do raio de giração em relação a um eixo polar é igual à soma dos quadrados dos raios de giração em relação aos dois eixos retangulares correspondentes.

Não confunda a coordenada em relação ao centróide C de uma área com o raio de giração. Na Fig. A/3*a* o quadrado da distância do centróide ao eixo x, por exemplo, é $\bar{y}^2$, que é quadrado do valor médio das distâncias dos elementos da área ao eixo x. A quantidade k_x^2, por outro lado, é a média dos quadrados dessas distâncias. O momento de inércia *não* é igual a $A\bar{y}^2$, já que o quadrado da média é menor que a média dos quadrados.

Transferência de Eixos

O momento de inércia de uma área em relação a um eixo fora do centróide pode ser facilmente expresso em termos do momento de inércia em relação a um eixo paralelo que passe pelo centróide. Na Fig. A/4 os eixos x_0-y_0 passam pelo centróide C da área. Vamos agora determinar os momentos de inércia da área em relação aos eixos paralelos x-y. Por definição, o momento de inércia do elemento dA em relação ao eixo x é

$$dI_x = (y_0 + d_x)^2\, dA$$

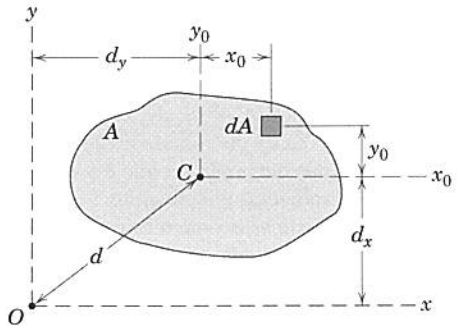


Figura A/4

Expandindo e integrando obtém-se

$$I_x = \int y_0^2\, dA + 2d_x \int y_0\, dA + d_x^2 \int dA$$

Vemos que a primeira integral é, por definição, o momento de inércia $\bar{I}_x$ em relação ao eixo x_0 do centróide. A segunda integral é zero, já que $\int y_0\, dA = A\bar{y}_0$ e $\bar{y}_0$ é automaticamente zero com o centróide no eixo x_0. O terceiro termo é simplesmente Ad_x^2. Assim, a expressão para I_x e a expressão similar para I_y se tornam

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_x + Ad_x^2 \\ I_y &= \bar{I}_y + Ad_y^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(A/6)}$$

Pela Eq. A/3 a soma destas duas equações dá

$$I_z = \bar{I}_z + Ad^2 \qquad \textbf{(A/6}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

As equações A/6 e A/6*a* são os assim chamados *teoremas do eixo paralelo*. Dois pontos em particular devem ser realçados. Primeiro, os eixos entre os quais a transferência é feita *devem ser paralelos* e, segundo, um dos eixos *deve passar pelo centróide da área*.

Se se deseja realizar uma transferência entre dois eixos paralelos que não passem pelo centróide, é necessário primeiro transferir de um dos eixos para o eixo paralelo do centróide e então transferir do eixo do centróide para o segundo eixo.

Os teoremas do eixo paralelo também valem para raios de giração. Com a substituição da definição de k nas Eqs. A/6, a relação de transferência se torna

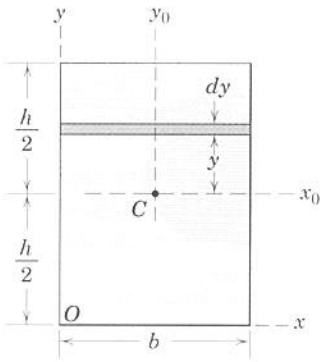
$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \qquad \textbf{(A/6}\boldsymbol{b}\textbf{)}$$

onde $\bar{k}$ é o raio de giração em relação a um eixo do centróide paralelo ao eixo em relação ao qual k se aplica e d é a distância entre os dois eixos. Os eixos podem estar no plano ou normais ao plano da área.

Um resumo das relações de momento de inércia para algumas figuras planas comuns é dado na Tabela D/3, Apêndice D.

Exemplo A/1

Determine os momentos de inércia da área retangular em relação aos eixos do centróide x_0 e y_0, ao eixo polar do centróide z_0 passando por C, ao eixo x e ao eixo polar z passando por O.



Solução. Para o cálculo do momento de inércia $\bar{I}_x$ em relação ao eixo x_0, uma faixa horizontal de área $b\,dy$ é escolhida de forma que todos os elementos da faixa têm a mesma coordenada y. Assim, ①

$$[I_x = \int y^2\,dA] \qquad \bar{I}_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\,dy = \tfrac{1}{12}bh^3 \qquad \textit{Resp.}$$

Intercambiando os símbolos, o momento de inércia em relação ao eixo do centróide y_0 é

$$\bar{I}_y = \tfrac{1}{12}hb^3 \qquad \textit{Resp.}$$

O momento polar de inércia do centróide é

$$[\bar{I}_z = \bar{I}_x + \bar{I}_y] \qquad \bar{I}_z = \tfrac{1}{12}(bh^3 + hb^3) = \tfrac{1}{12}A(b^2 + h^2) \qquad \textit{Resp.}$$

Pelo teorema do eixo paralelo, o momento de inércia em relação ao eixo x é

$$[I_x = \bar{I}_x + Ad_x{}^2] \qquad I_x = \tfrac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3}bh^3 = \tfrac{1}{3}Ah^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Também obtemos o momento de inércia polar em relação a O pelo teorema do eixo paralelo, que nos dá

$$[I_z = \bar{I}_z + Ad^2] \qquad I_z = \tfrac{1}{12}A(b^2 + h^2) + A\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

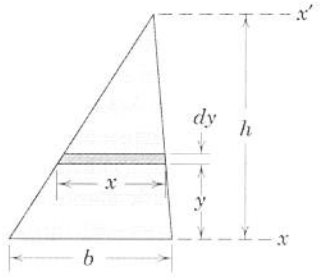
$$I_z = \tfrac{1}{3}A(b^2 + h^2) \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestão Útil

① Se tivéssemos começado com o elemento de segunda ordem $dA = dx\,dy$, a integração com relação a x mantendo y constante corresponde apenas à multiplicação por b e nos dá a expressão $y^2b\,dy$, que escolhemos no início.

Exemplo A/2

Determine os momentos de inércia da área triangular em relação a sua base e em relação a eixos paralelos passando pelo seu centróide e pelo vértice.



① ② ***Solução.*** Uma faixa de área paralela à base é selecionada como mostrado na figura e ela tem uma área $dA = x\,dy = [(h - y)b/h]\,dy$. Por definição

$$[I_x = \int y^2\,dA] \qquad I_x = \int_0^h y^2 \frac{h - y}{h} b\,dy = b\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h}\right]_0^h = \frac{bh^3}{12} \qquad \textit{Resp.}$$

Pelo teorema do eixo paralelo o momento de inércia $\bar{I}$ em relação a um eixo que passa pelo centróide, a uma distância $h/3$ acima do eixo x, é

$$[\bar{I} = I - Ad^2] \qquad \bar{I} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36} \qquad \textit{Resp.}$$

Uma transferência do eixo do centróide para o eixo x' que passa pelo vértice dá

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_{x'} = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{4} \qquad \textit{Resp.}$$

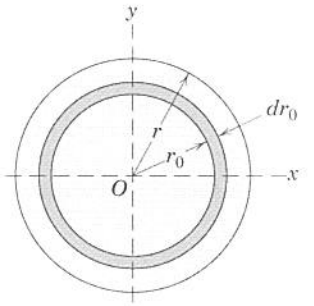
Sugestões Úteis

① Aqui, novamente, escolhemos o elemento mais simples possível. Se tivéssemos escolhido $dA = dx\,dy$, teríamos que integrar $y^2\,dx\,dy$ em relação a x primeiramente. Isso nos daria $y^2x\,dy$, que é a expressão que escolhemos inicialmente.

② Expressar x em termos de y não deve trazer dificuldade se observarmos a relação de proporcionalidade entre os triângulos semelhantes.

Exemplo A/3

Calcule os momentos de inércia da área de um círculo em relação a um eixo diametral e em relação ao eixo polar passando pelo seu centro. Especifique os raios de giração.



Solução. Um elemento diferencial de área na forma de um anel circular pode ser usado ① para o cálculo do momento de inércia em relação ao eixo polar z que passa por O, já que todos os elementos do anel são eqüidistantes de O. A área elementar é $dA = 2\pi r_0\, dr_0$ e, portanto,

$$[I_z = \int r^2\, dA] \qquad I_z = \int_0^r r_0^2(2\pi r_0\, dr_0) = \frac{\pi r^4}{2} = \tfrac{1}{2}Ar^2 \qquad \textit{Resp.}$$

O raio polar de giração é

$$\left[k = \sqrt{\frac{I}{A}}\right] \qquad k_z = \frac{r}{\sqrt{2}} \qquad \textit{Resp.}$$

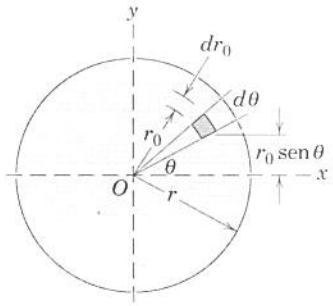
Por simetria $I_x = I_y$, de forma que da Eq. A/3

$$[I_z = I_x + I_y] \qquad I_x = \tfrac{1}{2}I_z = \frac{\pi r^4}{4} = \tfrac{1}{4}Ar^2 \qquad \textit{Resp.}$$

O raio de giração em relação eixo diametral é

$$\left[k = \sqrt{\frac{I}{A}}\right] \qquad k_x = \frac{r}{2} \qquad \textit{Resp.}$$

A determinação de I_x anterior é a mais simples possível. O resultado também pode ser obtido por integração direta, usando o elemento de área $dA = r_0\, dr_0\, d\theta$ mostrado na figura a seguir. Por definição



$$[I_x = \int y^2\, dA] \qquad I_x = \int_0^{2\pi}\int_0^r (r_0 \operatorname{sen}\theta)^2 r_0\, dr_0\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^4 \operatorname{sen}^2\theta}{4}\, d\theta$$

② $$= \frac{r^4}{4}\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi r^4}{4} \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestões Úteis

① Coordenadas polares são certamente indicadas aqui. Além disso, como antes, escolhemos o elemento mais simples e de mais baixa ordem possível, que é o anel diferencial. Deve ser imediatamente evidente da definição que o momento polar de inércia do anel é sua área $2\pi r_0\, dr_0$ vezes r_0^2.

② Essa integração é simples, mas o uso da Eq. A/3 junto com o resultado para I_z é certamente mais simples.

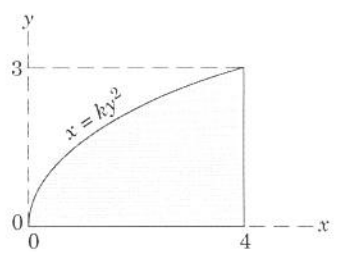
Exemplo A/4

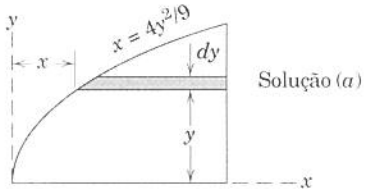
Determine o momento de inércia da área sob a parábola em relação ao eixo x. Resolva usando (a) uma faixa de área horizontal e (b) uma faixa de área vertical.

Solução. A constante $k = \dfrac{4}{9}$ é obtida primeiro, substituindo $x = 4$ e $y = 3$ na equação da parábola.

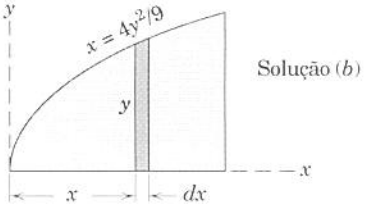
(a) Faixa horizontal. Já que todas as partes da faixa horizontal estão à mesma distância do eixo x, o momento de inércia da faixa em relação ao eixo x é $y^2\, dA$ onde $dA = (4 - x)\, dy = 4(1 - y^2/9)\, dy$. Integrando em relação a y obtém-se

$$[I_x = \int y^2\, dA] \qquad I_x = \int_0^3 4y^2\left(1 - \frac{y^2}{9}\right) dy = \frac{72}{5} = 14{,}40\ \text{(unidades)}^4 \qquad \textit{Resp.}$$





Solução (a)



Solução (b)

(b) Faixa vertical. Aqui, todas as partes do elemento estão a distâncias diferentes do eixo x, de forma que devemos usar as expressões corretas para o momento de inércia do retângulo elementar em relação a sua base que, do Exemplo A/1, vale $bh^3/3$. Para a largura dx e a altura y a expressão se torna

$$dI_x = \tfrac{1}{3}(dx)y^3$$

Para integrar em relação a x, devemos expressar y em termos de x, o que dá $y = 3\sqrt{x}/2$, e a integral se torna

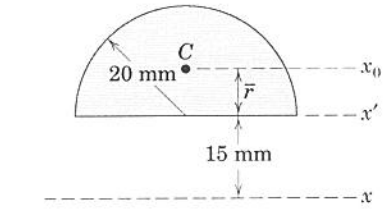
① $$I_x = \tfrac{1}{3}\int_0^4 \left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^3 dx = \frac{72}{5} = 14{,}40 \text{ (unidades)}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestão Útil

① Não existe grande preferência entre as soluções (*a*) e (*b*). A solução (*b*) requer que se saiba o momento de inércia para uma área retangular em relação a sua base.

Exemplo A/5

Determine o momento de inércia da área semicircular em relação ao eixo x.



Solução. O momento de inércia da área semicircular em relação ao eixo x' é metade daquele de um círculo completo em relação ao mesmo eixo. Assim, dos resultados do Exemplo A/3

$$I_{x'} = \frac{1}{2}\frac{\pi r^4}{4} = \frac{20^4\pi}{8} = 2\pi(10^4) \text{ mm}^4$$

Obtemos, a seguir, o momento de inércia $\bar{I}$ em relação ao eixo paralelo x_0 do centróide. A transferência é feita através da distância $\bar{r} = 4r/(3\pi) = (4)(20)/(3\pi) = 80/(3\pi)$mm, pelo teorema do eixo paralelo. Portanto,

$$[\bar{I} = I - Ad^2] \qquad \bar{I} = 2(10^4)\pi - \left(\frac{20^2\pi}{2}\right)\left(\frac{80}{3\pi}\right)^2 = 1{,}755(10^4) \text{ mm}^4$$

① Finalmente, transferimos do eixo do centróide x_0 para o eixo x. Assim,

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_x = 1{,}755(10^4) + \left(\frac{20^2\pi}{2}\right)\left(15 + \frac{80}{3\pi}\right)^2$$

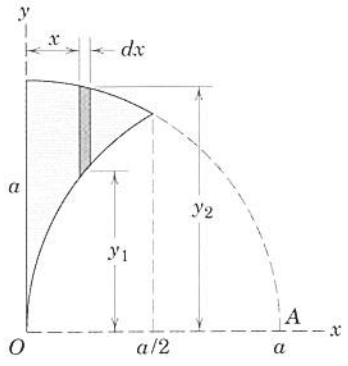
$$= 1{,}755(10^4) + 34{,}7(10^4) = 36{,}4(10^4) \text{ mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

Sugestão Útil

① Esse problema ilustra o cuidado que devemos ter ao usar uma transferência dupla de eixos, já que nem o eixo x' nem o eixo x passam pelo centróide C da área. Se o círculo fosse completo, com o centróide no eixo x', somente uma transferência seria necessária.

Exemplo A/6

Calcule o momento de inércia em relação ao eixo x da área contida entre o eixo y e os arcos de círculo de raio a, cujos centros estão em O e A.



Solução. A escolha de uma faixa diferencial de área vertical permite que uma integração cubra toda a área. Uma faixa horizontal requereria duas integrações com relação a y devido à descontinuidade. O momento de inércia da faixa em relação ao eixo x é o de uma faixa de altura y_2 menos o de uma faixa de altura y_1. Assim, dos resultados do Exemplo A/1 escrevemos

$$dI_x = \tfrac{1}{3}(y_2\,dx){y_2}^2 - \tfrac{1}{3}(y_1\,dx){y_1}^2 = \tfrac{1}{3}({y_2}^3 - {y_1}^3)\,dx$$

Os valores de y_2 e y_1 são obtidos das equações das duas curvas, que são $x^2 = y_2^2 = a^2$

① e $(x-a)^2 + y_1^2 = a^2$ que dão $y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $y_1 = \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$. Assim,

$$I_x = \tfrac{1}{3}\int_0^{a/2} \{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2} - [a^2 - (x-a)^2]\sqrt{a^2 - (x-a)^2}\}\,dx$$

A solução simultânea das duas equações que definem os dois círculos dá a coordenada x da interseção das duas curvas que, por inspeção, é $a/2$. A avaliação das integrais dá

$$\int_0^{a/2} a^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^4}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$-\int_0^{a/2} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^4}{16}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

Sugestão Útil

① Escolhemos os sinais positivos para os radicais já que tanto y_1 quanto y_2 estão acima do eixo x.

$$-\int_0^{a/2} a^2\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx = \frac{a^4}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\int_0^{a/2} (x-a)^2\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}\right)$$

Juntado as integrais com o fator de $\frac{1}{3}$ dá

$$I_x = \frac{a^4}{96}(9\sqrt{3}-2\pi) = 0{,}0969a^4 \qquad \textit{Resp.}$$

Se tivéssemos começado com um elemento de segunda ordem $dA = dx\,dy$, escreveríamos $y^2\,dx\,dy$ para o momento de inércia do elemento em relação ao eixo x. Integrando de y_1 a y_2 mantendo x constante produz, para a faixa vertical

$$dI_x = \left[\int_{y_1}^{y_2} y^2\,dy\right]dx = \tfrac{1}{3}(y_2^3 - y_1^3)\,dx$$

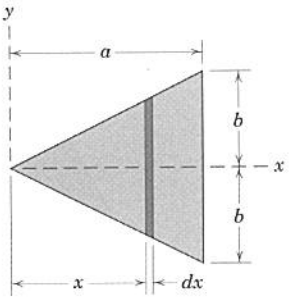
que é a expressão com que começamos, tendo em mente o resultado para o momento de inércia para um retângulo.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

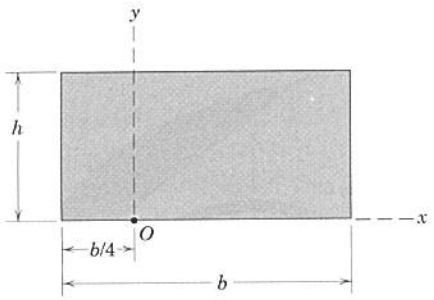
A/1 Use o elemento diferencial mostrado para determinar o momento de inércia da área triangular em relação ao eixo x e em relação ao eixo y.

Resp. $I_x = \frac{1}{6}ab^3$, $I_y = \frac{1}{2}ba^3$



Problema A/1

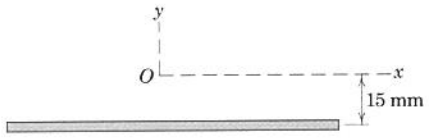
A/2 Determine os momentos de inércia da área retangular em relação aos eixos x e y e encontre o momento polar de inércia em relação ao ponto O.



Problema A/2

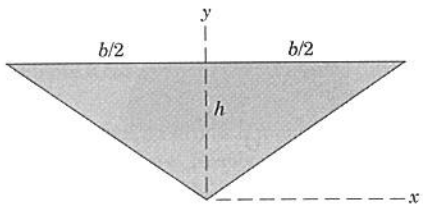
A/3 A faixa retangular estreita tem uma área de 300 mm² e seu momento de inércia em relação ao eixo y vale $35(10^3)$ mm⁴. Obtenha uma boa aproximação para o raio de giração polar em relação ao ponto O.

Resp. k_O = 18,48 mm



Problema A/3

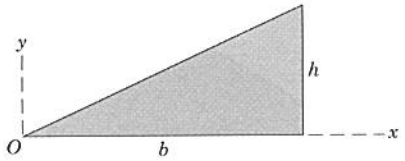
A/4 Determine a razão b/h tal que $I_x = I_y$ para a área do triângulo isósceles.



Problema A/4

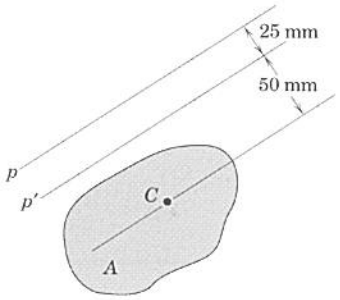
A/5 Determine, por integração direta, o momento de inércia da área triangular em relação ao eixo y.

Resp. $I_y = \frac{hb^3}{4}$



Problema A/5

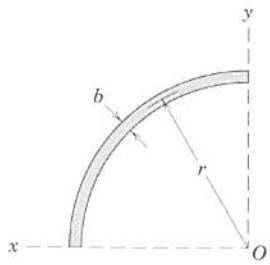
A/6 Os momentos de inércia da área A em relação aos eixos paralelos p e p' diferem por $15(10^6)$ mm^4. Calcule a área A que tem seu centróide em C.



Problema A/6

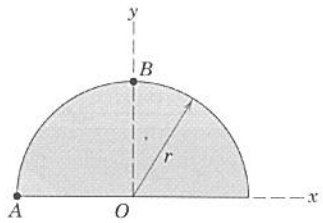
A/7 A faixa de quarto de círculo tem uma largura b que é pequena comparada com seu raio r. Determine o momento polar de inércia da área em relação a seu centróide.

Resp. $I_C = 0{,}298br^3$



Problema A/7

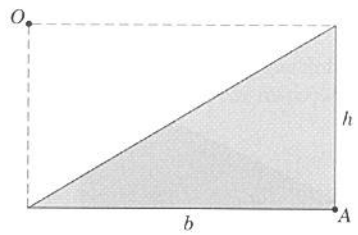
A/8 Determine os momentos polares de inércia da área semicircular em relação aos pontos A e B.



Problema A/8

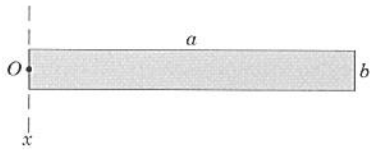
A/9 Determine o raio de giração polar do triângulo retângulo em relação aos pontos A e O.

Resp. $k_A = \sqrt{(h^2 + b^2)/6}, k_O = \sqrt{(h^2 + b^2)/2}$



Problema A/9

A/10 Mostre que o momento de inércia da área retangular em relação ao eixo x que passa por uma extremidade pode ser usado como seu momento polar de inércia em relação ao ponto O quando b é pequeno comparado com a. Qual é o erro percentual n quando $b/a = 1/10$?

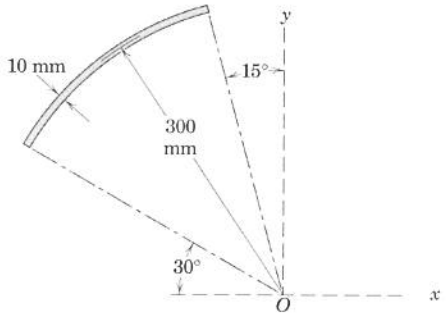


Problema A/10

Problemas Representativos

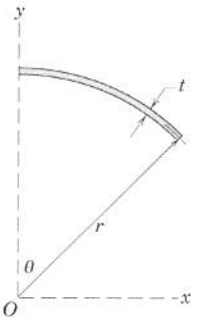
A/11 Determine uma boa aproximação para o momento polar de inércia I_O da faixa circular fina em relação ao ponto O.

Resp. $I_O = 212(10^6)$ mm^4



Problema A/11

A/12 Deduza expressões para os momentos de inércia I_x e I_y da faixa circular fina de área A em relação aos eixos x e y. Some seus resultados e compare com a resposta do Prob. A/11 usando os valores numéricos daquele problema.

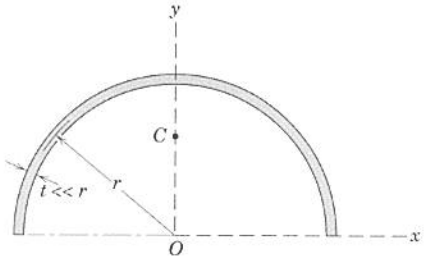


Problema A/12

A/13 Determine os momentos de inércia I_x e I_y da área do anel semicircular fino em relação aos eixos x e y. Encontre também o momento polar de inércia I_C do anel em relação ao seu centróide C.

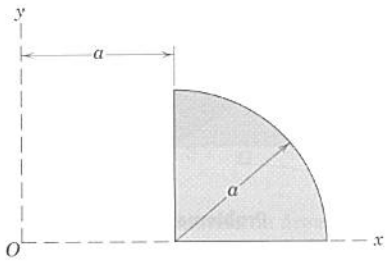
Resp. $I_x = I_y = \frac{1}{2}\pi r^3 t$

$I_C = \pi r^3 t\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$



Problema A/13

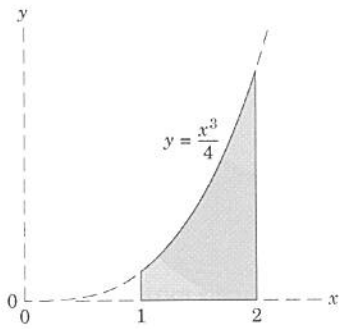
A/14 Determine os momentos de inércia da área de quarto de círculo em relação aos eixos x e y e encontre o raio de giração polar em relação ao ponto O.



Problema A/14

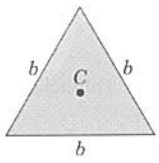
A/15 Determine os raios de giração retangular e polar da área sombreada em relação aos eixos mostrados.

Resp. $k_x = 0{,}754, k_y = 1{,}673, k_z = 1{,}835$



Problema A/15

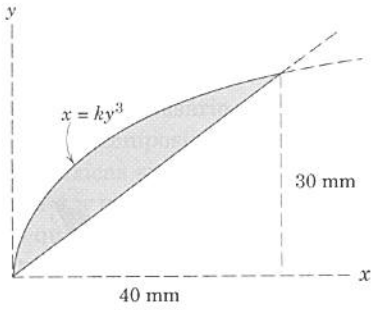
A/16 Determine o raio de giração polar da área do triângulo eqüilátero de lado b, em relação a seu centróide C.



Problema A/16

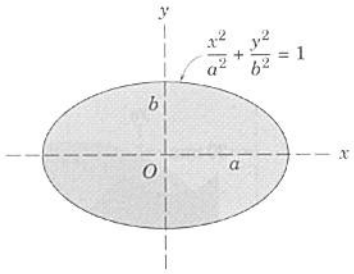
A/17 Calcule o momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x.

Resp. $I_x = 9(10^4)$ mm^4



Problema A/17

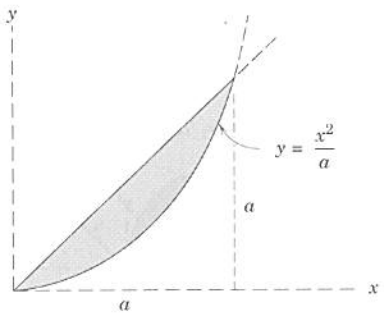
A/18 Determine o momento de inércia da área elíptica em relação ao eixo y e encontre o raio de giração polar em relação à origem O do sistema de coordenadas.



Problema A/18

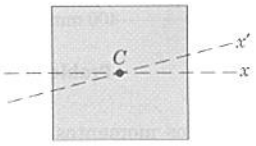
A/19 Determine os momentos de inércia da área sombreada em relação aos eixos x e y. Use o mesmo elemento diferencial para ambos os cálculos.

Resp. $I_x = a^4/28, I_y = a^4/20$



Problema A/19

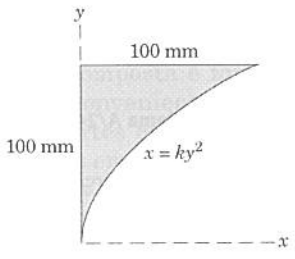
A/20 Mostre que o momento de inércia da área do quadrado em relação a qualquer eixo x' passando por seu centro é igual ao momento em relação a um eixo central x paralelo a um dos lados.



Problema A/20

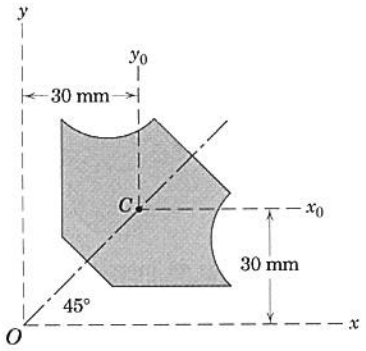
A/21 Calcule por integração direta o momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x. Resolva, primeiro, usando uma faixa horizontal de área diferencial e, a seguir, usando uma faixa vertical de área diferencial.

Resp. $I_x = 20(10^6)$ mm^4



Problema A/21

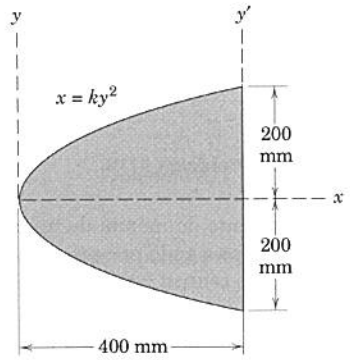
A/22 A figura plana é simétrica em relação à linha a 45° e tem uma área de 1600 mm². Seu momento polar de inércia em relação a seu centróide C vale $40(10^4)$ mm⁴. Calcule (*a*) o raio de giração polar em relação a O e (*b*) o raio de giração em relação ao eixo x_0.



Problema A/22

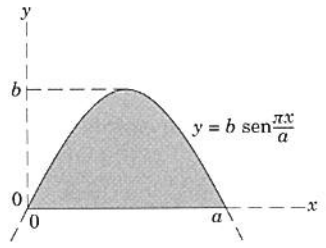
A/23 Determine os momentos de inércia da área sombreada em relação aos eixos y e y'.

Resp. $I_y = 73{,}1(10^8)$ mm⁴, $I_{y'} = 39{,}0(10^8)$ mm⁴



Problema A/23

A/24 Determine os momentos de inércia da área sombreada em relação aos eixos x e y.

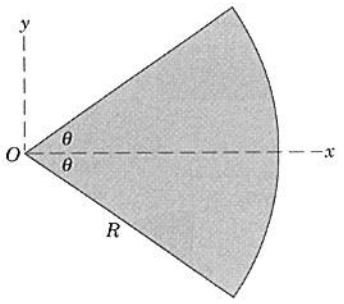


Problema A/24

A/25 Determine os momentos de inércia do setor circular em relação aos eixos x e y.

$$\textit{Resp. } I_x = \frac{R^4}{4}\left(\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)$$

$$I_y = \frac{R^4}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)$$

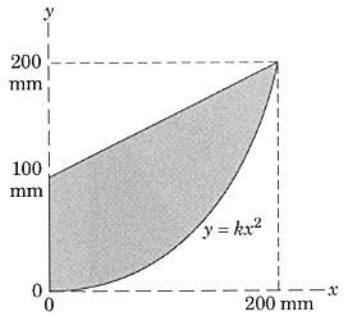


Problema A/25

A/26 Use os resultados citados para o Prob. A/25 para determinar o momento polar de inércia da área do setor circular em relação a seu centróide C.

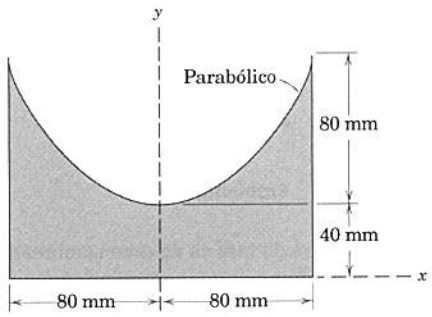
A/27 Calcule o momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x.

Resp. $I_x = 1{,}738(10^8)$ mm⁴



Problema A/27

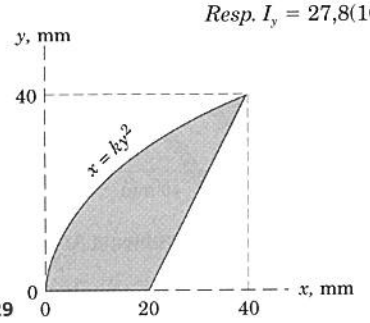
A/28 Determine o raio de giração da área sombreada mostrada em relação ao eixo y.



Problema A/28

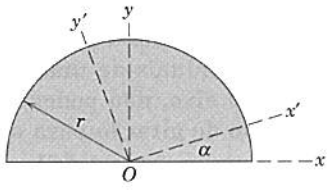
A/29 Calcule o momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo y.

Resp. $I_y = 27{,}8(10^4)$ mm⁴



Problema A/29

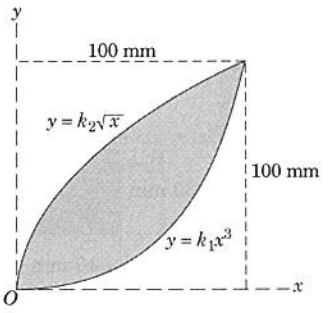
A/30 A partir de considerações de simetria mostre que $I_{x'} = I_{y'} = I_x = I_y$ para a área semicircular, independente do ângulo α.



Problema A/30

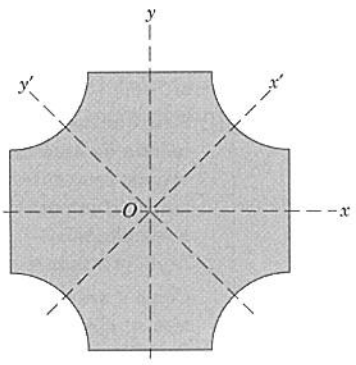
A/31 Calcule os momentos de inércia da área sombreada em relação aos eixos x e y e encontre o momento polar de inércia em relação ao ponto O.

Resp. $I_x = 10^7$ mm^4, $I_y = 11{,}90(10^6)$ mm^4
$I_O = 21{,}9(10^6)$ mm^4



Problema A/31

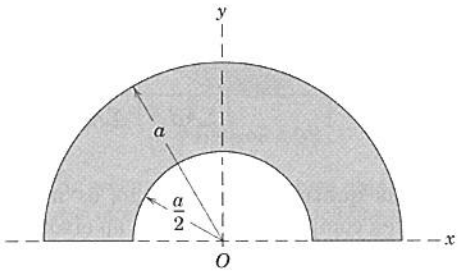
A/32 A área mostrada é simétrica em relação aos eixos x-y e x'-y'. Se seu momento polar de inércia em relação a O vale $16(10^6)$ mm^4, determine os momentos de inércia da área em relação aos eixos x e x'. Você pode determinar também o momento de inércia em relação a qualquer eixo que passe por O?



Problema A/32

A/33 Usando os métodos dessa seção, determine os raios de giração retangular e polar da área sombreada em relação aos eixos mostrados.

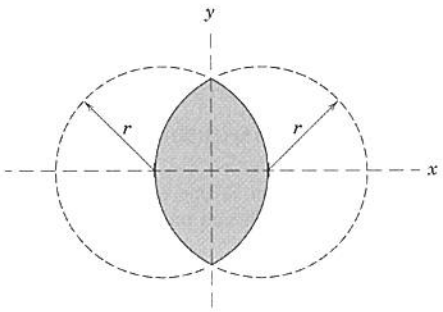
Resp. $k_x = k_y = \frac{\sqrt{5}}{4}a$, $k_z = \frac{\sqrt{10}}{4}a$



Problema A/33

►**A/34** Calcule o momento de inércia da área sombreada dos dois círculos, que se superpõe, em relação ao eixo x.

Resp. $I_x = 0{,}1988r^4$



Problema A/34

A/3 Áreas Compostas

É freqüentemente necessário calcular o momento de inércia de uma área composta de várias partes distintas, com formas geométricas simples e calculáveis. Como o momento de inércia é a integral ou o somatório dos produtos da distância ao quadrado vezes os elementos de área, tem-se que o momento de inércia de uma área positiva é sempre uma quantidade positiva. O momento de inércia de uma área composta em relação a um eixo específico é, portanto, simplesmente a soma dos momentos de inércia de suas partes componentes em relação ao mesmo eixo. É muitas vezes conveniente encarar uma área composta como formada por partes positivas e negativas. Podemos então tratar o momento de inércia de uma área negativa como uma quantidade negativa.

Quando uma área composta é formada de um grande número de partes, é conveniente tabular os resultados para cada uma das partes em termos da sua área A, do seu momento de inércia em relação ao centróide $\bar{I}$, da distância d entre o eixo do centróide e o eixo em relação ao qual o momento de inércia da seção inteira está sendo calculado, e do produto Ad^2. Para qualquer uma das partes, o momento de inércia em relação ao eixo desejado é, pelo teorema da transferência de eixo, $\bar{I} + Ad^2$. Assim, para a seção inteira, o momento de inércia desejado se torna $I = \Sigma\bar{I} + \Sigma Ad^2$.

Para uma área no plano x-y, por exemplo, e com a notação da Fig. A/4, onde $\bar{I}_x$ é igual a I_{x_0} e $\bar{I}_y$ é igual a I_{y_0}, a tabulação incluiria

Parte	Área, A	d_x	d_y	Ad_x^2	Ad_y^2	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$
Somatórios	ΣA			ΣAd_x^2	ΣAd_y^2	$\Sigma\bar{I}_x$	$\Sigma\bar{I}_y$

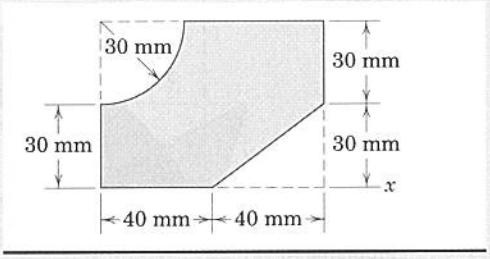
Das somas das quatro colunas, então, os momentos de inércia para a área composta em relação ao eixos x e y serão

$$I_x = \Sigma\bar{I}_x + \Sigma Ad_x^2$$
$$I_y = \Sigma\bar{I}_y + \Sigma Ad_y^2$$

Apesar de podermos somar os momentos de inércia das partes individuais de uma área composta em relação a um dado eixo, não podemos somar seus raios de giração. O raio de giração para a área composta em relação ao eixo em questão é dado por $k = \sqrt{I/A}$, onde I é o momento de inércia total e A é a área total da figura composta. Similarmente, o raio de giração k em relação a um eixo polar que passe por algum ponto é igual a $\sqrt{I_z/A}$ onde $I_z = I_x + I_y$ para eixos x-y que passem pelo ponto.

Exemplo A/7

Calcule o momento de inércia e o raio de giração em relação ao eixo x para a área sombreada mostrada.



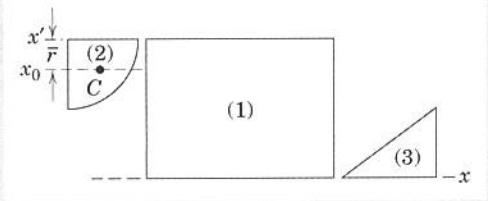
Solução. A área composta é formada pela área positiva do retângulo (1) e pelas áreas negativas do quarto de círculo (2) e do triângulo (3). Para o retângulo o momento de inércia em relação ao eixo x, a partir do Exemplo A/1 (ou da Tabela D/3), é

$$I_x = \tfrac{1}{3}Ah^2 = \tfrac{1}{3}(80)(60)(60)^2 = 5{,}76(10^6)\ \text{mm}^4$$

Do Exemplo A/3 (ou da Tabela D/3), o momento de inércia da área negativa do quarto de círculo em relação ao eixo de sua base x' é

$$I_{x'} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\pi r^4}{4}\right) = -\frac{\pi}{16}(30)^4 = -0{,}1590(10^6)\ \text{mm}^4$$

Agora transferimos esse resultado pela distância $\bar{r} = 4r/(3\pi) = 4(30)/(3\pi) = 12{,}73$mm, pelo teorema da transferência de eixo, para obter o momento de inércia do centróide da parte (2) (ou usamos a Tabela 3 diretamente).



① $[\bar{I} = I - Ad^2]$ $\quad \bar{I}_x = -0{,}1590(10^6) - \left[-\dfrac{\pi(30)^2}{4}(12{,}73)^2\right]$

$$= -0{,}0445(10^6)\ \text{mm}^4$$

O momento de inércia da parte do quarto de círculo em relação ao eixo x é agora

② $[I = \bar{I} + Ad^2]$ $\quad I_x = -0{,}0445(10^6) + \left[-\dfrac{\pi(30)^2}{4}\right](60 - 12{,}73)^2$

$$= -1{,}624(10^6)\ \text{mm}^4$$

Finalmente, o momento de inércia da área triangular negativa (3) em relação a sua base, do Exemplo A/2 (ou da Tabela D/3), é

$$I_x = -\frac{1}{12}bh^3 = -\frac{1}{12}(40)(30)^3 = -0{,}90(10^6)\ \text{mm}^4$$

O momento de inércia total em relação ao eixo x da área composta é, portanto,

③ $\quad I_x = 5{,}76(10^6) - 1{,}624(10^6) - 0{,}09(10^6) = 4{,}05(10^6)\ \text{mm}^4$ *Resp.*

A área resultante da figura é $A = 60(80) - \frac{1}{4}\pi(30)^2 - \frac{1}{2}(40)(30) = 3490\ \text{mm}^2$ de forma que o raio de giração em relação ao eixo x é

$$k_x = \sqrt{I_x/A} = \sqrt{4{,}05(10^6)/3490} = 34{,}0\ \text{mm}$$ *Resp.*

Sugestões Úteis

① Note que devemos transferir o momento de inércia da área do quarto de círculo para o eixo de seu centróide x_0 antes de podermos transferí-lo para o eixo x, como foi feito no Exemplo A/5.

② Aqui, prestamos grande atenção aos sinais. Como a área é negativa, tanto $\bar{I}$ quanto A têm sinais negativos.

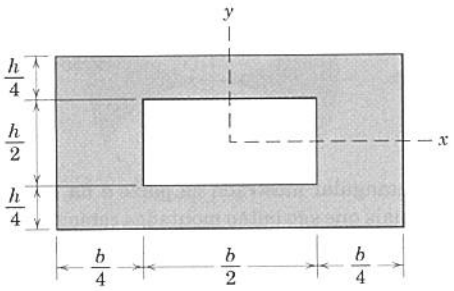
③ Se houvesse mais do que três partes na área composta, teríamos montado uma tabela dos termos $\bar{I}$ e Ad^2 de forma a manter uma contabilidade sistemática dos termos e obter $I = \Sigma\bar{I} + \Sigma Ad^2$.

PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

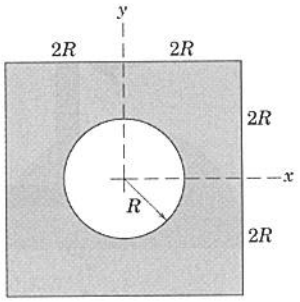
A/35 Determine a redução percentual n no momento de inércia polar da placa retangular devida à introdução do furo retangular. Os eixos x-y estão centrados na placa.

Resp. $n = 6{,}25\%$



Problema A/35

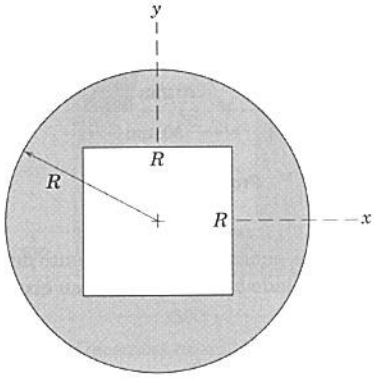
A/36 Determine o momento de inércia em relação ao eixo x da área quadrada sem e com o furo circular central.



Problema A/36

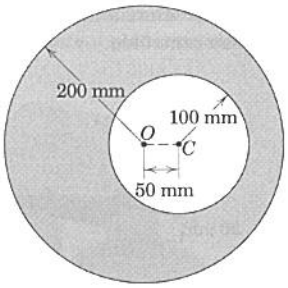
A/37 Determine o momento de inércia polar da área circular sem e com o furo quadrado central.

Resp. $I_z = 1{,}571R^4$, sem o furo
$I_z = 1{,}404R^4$, com o furo



Problema A/37

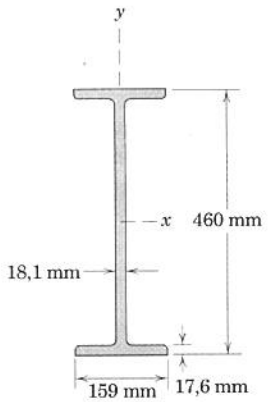
A/38 Calcule o raio de giração polar da área sombreada em relação ao centro O do círculo maior.



Problema A/38

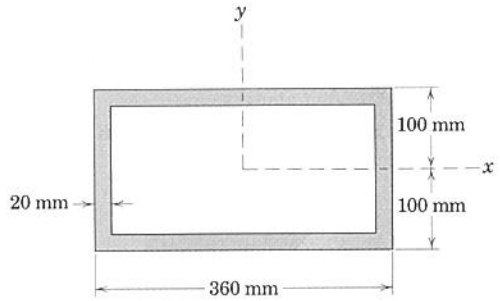
A/39 A área da seção transversal de uma viga de abas largas em I tem as dimensões mostradas. Obtenha uma boa aproximação para o valor tabelado de $\bar{I}_x = 385(10^6)$ mm^4, tratando a seção como composta por três retângulos.

Resp. $\bar{I}_x = 3{,}90(10^8)$ mm^4



Problema A/39

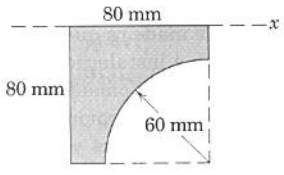
A/40 Determine de duas maneiras o momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x. A espessura da parede é de 20 mm nos quatro lados do retângulo.



Problema A/40

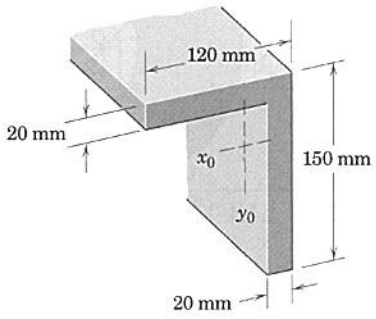
A/41 Calcule o momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x.

Resp. $I_x = 4{,}53(10^6)$ mm^4



Problema A/41

A/42 Calcule o momento de inércia da seção transversal da viga em relação ao eixo x_0 do seu centróide.



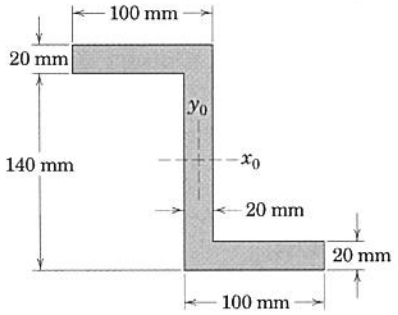
Problema A/42

Problemas Representativos

A/43 Determine os momentos de inércia da seção em Z em relação aos eixos x_0 e y_0 do seu centróide.

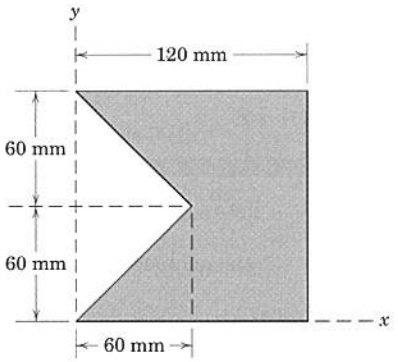
Resp. $\bar{I}_x = 22{,}6(10^6)$ mm^4

$\bar{I}_y = 9{,}81(10^6)$ mm^4



Problema A/43

A/44 Calcule os momentos de inércia retangular e polar da área sombreada em relação aos eixos mostrados.

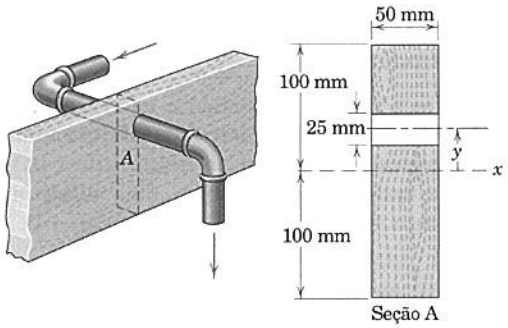


Problema A/44

A/45 Uma viga de madeira que mede 50 mm por 200 mm tem um furo de 25 mm para a instalação de um tubo de água. Determine a redução percentual n no momento de inércia da área da seção transversal em relação ao eixo x (comparado com o da viga sem furo) para posições do furo na faixa $0 \leq y \leq 87{,}5$ mm. Avalie sua expressão para $y = 50$ mm.

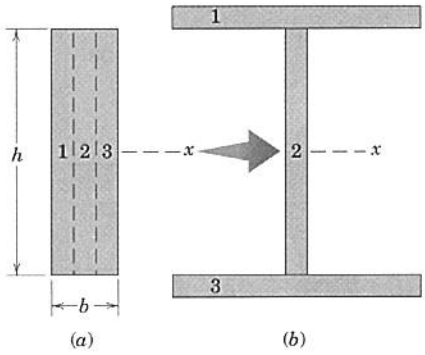
Resp. $n = 0{,}1953 + 0{,}00375y^2$

$n = 9{,}57\%$



Problema A/45

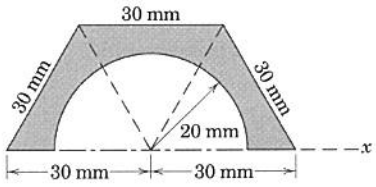
A/46 A área retangular mostrada na parte a da figura é dividida em três áreas iguais que são então montadas como mostrado na parte b da figura. Determine uma expressão para o momento de inércia da área na parte b em relação ao eixo x do centróide. Que aumento percentual n sobre o momento de inércia da área a haverá se $h = 200$ mm e $b = 60$ mm?



Problema A/46

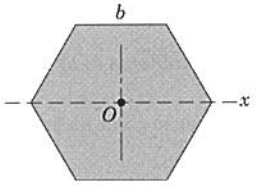
A/47 Calcule o momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x.

Resp. $I_x = 15{,}64(10^4)$ mm^4



Problema A/47

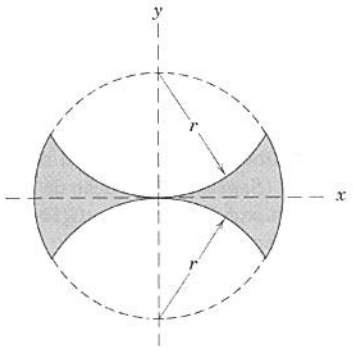
A/48 Desenvolva uma equação para o momento de inércia da área hexagonal regular com lado b, em relação a seu eixo central x.



Problema A/48

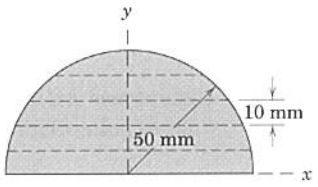
A/49 Utilize os resultados do Prob. A/34 e determine o momento de inércia I_y da área sombreada mostrada.

Resp. $I_y = 0{,}388r^4$



Problema A/49

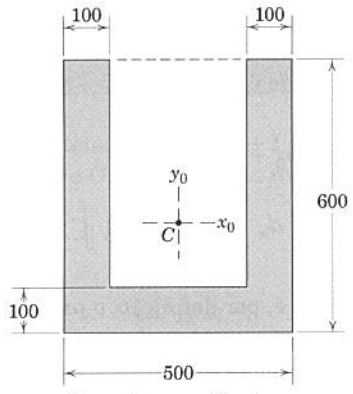
A/50 Obtenha uma aproximação para o momento de inércia da área semicircular em relação ao eixo x, dividindo-a em cinco faixas horizontais de espessura igual. Trate o momento de inércia de cada faixa como sua área (espessura vezes seu comprimento horizontal) vezes o quadrado da distância entre sua linha central e o eixo x. Compare seu resultado com o valor exato.



Problema A/50

A/51 Calcule o raio de giração polar da área sombreada em relação a seu centróide C.

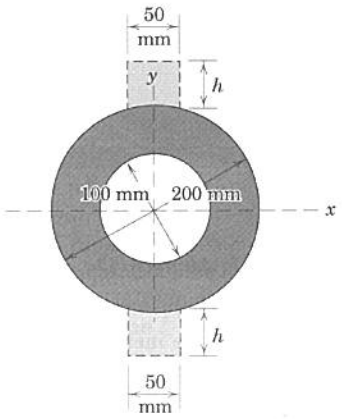
Resp. $k_C = 261$ mm



Dimensões em milímetros

Problema A/51

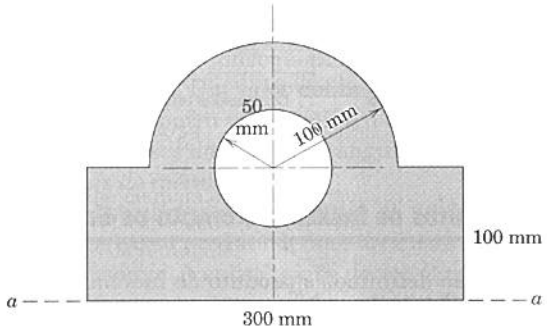
A/52 Um mastro oco com seção circular conforme mostrado, deve ser enrijecido colando duas faixas do mesmo material, de seção retangular, ao longo de todo o seu comprimento. Determine a dimensão apropriada h de cada quase-retângulo que dobrará, exatamente, a rigidez do mastro à flexão no plano y-z. (A rigidez no plano y-z é proporcional ao momento de inércia da área em relação ao eixo x.) Considere o contorno interno de cada faixa como uma linha reta.



Problema A/52

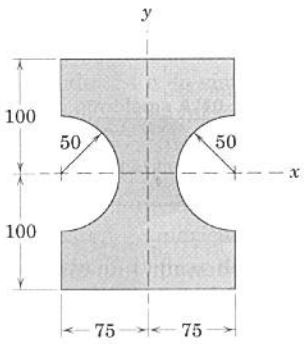
A/53 A seção transversal de um mancal é mostrada na figura por meio da área sombreada. Calcule o momento de inércia da seção em relação a sua base a-a.

Resp. $I_{a\text{-}a} = 346(10^6)$ mm^4



Problema A/53

A/54 Calcule os momentos de inércia da área sombreada em relação aos eixos x e y.



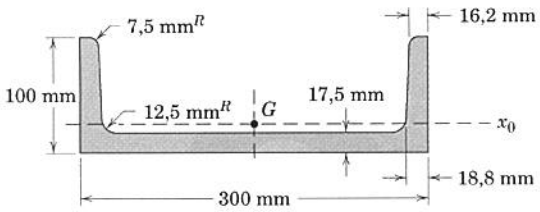
Dimensões em milímetros

Problema A/54

A/55 Calcule o momento de inércia da seção em canal com 300 × 100 mm em relação ao eixo do centróide x_0. Despreze os filetes e

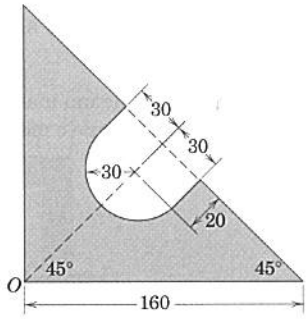
raios de adoçamento e compare com o valor tabelado de $\bar{I}_x = 6{,}25(10^6)$ mm^4.

Resp. $\bar{I}_x = 6{,}24(10^6)$ mm^4



Problema A/55

A/56 Determine o momento de inércia polar da área sombreada mostrada, em relação ao ponto *O*.



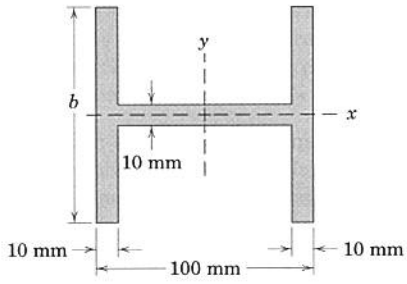
Problema A/56 Dimensões em milímetros

▶A/57 Para a viga de 50 mm por 200 mm com o furo circular do Prob. A/45, determine uma expressão para o percentual n pelo qual o momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo do centróide x' (paralelo a x) é reduzido em comparação ao momento de inércia da seção completa sem furo, em relação ao eixo x. Expresse n em termos de y para a faixa $0 \le y \le 87{,}5$ mm. Avalie sua expressão para $y = 50$ mm.

Resp. $n = 0{,}1953 + 0{,}00429y^2, n = 10{,}91\%$

▶A/58 Para a seção da viga em H, determine a largura da aba b que fará com que os momentos de inércia em relação aos eixos centrais x e y sejam iguais. (*Sugestão:* A solução de uma equação cúbica é requerida aqui. Refira-se à Seção C/4 ou C/11 do Apêndice C para a resolução de uma equação cúbica.)

Resp. $b = 161{,}1$ mm



Problema A/58

A/4 Produtos de Inércia e Rotação de Eixos

Nesta seção definimos o produto de inércia em relação a eixos retangulares e desenvolvemos o teorema dos eixos paralelos para eixos do centróide e fora do centróide. Além disso, discutimos os efeitos da rotação de eixos nos momentos e produtos de inércia.

Definição

Em certos problemas envolvendo seções transversais assimétricas e no cálculo de momentos de inércia em relação a eixos girados, a expressão $dI_{xy} = xy\,dA$ aparece, a qual tem a forma integral

$$I_{xy} = \int xy\,dA \qquad \textbf{(A/7)}$$

onde x e y são as coordenadas do elemento de área $dA = dx\,dy$. A quantidade I_{xy} é chamada *produto de inércia* da área A em relação aos eixos x-y. Diferentemente dos momentos de inércia, que são sempre positivos para áreas positivas, o produto de inércia pode ser positivo, negativo ou zero.

O produto de inércia é zero sempre que um dos eixos de referência for um eixo de simetria, tal como o eixo x para a área na Fig. A/5. Aqui, vemos que a soma dos termos $x(-y)\,dA$ e $x(+y)\,dA$ é zero devido aos elementos posicionados simetricamente. Como a área inteira pode ser considerada como composta de pares desses elementos, segue que o produto de inércia I_{xy} para a área inteira é zero.

Transferência de Eixos

Por definição, o produto de inércia da área A na Fig. A/4 em relação aos eixos x e y em termos das coordenadas x_0, y_0 dos eixos do centróide é

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int (x_0 + d_y)(y_0 + d_x)\,dA \\ &= \int x_0 y_0\,dA + d_x \int x_0\,dA + d_y \int y_0\,dA + d_x d_y \int dA \end{aligned}$$

A primeira integral é, por definição, o produto de inércia em relação aos eixos do centróide, que escrevemos como $\bar{I}_{xy}$. As duas integrais do meio são ambas zero porque o primeiro momento da área em relação ao seu próprio centróide é necessariamente zero. O quarto termo é simplesmente $d_x d_y A$. Assim, o teorema da transferência de eixos para produtos de inércia se torna

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A \qquad \textbf{(A/8)}$$

Rotação de Eixos

O produto de inércia é útil quando precisamos calcular o momento de inércia de uma área em relação a eixos inclinados. Essa consideração leva diretamente ao importante problema de determinar os eixos em relação aos quais o momento de inércia é máximo ou mínimo.

Na Fig. A/6 os momentos de inércia da área em relação aos eixos x' e y' são

$$I_{x'} = \int y'^2\,dA = \int (y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta)^2\,dA$$

$$I_{y'} = \int x'^2\,dA = \int (y\,\text{sen}\,\theta + x\cos\theta)^2\,dA$$

onde x' e y' foram substituídos por suas expressões equivalentes a partir da geometria da figura.

Expandindo e substituindo as identidades trigonométricas

$$\text{sen}^2\,\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

e as relações que definem I_x, I_y, I_{xy} obtemos

$$\boxed{\begin{aligned} I_{x'} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \\ I_{y'} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \end{aligned}} \qquad \textbf{(A/9)}$$

De maneira similar, escrevemos o produto de inércia em relação aos eixos inclinados como

$$I_{x'y'} = \int x'y'\,dA = \int (y\,\text{sen}\,\theta + x\cos\theta)(y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta)\,dA$$

Expandindo e substituindo as identidades trigonométricas

$$\text{sen}\,\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta \qquad \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = \cos 2\theta$$

e as relações que definem I_x, I_y, I_{xy} obtemos

$$\boxed{I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta} \qquad \textbf{(A/9}\boldsymbol{\alpha}\textbf{)}$$

Somando as Eqs. A/9 temos $I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = I_z$, o momento polar de inércia em relação a O, que verifica os resultados da Eq. A/3.

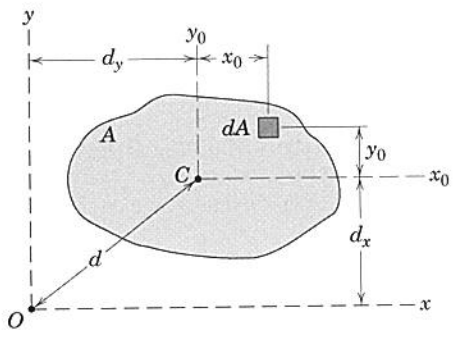


Figura A/4, Repetida

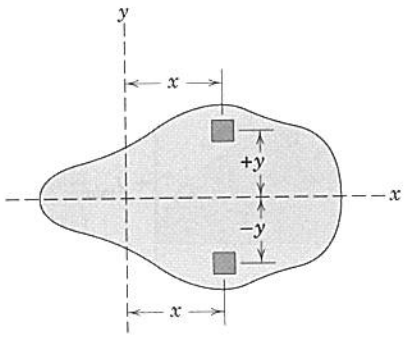


Figura A/5

O ângulo que faz com que $I_{x'}$ e $I_{y'}$ sejam ou um máximo ou um mínimo pode ser determinado igualando a zero a derivada de $I_{x'}$ ou $I_{y'}$ em relação a θ. Assim,

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = (I_y - I_x)\,\text{sen}\,2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Denominando esse ângulo crítico como α temos

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}} \qquad \textbf{(A/10)}$$

A Eq. A/10 dá dois valores para 2α que diferem de π, já que $\tan 2\alpha = \tan(2\alpha + \pi)$. Conseqüentemente as duas soluções para α diferem de $\pi/2$. Um valor define o eixo do momento de inércia máximo e o outro valor define o eixo do momento de inércia mínimo. Esses dois eixos retangulares são chamados *eixos principais de inércia*.

Quando substituímos o valor crítico de 2θ da Eq. A/10 na Eq. A/9α vemos que o produto de inércia é zero para os eixos principais de inércia. A substituição de sen 2α e cos 2α, obtidos da Eq. A/10, por sen 2θ e cos 2θ nas Eqs. A/9 dá as expressões para os momentos principais de inércia

$$\boxed{\begin{aligned} I_{\text{máx}} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \\ I_{\text{mín}} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \end{aligned}} \qquad \textbf{(A/11)}$$

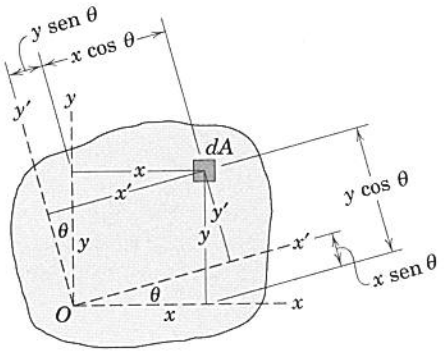


Figura A/6

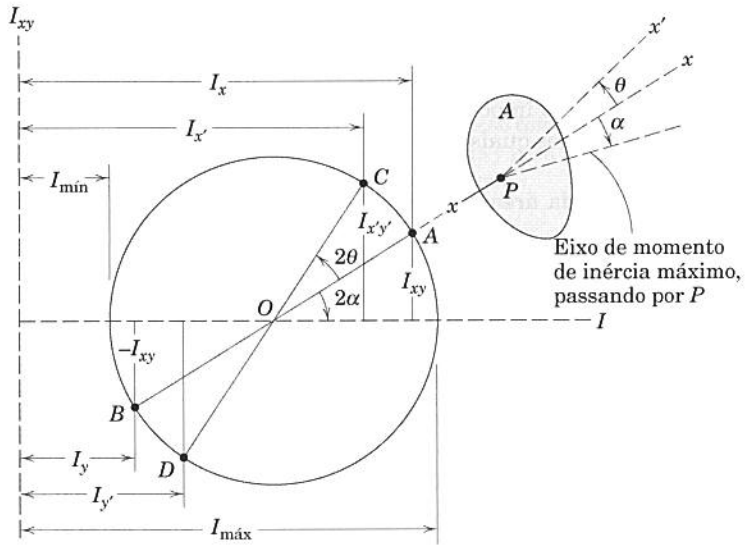


Figura A/7

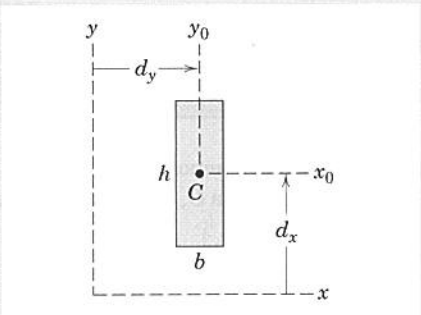
Círculo de Mohr de Inércia

Podemos representar graficamente as relações nas Eqs. A/9, A/9*a*, A/10 e A/11 por um diagrama denominado *círculo de Mohr*. Para valores dados de I_x, I_y e I_{xy}, os valores correspondentes de $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ podem ser determinados a partir do diagrama para qualquer ângulo θ desejado. Um eixo horizontal para a medida de momentos de inércia e um eixo vertical para a medida de produtos de inércia são selecionados inicialmente, Fig. A/7. Em seguida, o ponto A, que tem coordenadas (I_x, I_{xy}), e o ponto B, que tem coordenadas $(I_y, -I_{xy})$, são localizados.

Desenhamos, agora, um círculo com esses dois pontos como extremidades de um diâmetro. O ângulo entre o raio OA e o eixo horizontal é 2α, ou duas vezes o ângulo entre o eixo x da área em questão e o eixo de máximo momento de inércia. O ângulo no diagrama e o ângulo sobre a área são ambos medidos no mesmo sentido, como mostrado. As coordenadas de qualquer ponto C são $(I_{x'}, I_{x'y'})$ e as do ponto correspondente D são $(I_{y'}, -I_{x'y'})$. Além disso, o ângulo entre OA e OC é 2θ ou duas vezes o ângulo entre o eixo x e o eixo x'. Novamente, medimos os dois ângulos no mesmo sentido, como mostrado. Podemos verificar a partir da trigonometria do círculo que as Eqs. A/9, A/9*a* e A/10 estão de acordo com as afirmativas feitas.

Exemplo A/8

Determine o produto de inércia da área retangular com centróide em C, em relação aos eixos x-y paralelos a seus lados.



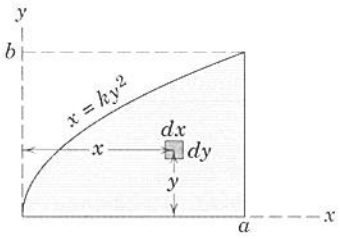
Solução. Como o produto de inércia $\bar{I}_{xy}$ em relação ao eixos x_0-y_0 vale zero por simetria, o teorema da transferência de eixos nos dá

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \qquad I_{xy} = d_x d_y bh \qquad \textit{Resp.}$$

Neste exemplo, tanto d_x quanto d_y são mostrados como positivos. Devemos ter cuidado para sermos consistentes com as direções positivas de d_x e d_y, como definidas, de forma a mantermos seus sinais corretos.

Exemplo A/9

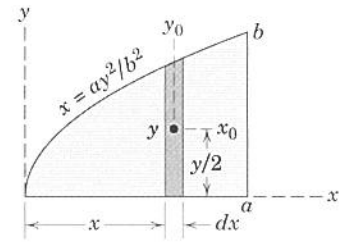
Determine o produto de inércia em relação aos eixos x-y para a área sob a parábola.



Solução. Com a substituição de $x = a$ quando $y = b$, a equação da curva se torna $x = ay^2/b^2$.

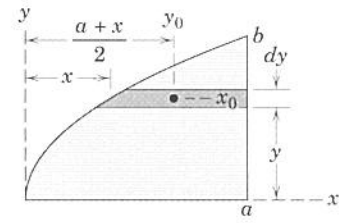
Solução I. Se começamos com o elemento de segunda ordem $dA = dx\,dy$, temos $dI_{xy} = xy\,dx\,dy$. A integral em relação a toda a área é

$$I_{xy} = \int_0^b \int_{ay^2/b^2}^a xy\,dx\,dy = \int_0^b \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{a^2y^4}{b^4}\right) y\,dy = \tfrac{1}{6}a^2b^2 \qquad \textit{Resp.}$$



Solução II. Alternativamente, podemos começar com uma faixa elementar de primeira ordem e economizar uma integração usando os resultados do Exemplo A/8. Pegando
① uma faixa vertical $dA = y\,dx$ obtemos $dI_{xy} = 0 + (\frac{1}{2}y)(x)(y\,dx)$, onde as distâncias aos eixos do centróide do retângulo elementar são $d_x = y/2$ e $d_y = x$. Agora temos

$$I_{xy} = \int_0^a \frac{y^2}{2} x\,dx = \int_0^a \frac{xb^2}{2a} x\,dx = \frac{b^2}{6a} x^3 \Big|_0^a = \tfrac{1}{6}a^2b^2 \qquad \textit{Resp.}$$

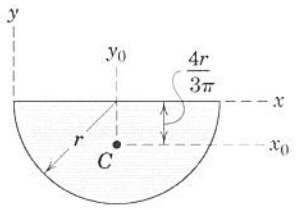


Sugestão Útil

① Se tivéssemos escolhido uma faixa horizontal, nossa expressão teria sido $dI_{xy} = y\frac{1}{2}(a + x)[(a - x)\,dy]$ que, quando integrada, evidentemente, nos dá o mesmo resultado anterior.

Exemplo A/10

Determine o produto de inércia da área semicircular em relação aos eixos x-y.



① ***Solução.*** Utilizamos o teorema da transferência de eixos, Eq. A/8, para escrever

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \qquad I_{xy} = 0 + \left(-\frac{4r}{3\pi}\right)(r)\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = -\frac{2r^4}{3} \qquad \textit{Resp.}$$

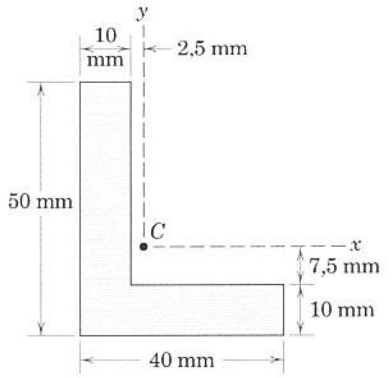
onde as coordenadas x e y do centróide C são $d_y = +r$ e $d_x = -4r/(3\pi)$. Já que y_0 é um eixo de simetria, $\bar{I}_{xy} = 0$.

Sugestão Útil

① O uso apropriado do teorema da transferência de eixos economiza muito trabalho no cálculo de produtos de inércia.

Exemplo A/11

Determine as orientações dos eixos principais de inércia passando pelo centróide da seção em L e determine os momentos de inércia máximo e mínimo correspondentes.



Solução. A posição do centróide é facilmente calculada e está mostrada no diagrama.

Produtos de inércia. O produto de inércia para cada retângulo em relação aos eixos do centróide paralelos aos eixos x-y é zero por simetria. Assim, o produto de inércia em relação aos eixos x-y para a parte I é

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \qquad I_{xy} = 0 + (-12{,}5)(+7{,}5)(400) = -3{,}75(10^4)\ \text{mm}^4$$

onde $d_x = -(7{,}5 + 5) = -12{,}5$ mm

e $d_y = +(20 - 10 - 2{,}5) = 7{,}5$ mm

Da mesma forma para a parte II,

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \qquad I_{xy} = 0 + (12{,}5)(-7{,}5)(400) = -3{,}75(10^4)\ \text{mm}^4$$

onde $d_x = +(20 - 7{,}5) = 12{,}5$ mm, $\quad d_y = -(5 + 2{,}5) = -7{,}5$ mm

Para o L completo

$$I_{xy} = -3{,}75(10^4) - 3{,}75(10^4) = -7{,}50(10^4)\ \text{mm}^4$$

Momentos de inércia. Os momentos de inércia em relação aos eixos x e y para a parte I são

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_x = \tfrac{1}{12}(40)(10)^3 + (400)(12{,}5)^2 = 6{,}58(10^4)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \tfrac{1}{12}(10)(40)^3 + (400)(7{,}5)^2 = 7{,}58(10^4)\ \text{mm}^4$$

e os momentos de inércia para a parte II em relação aos mesmos eixos são

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \qquad I_x = \tfrac{1}{12}(10)(40)^3 + (400)(12{,}5)^2 = 11{,}58(10^4)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \tfrac{1}{12}(40)(10)^3 + (400)(7{,}5)^2 = 2{,}58(10^4)\ \text{mm}^4$$

Assim, para a seção completa temos

$$I_x = 6{,}58(10)^4 + 11{,}58(10)^4 = 18{,}17(10^4)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = 7{,}58(10^4) + 2{,}58(10^4) = 10{,}17(10^4)\ \text{mm}^4$$

Eixos principais. A inclinação dos eixos principais de inércia é dada pela Eq. A/10, de forma que temos

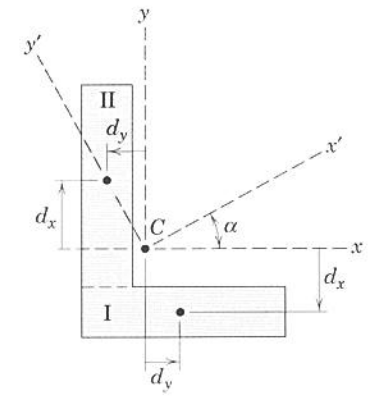
$$\left[\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right] \qquad \tan 2\alpha = \frac{2(-7{,}50)}{10{,}17 - 18{,}17} = 1{,}875$$

$$2\alpha = 61{,}9° \qquad \alpha = 31{,}0° \qquad \textit{Resp.}$$

Calculamos agora os momentos principais de inércia a partir das Eqs. A/9 usando α no lugar de θ e obtemos $I_{máx}$ de $I_{x'}$ e $I_{mín}$ de $I_{y'}$. Assim,

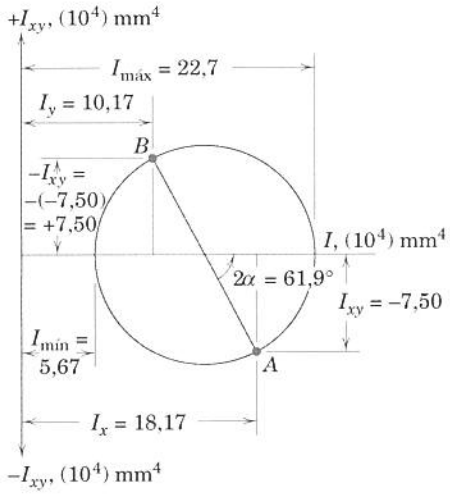
$$I_{máx} = \left[\frac{18{,}17 + 10{,}17}{2} + \frac{18{,}17 - 10{,}17}{2}(0{,}471) + (7{,}50)(0{,}882)\right](10^4)$$
$$= 22{,}7(10^4)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

$$I_{mín} = \left[\frac{18{,}17 + 10{,}17}{2} - \frac{18{,}17 - 10{,}17}{2}(0{,}471) - (7{,}50)(0{,}882)\right](10^4)$$
$$= 5{,}67(10^4)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$



Sugestão Útil

Círculo de Mohr. Alternativamente poderíamos usar as Eqs. A/11 para obter os resultados para $I_{máx}$ e $I_{mín}$, ou poderíamos construir o círculo de Mohr a partir dos valores calculados de I_x, I_y e I_{xy}. Esses valores estão marcados no diagrama para localizar os pontos A e B, que são as extremidades do diâmetro do círculo. O ângulo 2α, $I_{máx}$ e $I_{mín}$ são obtidos da figura, como mostrado.

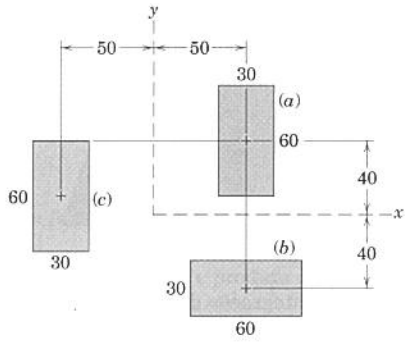


PROBLEMAS

Problemas Introdutórios

A/59 Determine o produto de inércia de cada uma das três áreas retangulares em relação aos eixos x-y.

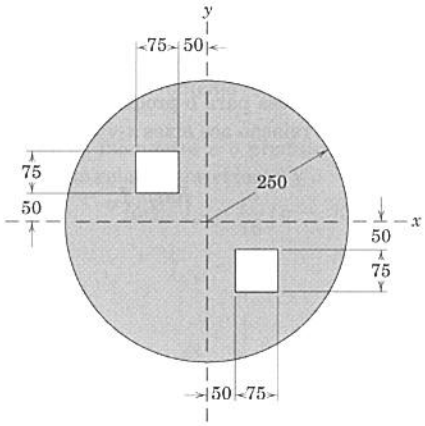
Resp. (*a*) $I_{xy} = 360(10^4)$ mm^4, (*b*) $I_{xy} = -360(10^4)$ mm^4
(*c*) $I_{xy} = -90(10^4)$ mm^4



Dimensões em milímetros

Problema A/59

A/60 Determine o produto de inércia em relação aos eixos x-y da área circular com dois furos quadrados iguais.

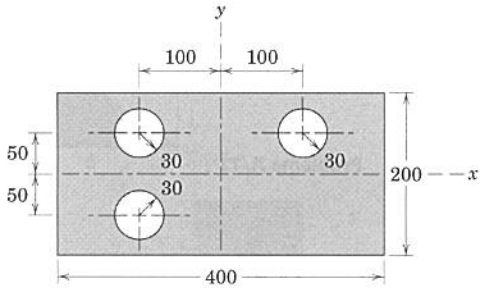


Dimensões em milímetros

Problema A/60

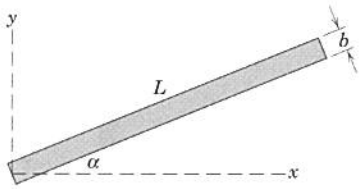
A/61 Determine I_x, I_y e I_{xy} para a placa retangular com três furos circulares iguais.

Resp. $I_x = 2{,}44(10^8)$ mm^4, $I_y = 9{,}80(10^8)$ mm^4
$I_{xy} = -14{,}14(10^6)$ mm^4



Problema A/61 Dimensões em milímetros

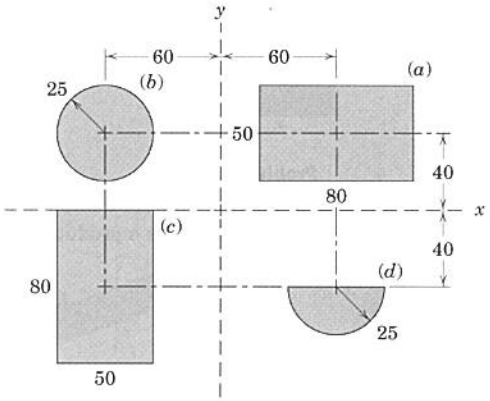
A/62 Determine o produto de inércia da área retangular em relação aos eixos x-y. Trate o caso em que b é pequeno comparado com L.



Problema A/62

A/63 Determine o produto de inércia de cada uma das quatro áreas em relação aos eixos x-y.

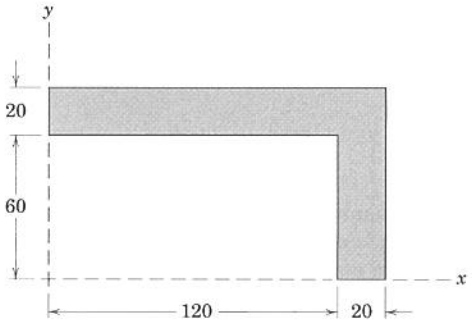
Resp. (*a*) e (c) $I_{xy} = 9{,}60(10^6)$ mm^4,
(*b*) $I_{xy} = -4{,}71(10^6)$ mm^4,
(*d*) $I_{xy} = -2{,}98(10^6)$ mm^4



Dimensões em milímetros

Problema A/63

A/64 Determine o produto de inércia da área sombreada em relação aos eixos x-y.



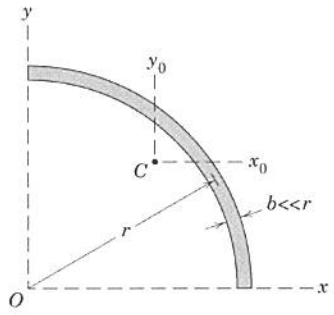
Dimensões em milímetros

Problema A/64

A/65 Determine os produtos de inércia da área do anel de quarto de círculo em relação aos eixos x-y e aos eixos x_0-y_0 que passam pelo centróide C do anel. Trate o caso em que b é pequeno comparado com r.

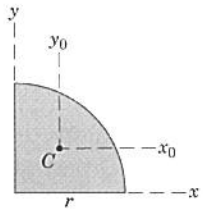
Resp. $I_{xy} = \frac{1}{2}r^3b$

$$I_{x_0y_0} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right)r^3b$$



Problema A/65

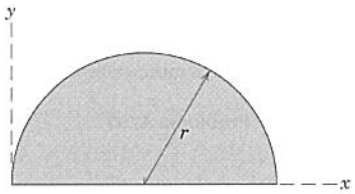
A/66 Obtenha o produto de inércia da área de quarto de círculo em relação aos eixos x-y e use o resultado para obter o produto de inércia em relação aos eixos paralelos do centróide.



Problema A/66

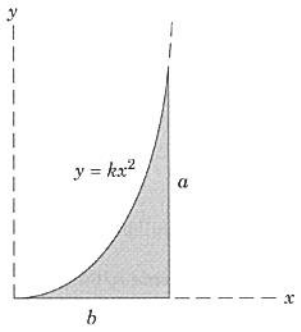
A/67 Calcule de duas maneiras diferentes o produto de inércia da área semicircular em relação aos eixos x-y.

Resp. $I_{xy} = \frac{2}{3}r^4$



Problema A/67

A/68 Determine o produto de inércia da área sombreada em relação aos eixos x-y.

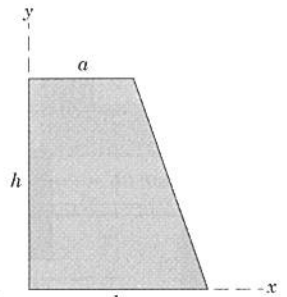


Problema A/68

Problemas Representativos

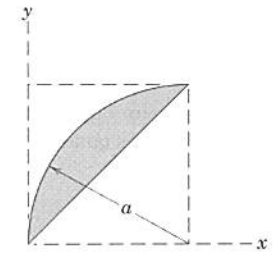
A/69 Determine o produto de inércia da área trapezoidal em relação aos eixos x-y.

Resp. $I_{xy} = \frac{h^2}{24}(3a^2 + 2ab + b^2)$



Problema A/69

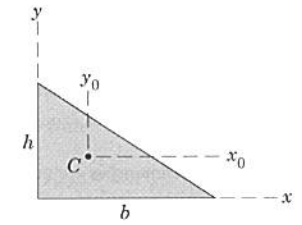
A/70 Determine, por integração direta, o produto de inércia I_{xy} da área sombreada mostrada. Indique um enfoque alternativo.



Problema A/70

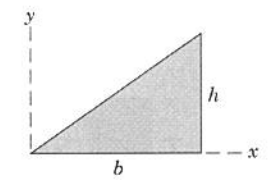
A/71 Deduza as expressões para o produto de inércia da área do triângulo retângulo em relação aos eixos x-y e em relação aos eixos x_0-y_0 do centróide.

Resp. $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$, $I_{x_0y_0} = -\frac{b^2h^2}{72}$



Problema A/71

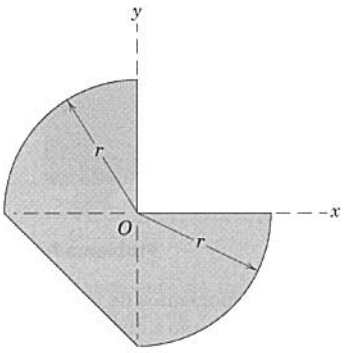
A/72 Deduza a expressão para o produto de inércia da área do triângulo retângulo em relação aos eixos x-y. Resolva, primeiro, por integração dupla e, em seguida, por integração simples começando com uma faixa vertical como elemento.



Problema A/72

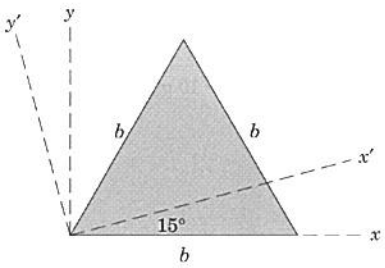
A/73 Indique, por inspeção, o eixo de máximo momento de inércia passando por O. Determine $I_{máx}$.

Resp. $I_{máx} = 0{,}684r^4$



Problema A/73

A/74 Determine os momentos e produto de inércia da área do triângulo equilátero em relação aos eixos x'-y'.

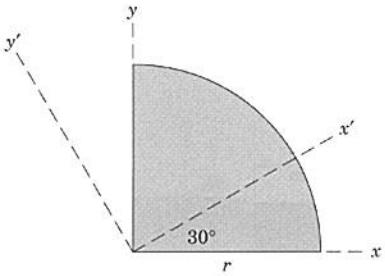


Problema A/74

A/75 Determine os momentos e o produto de inércia da área de quarto de círculo, em relação aos eixos x'-y'.

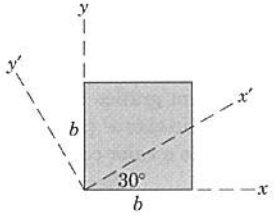
$$Resp.\ I_{x'} = \frac{r^4}{16}(\pi - \sqrt{3}),\ I_{y'} = \frac{r^4}{16}(\pi + \sqrt{3})$$

$$I_{x'y'} = \frac{r^4}{16}$$



Problema A/75

A/76 Determine os momentos e o produto de inércia da área do quadrado em relação aos eixos x'-y'.



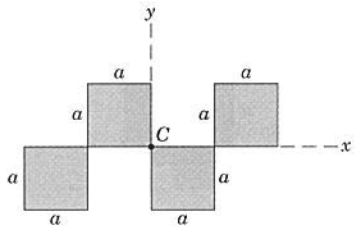
Problema A/76

A/77 Determine os momentos de inércia máximo e mínimo em relação aos eixos do centróide passando por C, para a área composta pelos quatro quadrados mostrados. Encontre o ângulo α, entre o eixo x e o eixo de máximo momento de inércia.

Resp. $I_{máx} = 5{,}57a^4$

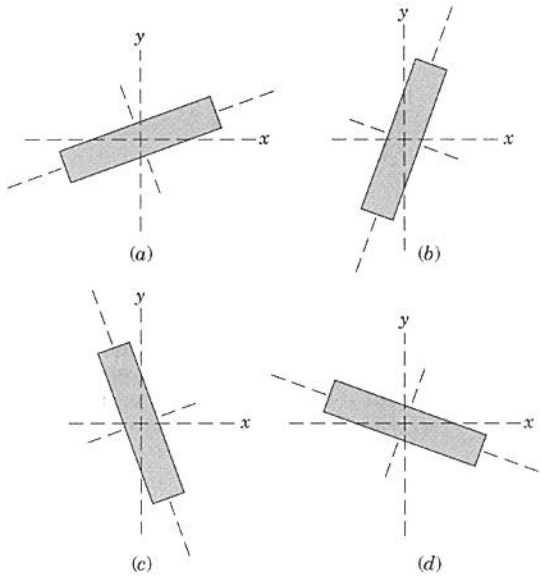
$I_{mín} = 1{,}097a^4$

$\alpha = 103{,}3°$



Problema A/77

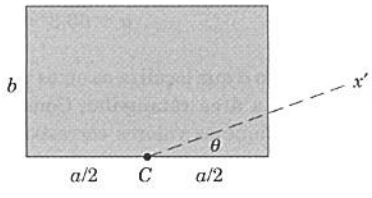
A/78 Esboce o círculo de Mohr de inércia para cada uma das quatro áreas retangulares com as proporções e posições mostradas. Indique em cada diagrama o ponto A que tem coordenadas (I_x, I_{xy}) e o ângulo 2α, onde α é o ângulo do eixo x ao eixo do momento de inércia máximo.



Problema A/78

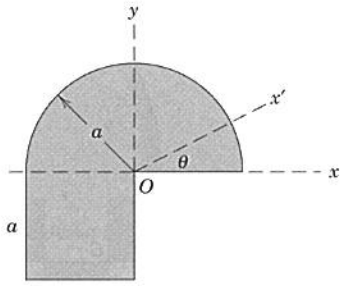
A/79 Determine as proporções da área retangular para as quais o momento de inércia em relação a um eixo x' passando pelo ponto central C da base, tem um valor constante independentemente de θ.

Resp. $a = 2b$



Problema A/79

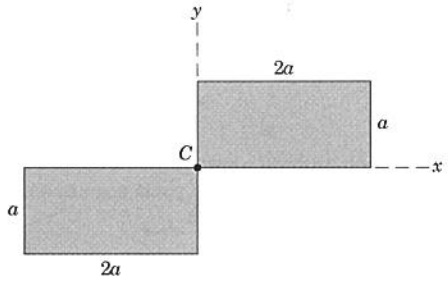
A/80 Determine os momentos de inércia máximo e mínimo da área sombreada em relação a eixos passando pelo ponto O e identifique o ângulo θ até o eixo de mínimo momento de inércia.



Problema A/80

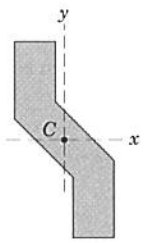
A/81 Determine os momentos de inércia máximo e mínimo em relação aos eixos do centróide passando por C para a área composta pelos dois retângulos mostrados. Encontre o ângulo α entre o eixo x e o eixo de máximo momento de inércia.

Resp. $I_{mín} = 0{,}505a^4$
$I_{máx} = 6{,}16a^4$; $\alpha = 112{,}5°$



Problema A/81

A/82 Os momentos de inércia máximo e mínimo da área sombreada são $12(10^6)$ mm^4 e $2(10^6)$ mm^4, respectivamente, em relação a eixos passando pelo centróide C, e o produto de inércia em relação aos eixos x-y tem módulo de $4(10^6)$ mm^4. Use o sinal apropriado para o produto de inércia e calcule I_x e o ângulo α medido no sentido anti-horário a partir do eixo x até o eixo de momento de inércia máximo.

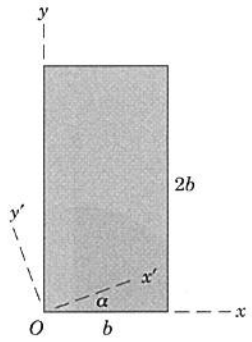


Problema A/82

A/83 Os momentos e produto de inércia de uma área em relação aos eixos x-y são $I_x = 7$ m^4, $I_y = 12$ m^4 e $I_{xy} = 6$ m^4. Construa o círculo de Mohr de inércia e utilize-o para determinar os momentos de inércia principais e o ângulo α do eixo x até o eixo de momento de inércia máximo.

Resp. $I_{máx} = 16$ m^4, $I_{mín} = 3$ m^4
$\alpha = 56{,}3°$ no sentido horário

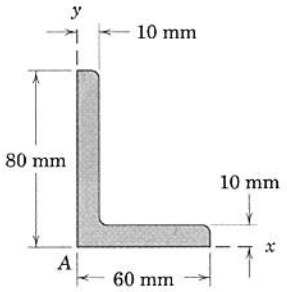
A/84 Determine o ângulo α que localiza os eixos principais de inércia passando por O para a área retangular. Construa o círculo de Mohr de inércia e especifique os valores correspondentes de $I_{máx}$ e $I_{mín}$.



Problema A/84

A/85 Calcule os momentos de inércia máximo e mínimo do esquadro estrutural em relação a eixos que passam pelo vértice A e encontre o ângulo α medido no sentido anti-horário a partir do eixo x até o eixo de momento de inércia máximo. Despreze os pequenos raios e o filete.

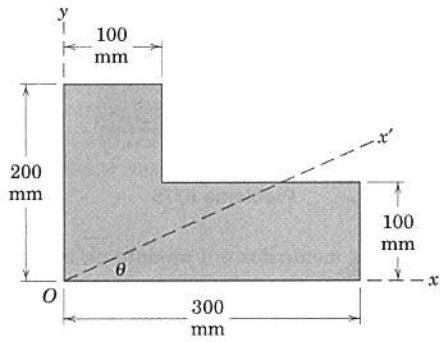
Resp. $I_{máx} = 1{,}782(10^6)$ mm^4; $I_{mín} = 0{,}684(10^6)$ mm^4
$\alpha = -13{,}40°$



Problema A/85

*Problemas para Resolução com Auxílio do Computador**

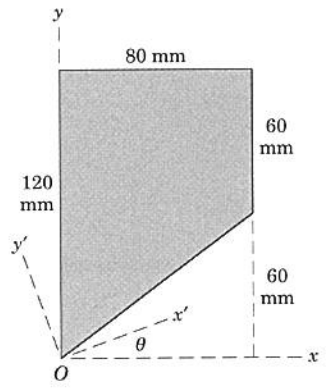
***A/86** Construa um gráfico do momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x' em função de θ, desde $\theta = 0$ até $\theta = 90°$ e determine o valor mínimo de $I_{x'}$ e o valor correspondente de θ.



Problema A/86

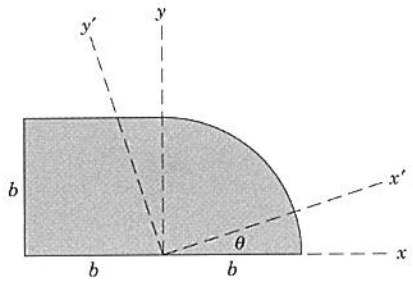
***A/87** Construa um gráfico do momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x' para a faixa $0 \leq \theta \leq 90°$. Determine o valor mínimo de $I_{x'}$ e o valor correspondente de θ.

Resp. $I_{mín} = 3{,}03(10^6)$ mm^4 para $\theta = 64{,}1°$



Problema A/87

***A/88** Construa um gráfico do momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x' em função de θ, desde $\theta = 0$ até $\theta = 180°$. Determine os valores máximo e mínimo de $I_{x'}$ e os valores correspondentes de θ a partir do gráfico. Verifique seus resultados aplicando as Eqs. A/10 e A/11.

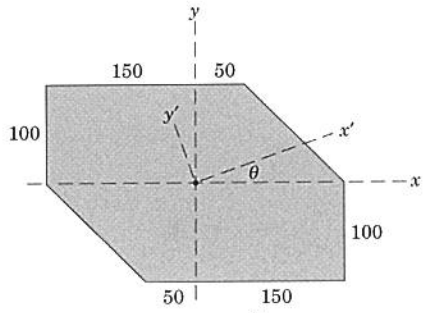


Problema A/88

***A/89** A figura mostra a seção transversal de uma coluna estrutural de concreto. Determine o produto de inércia $I_{x'y'}$ da área da seção em relação aos eixos x'-y' e construa seu gráfico em função de θ, de $\theta = 0$ até $\theta = \pi/2$. Determine o ângulo θ para o qual $I_{x'y'} = 0$. Essa informação é crítica no projeto da coluna para determinar o plano no qual a coluna tem resistência à flexão mínima. Utilize os resultados do Prob. A/71.

Resp. $I_{x'y'} = (-0{,}792 \operatorname{sen} 2\theta - 0{,}75 \cos 2\theta)(10^8)\ \text{mm}^4$

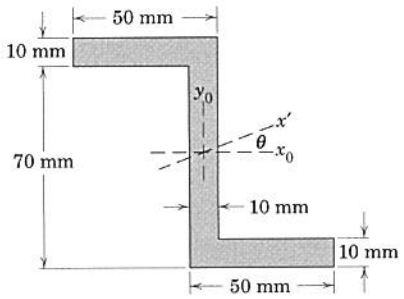
$I_{x'y'} = 0$ em $\theta = 68{,}3°$



Dimensões em milímetros

Problema A/89

***A/90** Construa um gráfico do momento de inércia da área da seção em Z em relação ao eixo x' em função de θ, de $\theta = 0$ a $\theta = 90°$. Determine o valor máximo de $I_{x'}$ e o valor correspondente de θ a partir do gráfico e então verifique esses resultados usando as Eqs. A/10 e A/11.

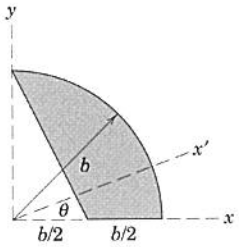


Problema A/90

***A/91** Construa um gráfico do momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x' em função de θ, de $\theta = 0$ a $\theta = 180°$. Determine os valores máximo e mínimo de $I_{x'}$ e os valores correspondentes de θ.

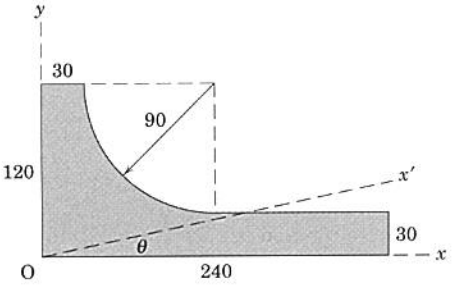
Resp. $I_{\text{máx}} = 0{,}286b^4$ em $\theta = 131{,}1°$

$I_{\text{mín}} = 0{,}0547b^4$ em $\theta = 41{,}1°$



Problema A/91

***A/92** Determine o momento de inércia da área sombreada em relação ao eixo x' que passa por O em termos de θ e construa um gráfico do resultado para a faixa $\theta = 0$ a $\theta = 180°$. Encontre os valores máximo e mínimo e os ângulos θ correspondentes.



Dimensões em milímetros

Problema A/92

B

Momentos de Inércia de Massa

Veja o Apêndice B do *Vol. 2 Dinâmica*, que trata a fundo o conceito e os cálculos de momentos de inércia de massa. Como esse conceito é um elemento importante no estudo da dinâmica de corpos rígidos e não em estática, apresentamos apenas uma definição breve nesse volume de *Estática*, de modo que o estudante possa apreciar as diferenças básicas entre os momentos de inércia de área e de massa.

Considere um corpo tridimensional de massa m, como mostrado na Fig. B/1. O momento de inércia de massa I em relação ao eixo O-O é definido como

$$I = \int r^2 \, dm$$

onde r é a distância perpendicular do elemento de massa dm desde o eixo O-O e onde a integração é feita em relação a todo o corpo. Para um dado corpo rígido, o momento de inércia de massa é uma medida da distribuição de sua massa relativamente ao eixo em questão e, para esse eixo, é uma propriedade constante do corpo. Observe que as dimensões são (massa)(comprimento)^2, que são kg·m^2 em unidades SI. Compare essas dimensões com aquelas do momento de inércia de área, que são (comprimento)^4, m^4 em unidades SI.

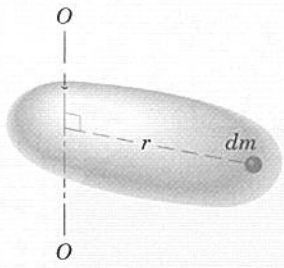


Figura B/1

C Tópicos Selecionados em Matemática

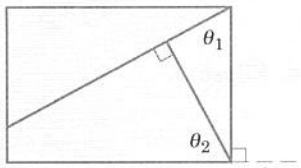
C/1 Introdução

O Apêndice C contém um resumo e uma recordação de tópicos selecionados em matemática básica, que freqüentemente encontram uso em mecânica. As relações estão citadas sem prova. O estudante de mecânica terá diversas oportunidades para usar muitas dessas relações e poderá ser prejudicado se elas não estiverem à mão. Outros tópicos que não estão listados também serão necessários de vez em quando.

Conforme o leitor recorda e aplica a matemática, deve ter em mente que a mecânica é uma ciência aplicada que descreve corpos e movimentos reais. Desse modo, a interpretação geométrica e física dos conceitos matemáticos aplicáveis deve ser claramente mantida em mente durante o desenvolvimento da teoria e da formulação e solução de problemas.

C/2 Geometria Plana

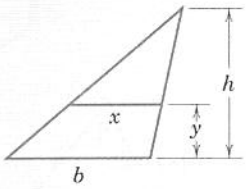
1. Quando duas linhas que se interceptam são, respectivamente, perpendiculares a duas outras linhas, os ângulos formados pelos dois pares são iguais.



$\theta_1 = \theta_2$

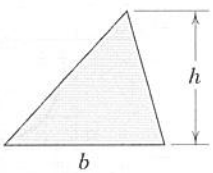
2. Triângulos semelhantes

$$\frac{x}{b} = \frac{h - y}{h}$$



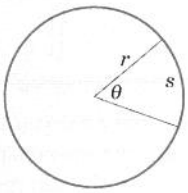
3. Para qualquer triângulo

Área $= \frac{1}{2}bh$

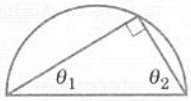


4. Círculo

Circunferência $= 2\pi r$
Área $= \pi r^2$
Comprimento de arco $s = r\theta$
Área de um setor $= \frac{1}{2}r^2\theta$



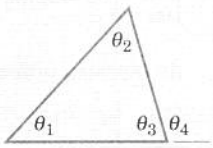
5. Todo triângulo inscrito em um semicírculo é um triângulo retângulo.



$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$

6. Ângulos de um triângulo

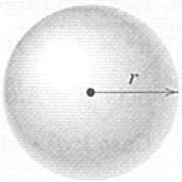
$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180°$
$\theta_4 = \theta_1 + \theta_2$



C/3 Geometria Sólida

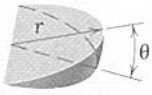
1. Esfera

Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$
Área superficial $= 4\pi r^2$



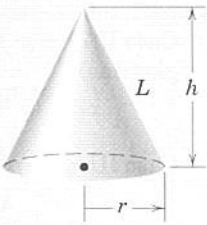
2. Cunha esférica

Volume $= \frac{2}{3}r^3\theta$



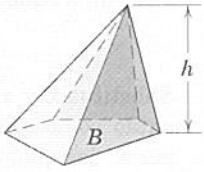
3. Cone circular

Volume $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Área lateral $= \pi r L$
$L = \sqrt{r^2 + h^2}$



4. Qualquer pirâmide ou cone

Volume $= \frac{1}{3}Bh$
onde B = área da base



C/4 Álgebra

1. Equação quadrática

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad b^2 \geq 4ac \text{ para raízes reais}$$

2. Logaritmos

$b^x = y, x = \log_b y$

Logaritmos naturais

$b = e = 2{,}718\,282$

$e^x = y, x = \log_e y = \ln y$

$\log(ab) = \log a + \log b$
$\log(a/b) = \log a - \log b$
$\log(1/n) = -\log n$
$\log a^n = n \log a$
$\log 1 = 0$
$\log_{10} x = 0{,}4343 \ln x$

3. Determinantes
de segunda ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

de terceira ordem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

4. Equação cúbica

$x^3 = Ax + B$

Seja $p = A/3, q = B/2$.

Caso I: $q^2 - p^3$ é negativo (três raízes reais e diferentes)

$$\cos u = q/(p\sqrt{p}),\ 0 < u < 180°$$
$$x_1 = 2\sqrt{p}\cos(u/3)$$
$$x_2 = 2\sqrt{p}\cos(u/3 + 120°)$$
$$x_3 = 2\sqrt{p}\cos(u/3 + 240°)$$

Caso II: $q^2 - p^3$ é positivo (uma raiz real, duas raízes imaginárias)

$$x_1 = (q + \sqrt{q^2 - p^3})^{1/3} + (q - \sqrt{q^2 - p^3})^{1/3}$$

Caso III: $q^2 - p^3 = 0$ (três raízes reais sendo duas iguais)

$$x_1 = 2q^{1/3}, x_2 = x_3 = -q^{1/3}$$

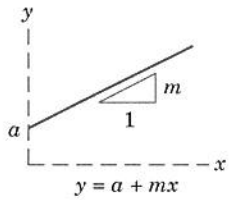
Para uma equação cúbica geral

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

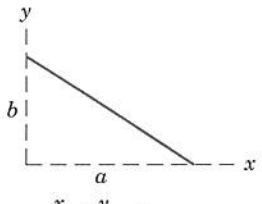
Substitua $x = x_0 - a/3$ e obtenha $x_0^3 = Ax_0 + B$. Prossiga então como anteriormente e determine valores de x_0 a partir dos quais $x = x_0 - a/3$.

C/5 Geometria Analítica

1. Linha reta

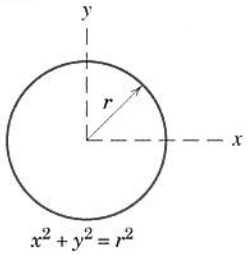


$y = a + mx$

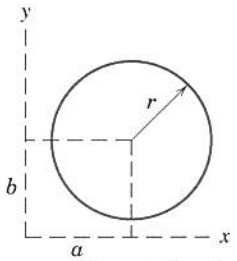


$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2. Círculo

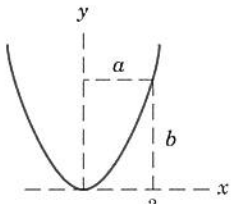


$x^2 + y^2 = r^2$

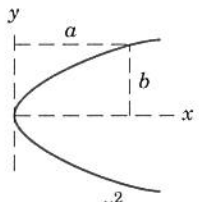


$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

3. Parábola

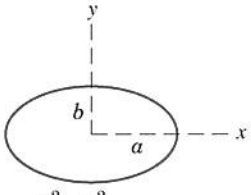


$y = b\frac{x^2}{a^2}$



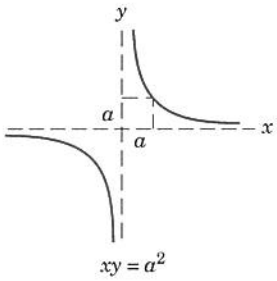
$x = a\frac{y^2}{b^2}$

4. Elipse

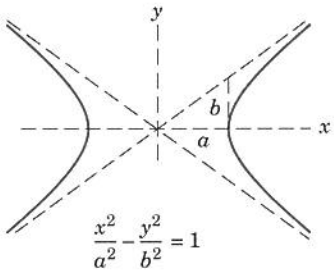


$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

5. Hipérbole



$xy = a^2$

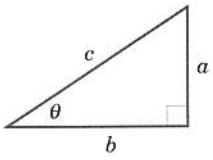


$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

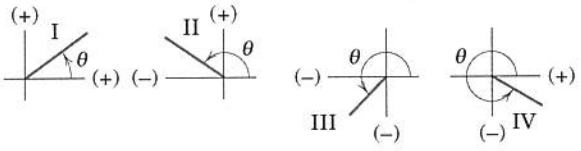
C/6 Trigonometria

1. Definições

$\operatorname{sen}\theta = a/c \quad \csc\theta = c/a$
$\cos\theta = b/c \quad \sec\theta = c/b$
$\tan\theta = a/b \quad \cot\theta = b/a$



2. Sinais nos quatro quadrantes



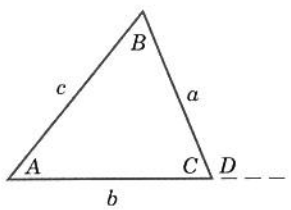
	I	II	III	IV
sen θ	+	+	−	−
cos θ	+	−	−	+
tan θ	+	−	+	−
csc θ	+	+	−	−
sec θ	+	−	−	+
cot θ	+	−	+	−

3. Relações diversas

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\theta)}$
$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)}$
$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$
$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

4. Lei dos senos

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$



5. Lei dos cossenos

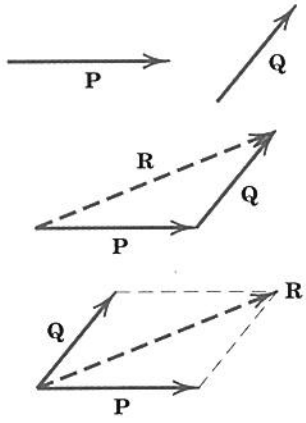
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos D$

C/7 Operações Vetoriais

1. ***Notação.*** Quantidades vetoriais são impressas em negrito enquanto quantidades escalares aparecem em itálico. Assim, a quantidade vetorial **V** tem um módulo escalar V. Em trabalhos manuscritos as quantidades vetoriais devem sempre ser consistentemente indicadas por um símbolo tal como $\underline{V}$ ou $\vec{V}$ para distinguí-las de quantidades escalares.

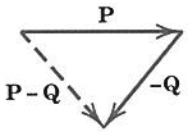
2. ***Adição***

Adição triangular $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{R}$
Adição por paralelogramo $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{R}$
Lei comutativa $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}$
Lei associativa $\mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{R}$



3. ***Subtração***

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q})$$



4. ***Vetores unitários*** **i, j, k**

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$$

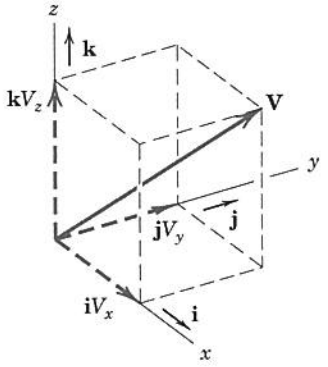
onde $$|\mathbf{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

5. ***Cossenos diretores*** l, m, n são os cossenos dos ângulos entre **V** e os eixos x, y, z. Assim,

$$l = V_x/V \qquad m = V_y/V \qquad n = V_z/V$$

de modo que $$\mathbf{V} = V(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})$$

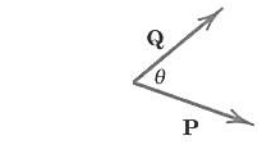
e $$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

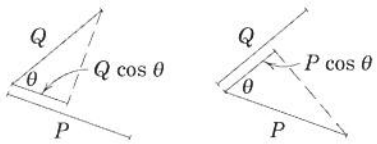


6. ***Produto escalar***

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\theta$$

Esse produto pode ser encarado como o módulo de **P** multiplicado pelo componente $Q \cos\theta$ de **Q** na direção de **P**, ou como o módulo de **Q** multiplicado pelo componente $P \cos\theta$ de **P** na direção de **Q**.





Lei comutativa $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}$

Da definição do produto escalar

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} &= (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k})\cdot(Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}) \\ &= P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

A partir da definição do produto escalar tem-se que dois vetores **P** e **Q** são perpendiculares quando seu produto escalar é zero, $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = 0$.

O ângulo θ entre dois vetores $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ pode ser encontrado a partir da expressão de seu produto escalar $\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2 = P_1P_2\cos\theta$, que dá

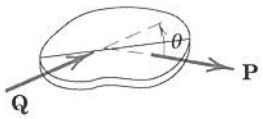
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2}{P_1P_2} = \frac{P_{1_x}P_{2_x} + P_{1_y}P_{2_y} + P_{1_z}P_{2_z}}{P_1P_2} = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$

onde l, m e n são os respectivos cossenos diretores dos vetores. Observa-se também que dois vetores são perpendiculares entre si quando seus cossenos diretores obedecem a relação $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

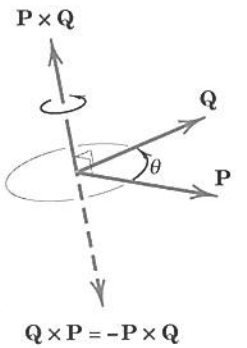
Lei distributiva $\mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{P}\cdot\mathbf{R}$

7. ***Produto vetorial.*** O produto vetorial $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$ dos dois vetores **P** e **Q** é definido como o vetor com o módulo

$$|\mathbf{P}\times\mathbf{Q}| = PQ\,\text{sen}\,\theta$$



e a direção especificada pela regra da mão direita, como mostrado. Revertendo a ordem dos vetores e usando a regra da mão direita obtém-se $\mathbf{Q}\times\mathbf{P} = -\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$.



Lei distributiva $\mathbf{P}\times(\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P}\times\mathbf{Q} + \mathbf{P}\times\mathbf{R}$

Da definição do produto vetorial, usando o *sistema de coordenadas da mão direita*, obtemos

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Com a ajuda dessas identidades e da lei distributiva, o produto vetorial pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\times\mathbf{Q} &= (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k})\times(Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}) \\ &= (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k}\end{aligned}$$

O produto vetorial pode também ser expresso pelo determinante

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix}$$

8. ***Relações adicionais***

Produto misto $(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\cdot\mathbf{R} = \mathbf{R}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$. Os produtos escalar e vetorial podem ser trocados desde que a ordem dos vetores seja mantida. O parêntese é desnecessário, pois $\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R})$ não tem sentido pois não existe o produto vetorial do vetor **P** com o escalar $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}$. Assim, a expressão pode ser escrita como

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\times\mathbf{R}$$

O produto misto pode ser expresso como o determinante

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R} = \begin{vmatrix}P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z\end{vmatrix}$$

Produto vetorial triplo $(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times\mathbf{R} = -\mathbf{R}\times(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \mathbf{R}\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{P})$. Observamos aqui que os parênteses devem ser usados, pois uma expressão $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{R}$ seria ambígua porque ela não identificaria o produto vetorial a ser feito. Pode ser mostrado que o produto vetorial triplo é equivalente a

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times\mathbf{R} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{P}\mathbf{Q} - \mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{P}$$

ou

$$\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{R}) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{R}\mathbf{Q} - \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{R}$$

O primeiro termo da primeira expressão, por exemplo, é o produto escalar $\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}$, um escalar, multiplicado pelo vetor **Q**.

9. ***Derivadas de vetores*** obedecem às mesmas regras das derivadas de escalares.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x\mathbf{i} + \dot{P}_y\mathbf{j} + \dot{P}_z\mathbf{k}$$

$$\frac{d(\mathbf{P}u)}{dt} = \mathbf{P}\dot{u} + \dot{\mathbf{P}}u$$

$$\frac{d(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})}{dt} = \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{Q}$$

$$\frac{d(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})}{dt} = \mathbf{P}\times\dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}}\times\mathbf{Q}$$

10. ***Integração de vetores.*** Se $\mathbf{V}$ é uma função em x, y e z, e um elemento de volume é $d\tau = dx\,dy\,dz$, a integral de $\mathbf{V}$ em relação ao volume pode ser escrita como a soma vetorial das três integrais das componentes. Assim,

$$\int \mathbf{V}\,d\tau = \mathbf{i}\int V_x\,d\tau + \mathbf{j}\int V_y\,d\tau + \mathbf{k}\int V_z\,d\tau$$

C/8 Séries

(A expressão entre colchetes após cada série indica a faixa de convergência.)

$$(1 \pm x)^n =$$

$$= 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad [x^2 < 1]$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{onde } a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

[Expansão de Fourier para $-l < x < l$]

C/9 Derivadas

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\Delta x = \operatorname{sen} dx = \tan dx = dx$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\Delta x = \cos dx = 1$$

$$\frac{d\operatorname{sen} x}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x, \qquad \frac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d\operatorname{senh} x}{dx} = \cosh x, \quad \frac{d\cosh x}{dx} = \operatorname{senh} x, \quad \frac{d\tanh x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

C/10 Integrais

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{15b^2}(3bx - 2a)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{105b^3}(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

$$\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}}\,dx = -\sqrt{a+x}\,\sqrt{b-x} + (a+b)\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{\frac{a+x}{a+b}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[a + bx - a\ln(a+bx)]$$

$$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^n} = \frac{(a+bx)^{1-n}}{b^2}\left(\frac{a+bx}{2-n} - \frac{a}{1-n}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{-ab}}\tanh^{-1}\frac{x\sqrt{-ab}}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(a+bx^2)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})]$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x^3\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\tfrac{1}{5}(x^2 + \tfrac{2}{3}a^2)\sqrt{(a^2 - x^2)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right)$$

$$\text{ou} \quad \frac{-1}{\sqrt{-c}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \\ = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$$

$$\int \tanh x\,dx = \ln\cosh x$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} px\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} px - p\cos px)}{a^2 + p^2}$$

$$\int e^{ax}\cos px\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos px + p\operatorname{sen} px)}{a^2 + p^2}$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2}\left(a\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2}\left(a\cos^2 x + \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2}\left(\frac{a}{2}\operatorname{sen} 2x - \cos 2x\right)$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\frac{\cos x}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 x)$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x}{3}(2 + \cos^2 x)$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x$$

$$\int x\operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{sen} x - x\cos x$$

$$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\operatorname{sen} x$$

$$\int x^2\operatorname{sen} x\,dx = 2x\operatorname{sen} x - (x^2 - 2)\cos x$$

$$\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2 - 2)\operatorname{sen} x$$

Raio de curvatura

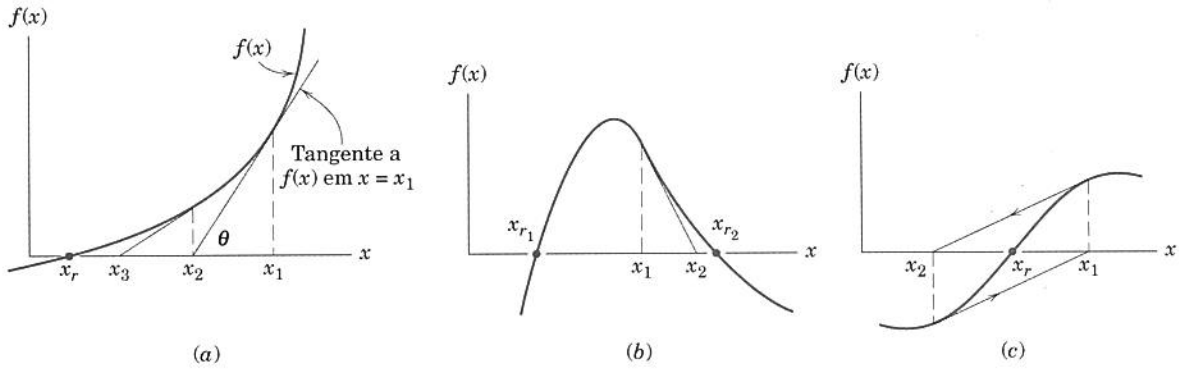
$$\rho_{xy} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\rho_{r\theta} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

C/11 Método de Newton para Resolução de Equações Intratáveis

Freqüentemente, a aplicação dos princípios fundamentais da mecânica leva a uma equação algébrica ou transcendental que não tem solução (ou não é de fácil solução) em forma fechada. Em tais casos, uma técnica iterativa, tal como o método de Newton, pode ser uma ferramenta poderosa para obter-se uma boa estimativa da raiz ou raízes da equação.

Vamos colocar a equação a ser resolvida na forma $f(x) = 0$. A parte *a* da figura anexa mostra uma função arbitrária $f(x)$ para valores de x na vizinhança da raiz desejada, x_r. Observe que x_r é simplesmente o valor de x para o qual a função cruza o eixo x. Suponha que tenhamos disponível (talvez de um gráfico feito manualmente) uma estimativa grosseira, x_1, dessa raiz. Desde que x_1 não seja próximo de um valor máximo ou mínimo da função $f(x)$, podemos obter uma estimativa melhor da raiz x_r traçando a tangente a $f(x)$ em x_1, de modo



que ela intercepte o eixo x em x_2. A partir das relações geométricas da figura podemos escrever

$$\tan\theta = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

onde $f'(x_1)$ representa a derivada de $f(x)$ em relação a x, avaliada em $x = x_1$. Resolvendo a equação anterior para x_2 resulta em

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

O termo $-f(x_1)/f'(x_1)$ é a correção à estimativa inicial da raiz, x_1. Uma vez que x_2 for calculado, podemos repetir o processo para obter x_3, e assim por diante.

Desse modo, generalizamos a equação anterior para

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

onde

x_{k+1} = a $(k+1)$ésima estimativa da raiz, x_r, desejada
x_k = a k-ésima estimativa da raiz, x_r, desejada
$f(x_k)$ = a função $f(x)$ avaliada em $x = x_k$
$f'(x_k)$ = a derivada da função avaliada em $x = x_k$

Essa equação é aplicada repetidamente até que $f(x_{k+1})$ seja suficientemente próxima de zero e $x_{k+1} \cong x_k$. O leitor deve verificar que a equação é válida para todas as possíveis combinações de sinais de x_k, $f(x_k)$ e $f'(x_k)$.

Diversos cuidados são pertinentes:

1. É claro que $f'(x_k)$ não deve ser zero ou próxima de zero. Isso significaria, como foi restringido anteriormente, que x_k corresponde exatamente, ou está muito próximo, de um máximo ou de um mínimo de $f(x)$. Se a inclinação de $f'(x_k)$ for nula, então a tangente à curva nunca intercepta o eixo x. Se a inclinação de $f'(x_k)$ for pequena, então a correção para x_k pode ser tão grande que x_{k+1} é uma estimativa pior da raiz do que x_k. Por esse motivo, engenheiros experientes normalmente limitam o valor do termo de correção; ou seja, se o valor absoluto de $f(x_k)/f'(x_k)$ for maior do que o valor máximo pré-selecionado, o valor máximo é usado.
2. Se existirem diversas raízes da equação $f(x) = 0$, devemos estar nas vizinhanças da raiz desejada, x_r, para que o algoritmo realmente convirja para aquela raiz. A parte b da figura mostra a condição na qual a estimativa inicial x_1 resultará na convergência para x_{r_2} em vez de para x_{r_1}.
3. Oscilação de um lado para o outro da raiz pode ocorrer se, por exemplo, a função for anti-simétrica em relação à raiz, que está em um ponto de inflexão. O emprego de metade da correção normalmente prevenirá esse comportamento, que está mostrado na parte c da figura em anexo.

Exemplo: Começando com a estimativa de $x_1 = 5$, estime a única raiz da equação $e^x - 10\cos x - 100 = 0$.

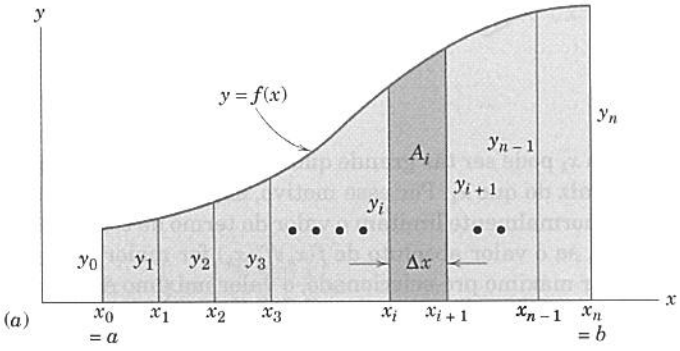
A tabela a seguir resume a aplicação do método de Newton para a equação dada. O processo iterativo foi terminado quando o valor absoluto da correção $-f(x_k)/f'(x_k)$ ficou menor do que 10^{-6}.

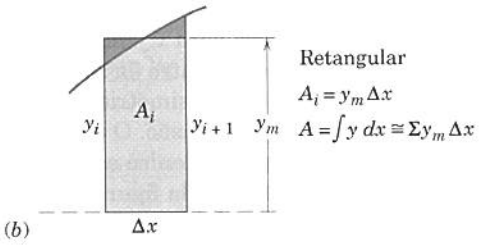
C/12 Técnicas Selecionadas para Integração Numérica

1. Determinação de área. Considere o problema de determinar a área sombreada sob a curva $y = f(x)$ de $x = a$ até $x = b$, como mostrado na parte a da figura, e suponha que a integração analítica não seja possível. A função pode estar tabelada a partir de medidas experimentais ou ela pode ser conhecida analiticamente. A função é considerada contínua no intervalo $a < x < b$. Podemos dividir a área em n faixas verticais, cada uma com largura $\Delta x = (b - a)/n$, e então somar as áreas de todas as faixas para obter $A = \int y\,dx$. Uma

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1} - x_k = -\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
1	5,000 000	45,576 537	138,823 916	−0,328 305
2	4,671 695	7,285 610	96,887 065	−0,075 197
3	4,596 498	0,292 886	89,203 650	−0,003 283
4	4,593 215	0,000 527	88,882 536	−0,000 006
5	4,593 209	$-2(10^{-8})$	88,881 956	$2{,}25(10^{-10})$

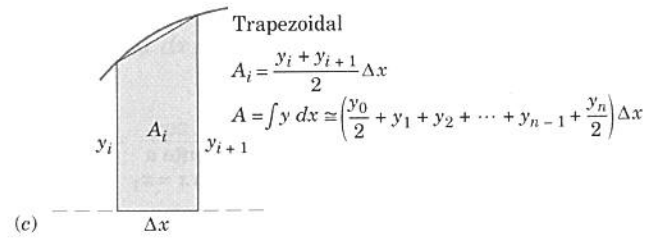
faixa representativa de área A_i está mostrada com sombreamento mais escuro na figura. Três aproximações numéricas úteis estão citadas. Em cada caso, quanto maior for o número de faixas, mais geometricamente precisa se torna a aproximação. Como uma regra geral, pode-se começar com um número relativamente pequeno de faixas e aumentar o número até que as mudanças resultantes na aproximação da área não mais aumentem a precisão desejada.

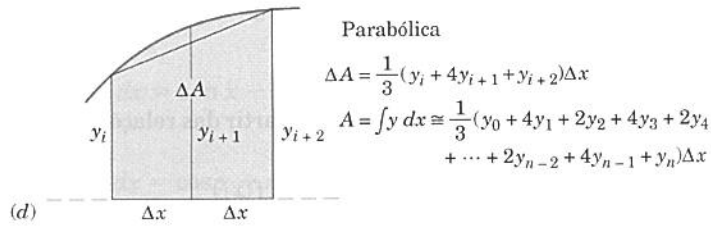




I. *Retangular* [Figura (*b*)] As áreas das faixas são consideradas como retângulos, como mostrado pela faixa representativa cuja altura y_m foi escolhida visualmente de modo que as pequenas áreas mais escuras são o mais iguais possível. Assim, fazemos o somatório Σy_m das alturas efetivas e multiplicamos por Δx. Para uma função conhecida em sua forma analítica, um valor para y_m igual àquele da função no ponto médio $x_i + \Delta x/2$ pode ser calculado e usado no somatório.

II. *Trapezoidal* [Figura (*c*)] As áreas das faixas são consideradas como sendo trapézios, como mostrado pela faixa representativa. A área A_i é igual à altura média $(y_i + y_{i+1})/2$ vezes Δx. Somando as áreas obtém-se a aproximação da área como tabulado. Para o exemplo com a curvatura mostrada, a aproximação, claramente, gerará um valor menor. Para uma curvatura ao contrário, a aproximação dará um valor superior ao real.





III. *Parabólica* [Figura (*d*)] A área entre a corda e a curva (desprezada na solução trapezoidal) pode ser considerada, aproximando a função por uma parábola passando pelos pontos definidos por três valores sucessivos de y. Essa área pode ser calculada a partir da geometria da parábola e somada à área trapezoidal do par de faixas para dar a área ΔA do par como citado. Somando todos os ΔAs obtém-se a tabela mostrada, que é conhecida como regra de Simpson. Para usar a regra de Simpson, o número n de faixas deve ser ímpar.

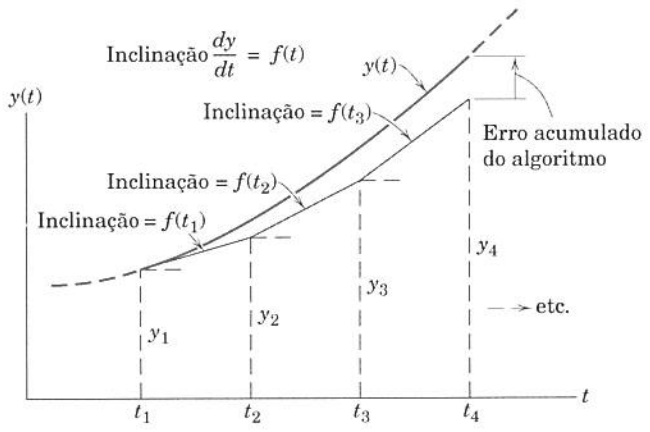
Exemplo: Determine a área sob a curva $y = x\sqrt{1 + x^2}$ de $x = 0$ até $x = 2$. (Uma função integrável foi escolhida aqui de modo que as três aproximações possam ser comparadas com o valor exato, que é

$$A = \int_0^2 x\sqrt{1 + x^2}\,dx = \tfrac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \tfrac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1) =$$
$$= 3{,}393\,447.)$$

Observe que o pior erro de aproximação é menor do que 2%, mesmo com apenas quatro faixas.

2. *Integração de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.* A aplicação dos princípios fundamentais da mecânica freqüentemente resulta em relações diferenciais. Vamos considerar a forma de primeira ordem $dy/dt = f(t)$, onde a função $f(t)$ pode não ser facilmente integrável ou pode ser conhecida apenas em forma de tabela. Podemos integrar numericamente por meio de uma técnica simples de

NÚMBERO DE SUBINTERVALOS	APROXIMAÇÕES PARA A ÁREA		
	RETANGULAR	TRAPEZOIDAL	PARABÓLICA
4	3,361 704	3,456 731	3,392 214
10	3,388 399	3,403 536	3,393 420
50	3,393 245	3,393 850	3,393 447
100	3,393 396	3,393 547	3,393 447
1000	3,393 446	3,393 448	3,393 447
2500	3,393 447	3,393 447	3,393 447



projeção da inclinação, conhecida como integração de Euler, que está ilustrada na figura.

Iniciando em t_1, onde o valor y_1 é conhecido, projetamos a inclinação sobre um subintervalo horizontal ou passo $(t_2 - t_1)$ e vemos que $y_2 = y_1 + f(t_1)(t_2 - t_1)$. Em t_2, o processo pode ser repetido começando em y_2 e assim por diante até que o valor desejado de t seja atingido. Portanto, a expressão geral é

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Se y *versus* t fosse linear, ou seja, se $f(t)$ fosse constante, o método seria exato e não haveria necessidade de um procedimento numérico nesse caso. Variações na inclinação no subintervalo introduzem erro. Para o caso mostrado na figura, a estimativa y_2 é claramente menor do que o valor verdadeiro da função $y(t)$ em t_2. Técnicas de integração mais precisas (tais como os métodos de Runge-Kutta) levam em consideração variações na inclinação no subintervalo e, portanto, fornecem melhores resultados.

De modo semelhante às técnicas de determinação de área, a experiência auxilia na seleção de um subintervalo ou do tamanho do passo quando se lida com funções analíticas. Como uma primeira regra, inicia-se com um passo relativamente grande e, então, se diminui continuamente o tamanho do passo até que as variações correspondentes no resultado da integração sejam muito menores do que a exatidão desejada. Um passo pequeno demais, entretanto, pode resultar em aumento do erro devido a um número grande de operações computacionais. Esse tipo de erro é geralmente conhecido como "erro de aproximação"; enquanto o erro que resulta de um passo grande é conhecido como erro de algoritmo.

Exemplo: Para a equação diferencial $dy/dt = 5t$, com a condição inicial $y = 2$ quando $t = 0$, determine o valor de y para $t = 4$.

A aplicação da técnica de integração de Euler leva aos seguintes resultados:

NÚMERO DE SUBINTERVALOS	TAMANHO DO PASSO	y em $t = 4$	ERRO PERCENTUAL
10	0,4	38	9,5
100	0,04	41,6	0,95
500	0,008	41,92	0,19
1000	0,004	41,96	0,10

Esse exemplo simples pode ser integrado analiticamente. O resultado é $y = 42$ (exatamente).

D

TABELAS ÚTEIS

TABELA D/1 PROPRIEDADES FÍSICAS

***Massa específica* (kg/m³) e *peso específico* (kgf/m³)**

	kg/m³	kgf/m³		kg/m³	kgf/m³
Aço	7 830	7 912,02	Madeira (pinheiro)	480	485,4
Água (doce)	1 000	1 009,632	(carvalho)	800	809
(salgada)	1 030	1 035,52	Mercúrio	13 570	13 704,46
Alumínio	2 690	2 718,248	Óleo (média)	900	906,08
Ar*	1,2062	1,218354	Ouro	19 300	19 496,9
Chumbo	11 370	11 487,8	Terra (úmida, média)	1 760	1 779,8
Cobre	8 910	8 996,08	(seca, média)	1 280	1 294,4
Concreto (média)	2 400	2 427	Titânio	3 080	3 106,56
Ferro (fundido)	7 210	7 281	Vidro	2 590	2 621,16
Gelo	900	906,08			

*A 20°C (68°F) e pressão atmosférica

Coeficientes de atrito

(Os coeficientes na tabela a seguir representam valores típicos sob condições normais de trabalho. Coeficientes reais para uma dada situação dependerão da natureza exata das superfícies de contato. Uma variação de 25 a 100% ou mais, desses valores, pode ser esperada em uma aplicação real, dependendo das condições prevalecentes de limpeza, acabamento superficial, lubrificação e velocidade.)

	VALORES TÍPICOS DO COEFICIENTE DE ATRITO	
SUPERFÍCIE EM CONTATO	ESTÁTICO, μ_s	DINÂMICO, μ_k
Aço sobre aço (a seco)	0,6	0,4
Aço sobre aço (lubrificado)	0,1	0,05
Teflon sobre aço	0,04	0,04
Aço sobre metal babbitt (a seco)	0,4	0,3
Aço sobre metal babbitt (lubrificado)	0,1	0,07
Latão sobre aço (a seco)	0,5	0,4
Lona de freio sobre ferro fundido	0,4	0,3
Pneus de borracha sobre pavimento liso (a seco)	0,9	0,8
Corda de aço sobre polia de ferro (a seco)	0,2	0,15
Corda de cânhamo sobre metal	0,3	0,2
Metal sobre gelo		0,02

TABELA D/2 CONSTANTES DO SISTEMA SOLAR

Constante gravitacional universal	$G = 6{,}673(10^{-11})\text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$
Massa da Terra	$m_e = 5{,}976(10^{24})$ kg
Período de rotação da Terra (1 dia sideral)	= 23 h 56 min 4 s
	= 23,9344 h
Velocidade angular da Terra	$\omega = 0{,}7292(10^{-4})$ rad/s
Velocidade angular média da linha Terra-Sol	$\omega' = 0{,}1991(10^{-6})$ rad/s
Velocidade média do centro da Terra em relação ao Sol	= 107 200 km/h

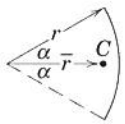
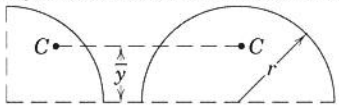
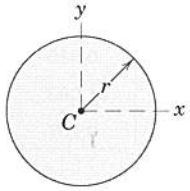
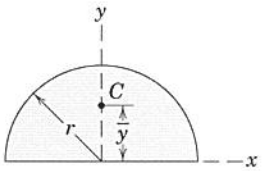
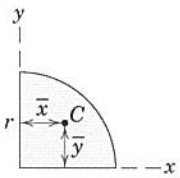
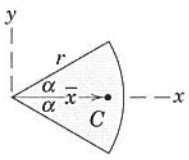
CORPO	DISTÂNCIA MÉDIA AO SOL km	EXCENTRICIDADE DA ÓRBITA e	PERÍODO DA ÓRBITA dias solares	DIÂMETRO MÉDIO km	MASSA RELATIVA À DA TERRA	ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL NA SUPERFÍCIE m/s²	VELOCIDADE DE ESCAPE km/s
Sol	—	—	—	1 392 000	333 000	274	616
Lua	384 398*	0,055	27,32	3 476	0,0123	1,62	2,37
Mercúrio	$57{,}3 \times 10^6$	0,206	87,97	5 000	0,054	3,47	4,17
Vênus	108×10^6	0,0068	224,70	12 400	0,815	8,44	10,24
Terra	$149{,}6 \times 10^6$	0,0167	365,26	12 742†	1,000	9,821‡	11,18
Marte	$227{,}9 \times 10^6$	0,093	686,98	6 788	0,107	3,73	5,03

*Distância média à Terra (centro a centro).

†Diâmetro da esfera do volume igual, baseado em uma Terra esferoidal com um diâmetro polar de 12 714 km e um diâmetro equatorial de 12 756 km.

‡Para a Terra esférica, sem rotação, equivalente ao valor absoluto ao nível do mar e latitude de 37,5°.

TABELA D/3 PROPRIEDADES DE FIGURAS PLANAS

FIGURA	CENTRÓIDE	MOMENTOS DE INÉRCIA DE ÁREA
Segmento de arco 	$\bar{r} = \dfrac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	—
Um Quarto de Arco e Arco Semicircular 	$\bar{y} = \dfrac{2r}{\pi}$	—
Área Circular 	—	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{2}$
Área Semicircular 	$\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{8}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{4}$
Um Quarto de Área Circular 	$\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{8}$
Área de Setores Circulares 	$\bar{x} = \dfrac{2}{3} \dfrac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	$I_x = \dfrac{r^4}{4}(\alpha - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)$ $I_y = \dfrac{r^4}{4}(\alpha + \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)$ $I_z = \dfrac{1}{2} r^4 \alpha$

(continua)

TABELA D/3 PROPRIEDADES DE FIGURAS PLANAS (continuação)

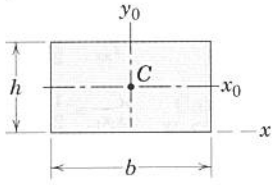
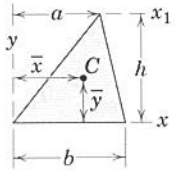
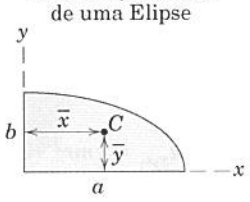
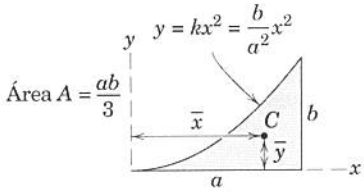
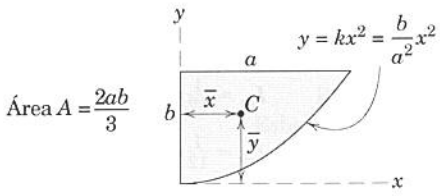
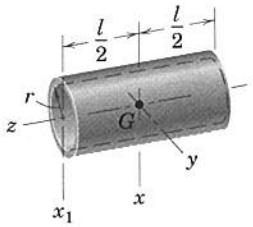
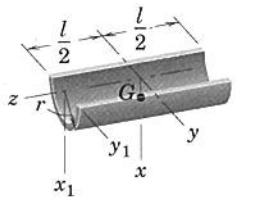
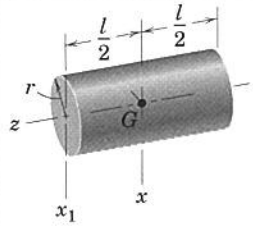
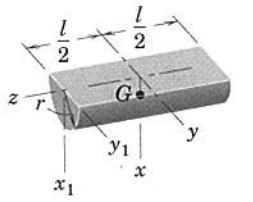
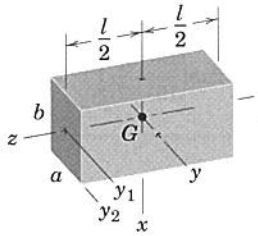
FIGURA	CENTRÓIDE	MOMENTOS DE INÉRCIA DE ÁREA
Área Retangular 	—	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_z = \frac{bh}{12}(b^2+h^2)$
Área Triangular 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{4}$
Área do Quadrante de uma Elipse 	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	$I_x = \frac{\pi ab^3}{16}$, $\bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)ab^3$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{16}$, $\bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)a^3b$ $I_z = \frac{\pi ab}{16}(a^2 + b^2)$
Área Subparabólica 	$\bar{x} = \frac{3a}{4}$ $\bar{y} = \frac{3b}{10}$	$I_x = \frac{ab^3}{21}$ $I_y = \frac{a^3b}{5}$ $I_z = ab\left(\frac{a^3}{5} + \frac{b^2}{21}\right)$
Área Parabólica 	$\bar{x} = \frac{3a}{8}$ $\bar{y} = \frac{3b}{5}$	$I_x = \frac{2ab^3}{7}$ $I_y = \frac{2a^3b}{15}$ $I_z = 2ab\left(\frac{a^2}{15} + \frac{b^2}{7}\right)$

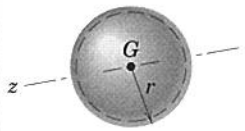
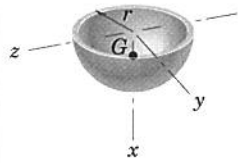
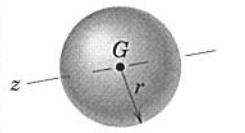
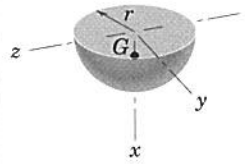
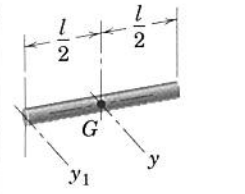
TABELA D/4 PROPRIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÊNEOS

(m = massa do corpo mostrado)

CORPO	CENTRO DE MASSA	MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA
 Casca Circular Cilíndrica	—	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
 Casca Semicilíndrica	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$
 Cilindro Circular	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
 Semicilindro	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
 Paralelepípedo Retangular	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2 + l^2)$

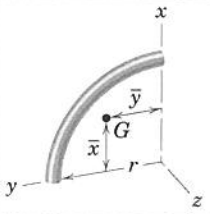
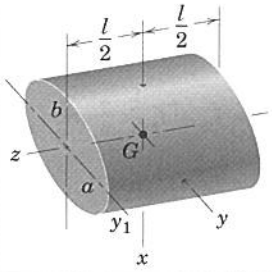
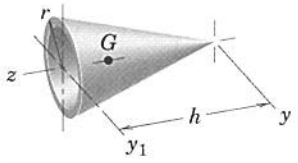
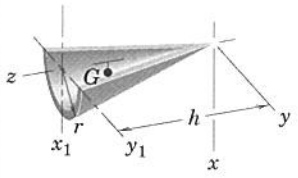
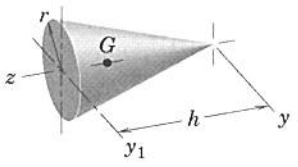
(continua)

TABELA D/4 PROPRIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÊNEOS (continuação)
(m = massa do corpo mostrado)

CORPO		CENTRO DE MASSA	MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA
	Casca Esférica	—	$I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$
	Casca Hemisférica	$\bar{x} = \frac{r}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{5}{12}mr^2$
	Esfera	—	$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$
	Hemisfério	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{83}{320}mr^2$
	Barra Esbelta Uniforme	—	$I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{3}ml^2$

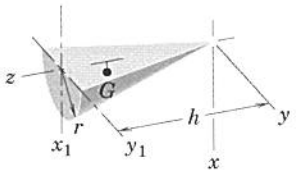
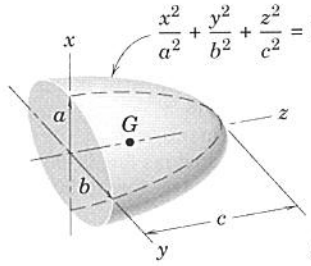
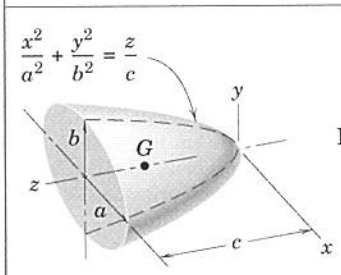
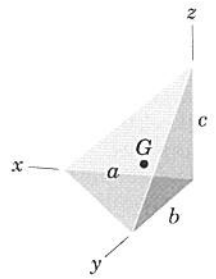
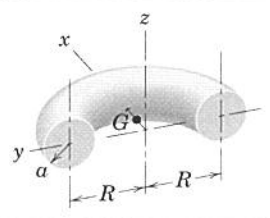
(continua)

TABELA D/4 PROPRIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÊNEOS (continuação)
(m = massa do corpo mostrado)

CORPO	CENTRO DE MASSA	MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA
 Um Quarto de Barra Circular	$\bar{x} = \bar{y}$ $= \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$ $I_{zz} = mr^2$
 Cilindro Elíptico	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{yy} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$
 Casca Cônica	$\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
 Casca Semicônica	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
 Cone Circular	$\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$

(continua)

TABELA D/4 PROPRIEDADES DE SÓLIDOS HOMOGÊNEOS (continuação)
(m = massa do corpo mostrado)

CORPO	CENTRO DE MASSA	MOMENTOS DE INÉRCIA DE MASSA
 Semicone	$\bar{x} = \frac{r}{\pi}$ $\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2$
 Semi-elipsóide	$\bar{z} = \frac{3c}{8}$	$I_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + \frac{19}{64}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + \frac{19}{64}c^2)$
 Parabolóide Elíptico	$\bar{z} = \frac{2c}{3}$	$I_{xx} = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{yy} = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{zz} = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{6}m(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{6}m(a^2 + \frac{1}{3}c^2)$
 Tetraedro Retangular	$\bar{x} = \frac{a}{4}$ $\bar{y} = \frac{b}{4}$ $\bar{z} = \frac{c}{4}$	$I_{xx} = \frac{1}{10}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{10}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{10}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{3}{80}m(b^2 + c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{80}m(a^2 + c^2)$ $\bar{I}_{zz} = \frac{3}{80}m(a^2 + b^2)$
 Meio Toróide	$\bar{x} = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{5}{8}ma^2$ $I_{zz} = mR^2 + \frac{3}{4}ma^2$

ÍNDICE

A

Ação
  de forças, 82
  e reação, 18
Adição
  escalar, 4
  vetorial, 4, 19
Aerostática, 225
Álgebra vetorial, método da, 37
Altura metacêntrica, 229
Ângulo(s)
  de atrito, 247
  entre dois vetores, 51
Apoio de treliças, 129
Aproximações, 9, 190
  método de, 190
  para ângulos pequenos, 9
Arco parabólico, 217
Área, 18
Atração gravitacional da Terra, 8
Atrito, 245-285
  a seco, 245
    mecanismo do, 246
  ângulos de, 247
    dinâmico, 248
    estático, 248
  círculo de, 268
  de Coulomb, 245
  dinâmico, 247
    cone de, 248
  em discos, 268
  em máquinas, aplicações de, 260
    correias flexíveis, 273
    cunhas, 260
    mancais
      de escora, 268
      radiais, 268
    parafusos, 262
    resistência ao rolamento, 274
  entre fluidos, 245
  estático, 247
  fatores que afetam, 248
  fenômenos envolvendo, 245
  forças de, 245
  interno, 246
  problemas com, tipos de, 248
  tipos de, 35

B

Binário(s)
  em três dimensões, 57
  equivalentes, 38
  momento, 37

C

Cabo(s)
  catenário, 218
  flexíveis, 216
  parabólico, 217
Centro
  de flutuação, 229
  de gravidade do corpo, 174
  de massa, 174
    versus centro de gravidade, 175
  de pressão, 226
Centróides, 176
Círculo de atrito, 268
Cisalhamento, 207
Coeficiente
  de atrito
    dinâmico, 247
    estático, 247
  de resistência ao rolamento, 274
Componente(s)
  de uma força, 21
  escalares, 20
  retangulares, 5, 20, 49
  vetoriais, 19, 20
    convenções para descrever, 20
Compressão, 129
Comprimento, 7
Cone de atrito dinâmico, 248
Conversão de unidades, 7
Corpo(s)
  compostos, 190
  estaticamente
    determinado, 91
    indeterminado, 91
  redundantes, 91
  rígido(s), 4
    equilíbrio de um, 289
    interligados com elementos multiforça, 150
    único, 150
  sólidos, 225
Correias flexíveis, 273
Cossenos diretores, 5
Cunhas, 260

D

Deslocamento virtual, 289
Desparafusar, condições para, 262
Diagrama(s)
  convenções para, 4
  de corpo livre, 11, 81, 106, 151
    construção, 84
    exercícios sobre, 87
  de forças ativas, 291, 303
Diferenciais, 9
Dinâmica, 3
Discos, atrito em, 268

E

Eficiência mecânica, 292
Eixo arbitrário, momento em relação a um, 57
Elemento(s)
  de duas forças, 90, 128, 129
  de três forças, 90
Energia
  equação de, 303
  potencial
    elástica, 302
    gravitacional, 302
Equação(ões)
  convenções para, 4
  de energia, 303
  de equilíbrio, 247
Equilíbrio, 43, 81-125
  categorias de, 89, 106
  completo, 66
  condições de, 89, 106
  de um corpo rígido, 289
  de uma partícula, 289
  em duas dimensões, 81
  em três dimensões, 106
  equações de, alternativas, 90
  estabilidade do, 304
  estável, 304
  instável, 304
  neutro, 304
Escalares, grandezas, 4
Escora, mancais de, 268
Espaço, 3
Estabilidade, 302
Estática
  determinação, 91, 108
  indeterminação, grau de, 91
  introdução à, 3-15
  resolução de problemas em, 9
Estruturas, 127-171
  estaticamente determinadas, 127
  método
    das seções, 139
    dos nós, 130
  suportes e máquinas, 150
  treliças
    espaciais, 145
    planas, 127

F

Flexão, 207
Fluido, 225

Fluido-estática, 225
Flutuabilidade, 228
Força(s), 4
  ação de, 82
    modelagem na análise
      bidimensional, 82
      tridimensional, 107
  aplicadas, 17
  ativas, 290
    diagramas de, 303
  bidimensionais, sistemas de, 20
  cisalhante, diagrama da, 208
  classificação das, 17
  componentes de uma, 21
  concorrentes, 18, 66
  coplanares, 67
  de atrito, 245
  de flutuação, 229
  distribuição
    ao longo de uma área, 174
    linear, 174
    volumétrica, 174
  distribuídas, 173-243
  internas, 290
  paralelas, 67
  reativas, 17, 290
  representação das, 151
  sistemas de, 17-79
  trabalho de uma, 287
  tridimensionais, sistemas de, 49

G

Gráfico(s)
  usando, 10
Grandeza(s), 6
  escalares, 4
  vetoriais, 4, 17
Gravidade, centro de, 174, 175
  determinando o, 175
Gravitação
  constante da, 8
  lei da, 9

H

Hidrostática, 225
Hipóteses apropriadas, formulando, 10
Homogeneidade dimensional, 11

I

Isolamento
  completo, 84
  de um corpo, 11

L

Lei(s)
  da gravitação, 8
  de combinação vetorial de forças, 3
  de Newton, 5
  de Pascal, 225
  do movimento, 3
  primeira, de Newton, 5
  segunda, de Newton, 6
  terceira, de Newton, 6
Liberdade, graus de, 291
Limites, 9
Linha, 18
Líquidos, 225

M

Mancais
  de escora, 268
  radicais, 268
Máquinas, 150
Massa, 3, 7
  centro de, 174
Mecânica, 3
Método(s)
  algébrico, 43
  da álgebra vetorial, 37
  das seções, 139
    para treliças espaciais, 147
  de análise, 6
  de solução, 11
  dos nós, 130
    para treliças espaciais, 146
Mola
  constante da, 303
  linear elástica, ação de uma, 84
  não linear, 84
  rigidez da, 302
Momento(s), 29
  binário, 37
  em relação a um eixo arbitrário, 57
  em torno de um ponto, 29
  em três dimensões, 56
  fletor, 207, 208
  princípio dos, 44, 175
  torçor, 207

N

Newton
  Isaac, 3
  leis de, 5
Nós, 129
  método dos, 130

O

Ordem, 9

P

Parafusos, 262
Partícula, 4
  equilíbrio de uma, 289
Peso, 18
Plataforma móvel, 305
Polígono
  de forças, 43
  fechado, 90
Ponte Harbour Bridge em Sidney, Austrália, 131
Precisão, 9
Pressão
  centro de, 226
  hidrostática, 226
    em superfícies
      cilíndricas, 227
      planas de qualquer forma, 227
  manométrica, 225
Produto
  escalar, 50
  triplo, 57
  vetorial, 30
    avaliando o, 56

Q

Quilo, padrão do, 7
Quilolibra, 7

R

Redundância interna e externa, 131
Represa Glen Canyon em Lake Powell, Arizona, 228
Restrição(ões), 91
  adequadas, 92, 108
  impróprias, 92
  parciais, 92, 108
  redundante, 92, 108
  validade das, 92
Resultantes, 43, 66
Rigidez, 84
Rolamento, resistência ao, 274
  coeficiente de, 274

S

Seções, método das, 139
Sistema(s)
  absoluto, 7
  americano, unidades do, 6
  com um grau de liberdade, 291
  de forças
    bidimensionais, 20, 17-79
    não concorrentes, 44
    tridimensionais, 49
  força-binário, 38, 39
  gravitacional, 7
  ideais de corpos rígidos, equilíbrio de, 290
  mecânico, 81
Soma vetorial, 4
Subtração vetorial, 5
Suportes, 150

T

Teleférico em Juneau, Alasca, 219
Tempo, 3, 7
Teorema(s)
  de Pappus, 197
  de Varignon, 30
    em três dimensões, 57
Torção, 207
Torçor resultante, 67
Torque, 29
Trabalho
  de um binário, 288
  de uma força, 287
  dimensões de, 288
  virtual, 287-317
    energia potencial e estabilidade, 302
    equilíbrio, 289
    princípio do, 291
Tração, 129
Transmissibilidade, princípio da, 17
Treliças
  apoio de, 129

Baltimore, 128
espaciais, 145
estaticamente determinadas, 146
método
das seções para, 147
dos nós para, 146
Fink, 128
Howe, 128
K, 128
planas, 127
Pratt, 128
simples, 127, 140
utilizadas
em pontes, 128
em telhados, 128
Warren, 128

U

Unidade(s)
conversão de, 7
do sistema americano, 6
SI, 6

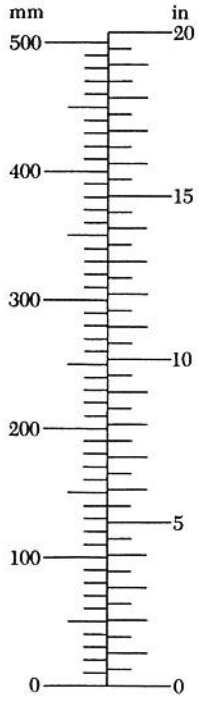
V

Valor(es)
numéricos *versus* literais, 11
Varignon, teorema de, 30
Velocidade uniforme, 5
Vetor(es)
ângulo entre dois, 51
fixo, 4
livre, 4
móvel, 4
trabalhando, 4
unitário, 5
Viga(s)
efeitos
externos, 202
internos, 207
em I, 209
estaticamente
determinadas, 202
indeterminadas, 202
tipos de, 202
Volume(s), 18
irregulares, 190

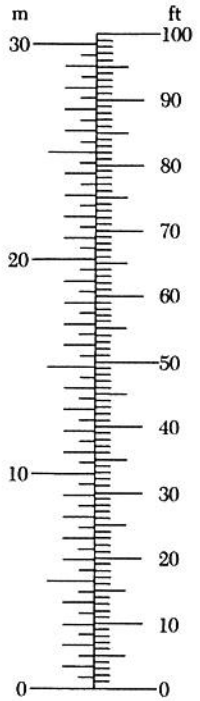
A marca FSC é a garantia de que a madeira utilizada na fabricação do papel com o qual este livro foi impresso provém de florestas gerenciadas, observando-se rigorosos critérios sociais e ambientais e de sustentabilidade.

ROTAPLAN
GRÁFICA E EDITORA LTDA
Rua Álvaro Seixas 165 parte
Engenho Novo - Rio de Janeiro - RJ
Tel/Fax: 21-2201-1444
E-mail: rotaplanrio@gmail.com

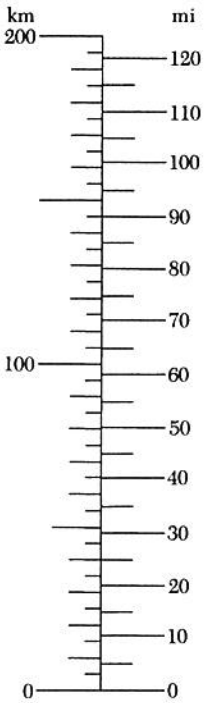
Diagramas de Conversão entre as Unidades SI e o Sistema Americano



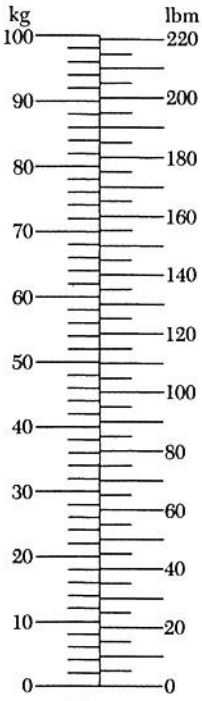
Comprimento



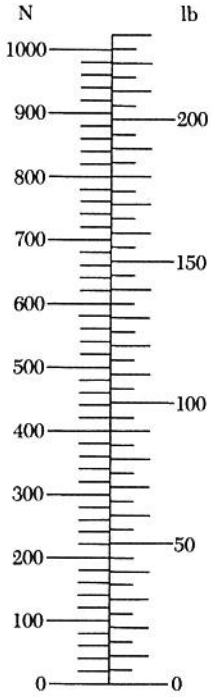
Comprimento



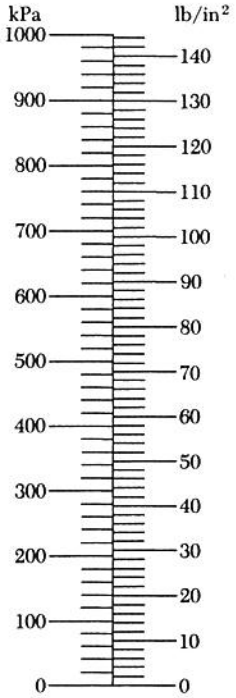
Comprimento



Massa

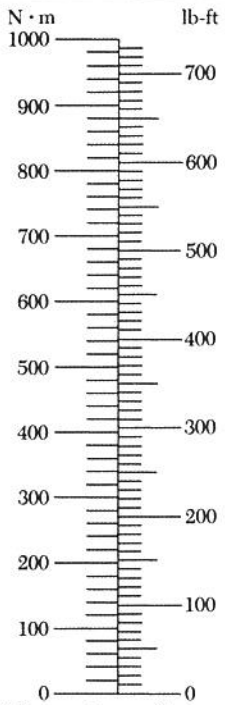


Força

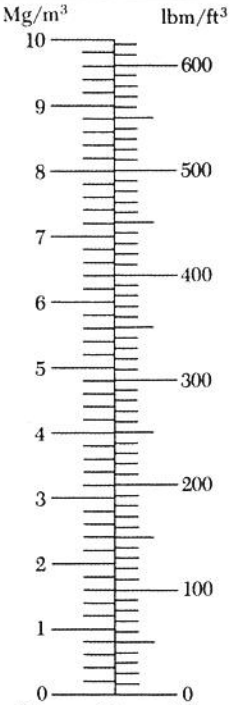


Pressão ou Tensão

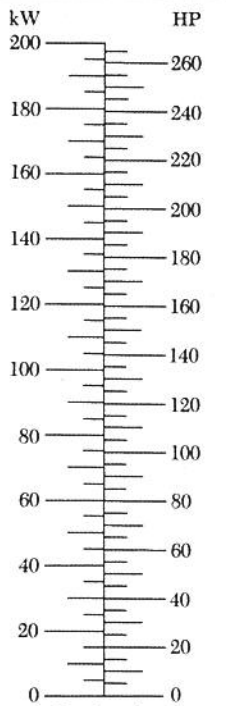
Diagramas de Conversão entre as Unidades SI e o Sistema Americano (cont.)



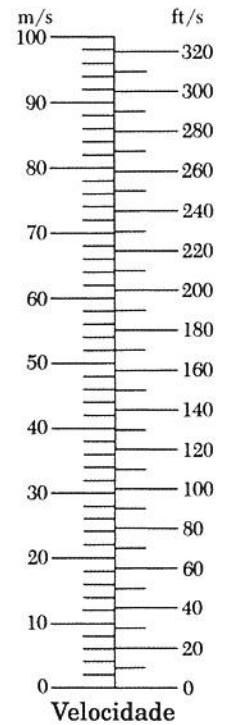
Momento ou Torque



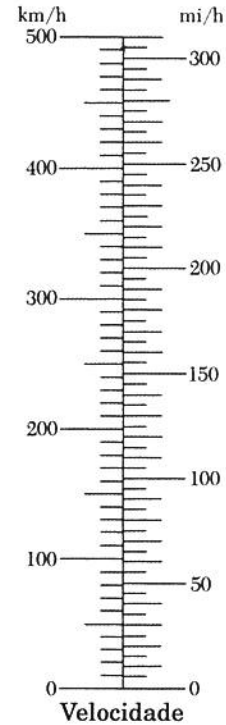
Massa Específica



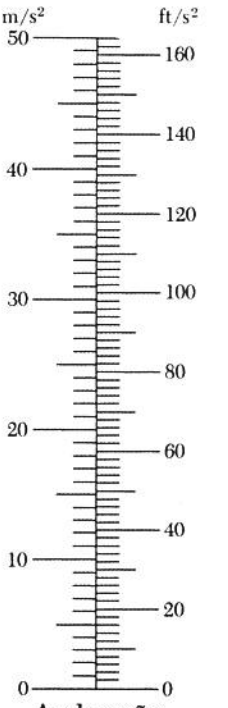
Potência



Velocidade



Velocidade



Aceleração

Conhecido por sua precisão, clareza e aplicações, *Mecânica para Engenharia: Estática* de Meriam & Kraige tem oferecido uma base sólida dos princípios da mecânica por mais de 50 anos. Agora em sua Sexta Edição, o texto continua a ajudar os estudantes a desenvolver as suas habilidades de solucionar problemas com uma grande variedade deles muito interessantes relacionados com projetos em engenharia.

Nesta edição, mais de 50% dos problemas são novos e muitos exemplos também foram acrescentados. Para ajudar os estudantes a desenvolver as habilidades necessárias para visualização e solução de problemas, o texto enfatiza intensamente a construção de diagramas de corpo livre – a habilidade mais importante necessária à solução de problemas em mecânica.

gen Grupo Editorial Nacional

LTC

www.ltceditora.com.br

ISBN 978-85-216-1718-1

9 788521 617181

J. L. MERIAM | L. G. KRAIGE

MECÂNICA PARA ENGENHARIA

ESTÁTICA

SEXTA EDIÇÃO

gen | LTC